

지점운동을 받는 정정보의 동해석을 위한 동지점 유한요소 개발

김 용 우*† · 정 명 조**

* 순천대학교 기계공학과, ** 한국원자력안전기술원

Moving Support Elements for Dynamic Finite Element Analysis of Statically Determinate Beams Subjected to Support Motions

Yong-Woo Kim*† and Myung Jo Jung**

* Dept. of Mechanical Engineering, Suncheon Nat'l Univ.

** Korea Institute of Nuclear Safety

(Received November 16, 2012 ; Revised January 18, 2013 ; Accepted January 21, 2013)

Key Words: Support Motion(지점운동), Quasi-Static Decomposition Method(준정적 분해법), Moving Support Elements(동지점 요소), Support-Free Element(비지점 요소), Rayleigh-Damped Euler-Bernoulli Beam(Rayleigh 댐핑을 고려한 오일러-베르누이 보), Statically Determinate Beam(정정보), Dynamic Finite Element Analysis(동적 유한요소해석)

초록: 지점운동을 받는 베르누이-오일러 보의 동적 유한요소해석을 위하여, 준정적 분해법을 사용하여 유한요소 정식화 및 지점운동 묘사를 위한 보요소를 개발하였다. 이 보요소들은 전통적인 2 절점 Hermitian 보 요소로서 기존의 모델링 방법을 그대로 따르면서 한 쪽 절점이 운동하는 지점과 일치하는 경우 해당 요소만을 본 연구에서 제안하는 요소로 대체하여 사용할 수 있도록 수식화하였다. 이 요소의 유용성과 정확성을 보이기 위해 지점운동을 받는 정정보들에 대해 수치실험을 실시하고 그 결과들을 이론해와 비교함으로써 사용이 간편함과 동시에 정확도가 매우 높다는 사실을 보였다

Abstract: A finite element formulation for a Rayleigh-damped Bernoulli-Euler beam subjected to support motions, which accompanies quasi-static rigid-body motion, is presented by using the quasi-static decomposition method. Moving support beam elements, one of whose nodes is coincident with the moving support, are developed to represent the effect of a moving support. Statically determinate beams subjected to support motions can be modeled successfully by using moving support elements. Examples of cantilever and simply-supported beams subjected to support motions are illustrated, and the numerical results are compared with the analytical solutions. The comparison shows good agreement.

- 기호설명 -

$a(t)$, $b(t)$: 지점운동(지점의 변위)
 $\dot{a}(t)$, $\dot{b}(t)$: 지점운동(지점의 속도)
 $\ddot{a}(t)$, $\ddot{b}(t)$: 지점운동(지점의 가속도)
 $EI(x)$: 굽힘강성
 $f(x,t)$: 단위 길이당 외력
 I : 단면 2 차모멘트
 l : 보요소의 길이
 L : 보의 길이

$m(x)$: 단위길이당 질량
 $w(x,t)$: 동적 변위 또는 상대 변위
 x : 전체좌표계
 x_i : 절점 i 의 전체좌표
 \hat{x} : 요소좌표계
 y_{si} : 절점 i 의 준정적 변위
 $y(x,t)$: 보의 횡방향 변위 또는 절대변위
 $y_s(x,t)$: 준정적 변위
 α, β : Rayleigh 댐핑 계수
 $\phi(x,t)$: 동적 각변위
 $\theta(x,t)$: 각변위 또는 절대 각변위
 $\theta_s(x,t)$: 준정적 각변위

† Corresponding Author, kyw@sunchon.ac.kr

1. 서 론

건물이나 배관설비와 같이 지면 또는 벽에 부착된 구조물들이 지점의 운동에 의해 가진 되는 경우가 많다. 이 경우, 구조물은 구조물 자체에 직접적으로 작용되는 외력에 의해 가진 되는 것이 아니고 관성력이나 댐핑력과 같은 동적 저항력에 의해 가진 된다. 이러한 동적 문제의 해는 모드 해석을 채용하는 준정적 분해법을 사용하여 구한다. 이 방법은 Mindlin과 Goodman⁽¹⁾이 개발한 방법으로, 그들은 경계조건이 시간의 함수로 주어지는 보의 진동문제에 적용하였다. 준정적 분해법(quasi-static decomposition method)은 경계조건으로부터 시간의존성을 제거한 다음, 통상의 자유진동 또는 강제진동의 문제로 변환시켜 기존의 고전적 방법이나 수치적 방법을 통해 해를 구한다. 여러 학자들은 이 방법을 사용하여 배관, 댐, 교량 등의 다양한 문제의 해를 구하였다. Clough와 Penzien⁽²⁾은 준정적 분해법을 집중질량 모델에 적용하여 스펙트럼 응답해석을 하였으며, Chopra⁽³⁾도 다층 빌딩의 집중질량 시스템에 대해 지진응답해석을 실시하였다. Abel-Ghaffar과 Rood⁽⁴⁾는 금문교의 교탑 해석에 적용하였으며, Yau⁽⁵⁾는 이동하는 진동체 및 지점운동을 받는 현수교에 대한 동해석을 수행하였다. Wang⁽⁷⁾ 높은 빌딩을 외팔보로 모델링하여 유한요소해석을 수행하였다. 위의 연구들은 주파수 영역에서의 수치해석^(2,3,6)에 의한 응답스펙트럼 해석에 관한 것들이거나, 시간 영역에서의 이론적 또는 수치적 동해석에 의한 것^(4,5,7)이다.

유한요소법을 이용하는 대표적인 지진해석법에는 주파수 영역에서 해석하는 응답 스펙트럼법과 시간영역에서 해석하는 거대질량법 또는 준정적 분해법을 이용한 동해석이 있다. 응답 스펙트럼법은 오래 동안 사용되어온 방법으로서 상용 유한요소 프로그램에 채용되어 널리 사용되고 있으나 비선형 문제를 다루기 어려운 한계를 지니고 있다. 한편 시간영역에서의 동해석은 비선형 문제를 다룰 수 있어 여러 학자들이 비선형 문제에 주로 적용하였다.

시간 영역에서의 동해석에 사용되는 거대질량법^(9,12,13)은 프로그래밍이 간편하여 기존의 상용프로그램을 수정하지 않고도 쉽게 적용할 수 있는 장점이 있으나, 이론적 배경이 미흡하고, 특히 거대질량이 너무 작거나 크면 동적 응답이 부정확해 질 수 있다는 약점이 있다. 한편, 준정적 분해법을 이용한

시간영역에서의 유한요소해석은 프로그래밍이 다소 복잡하여 아직까지 상용프로그램에서의 사용이 일반화되지 아니한 실정이다. 따라서 시간영역에서의 동해석에 쉽게 적용할 수 있는 유한요소 해석법에 대한 연구가 필요하다.

이에 따라서 본 연구에서는 지지점운동에 의해 가진 되는 보에 준정적 분해법을 적용하여, 사용이 간편하면서 정확도가 높은 유한요소를 개발하였다. 새로 개발된 요소의 성능을 검토하기 위해, 지점운동에 의해 가진되는 정정보에 적용하여 시간영역에서의 변위, 속도, 가속도, 굽힘모멘트와 전단력 등의 응답을 구하여 이론해와 비교하였다.

2. 유한요소 수식화

2.1 Rayleigh 댐핑을 고려한 오일러-베르누이 보 단순보의 이론⁽⁸⁾에 따르면 굽힘모멘트와 전단력은 다음과 같이 표현되며(Fig. 1 참조)

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$V(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) \tag{2}$$

보의 길이가 L 인 균일 단면의 Rayleigh 댐핑을 고려한 오일러-베르누이 보의 운동방정식⁽⁹⁾은 다

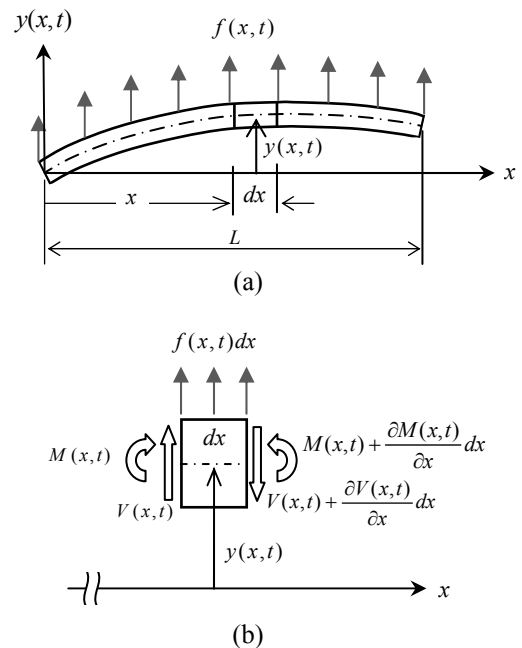


Fig. 1 (a) Bending of a beam; (b) Free-body diagram of a beam element of length dx

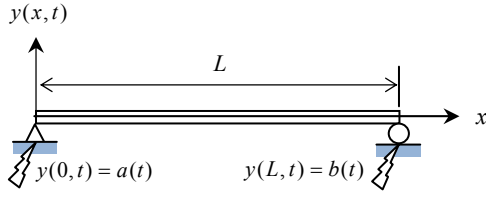


Fig. 2 A simply-supported beam subjected to support motions, $a(t)$ at $x=0$ and $b(t)$ at $x=L$



Fig. 3 Cantilever subjected to a support motion

음과 같다.

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \left(2\alpha m + \beta EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (3)$$

여기서 α 와 β 는 Rayleigh-damping 계수들이며, 외력(Fig. 1(a)의 $f(x,t)$)은 영으로 가정하였다.

운동방정식의 초기조건을 다음과 같이 가정한다.

$$y(x,t)|_{t=0} = y_0(x) \quad (4)$$

$$\dot{y}(x,t)|_{t=0} = \dot{y}_0(x) \quad (5)$$

또한 Fig. 2 및 Fig. 3 과 같이 지점운동(support motion)을 받는 보의 경계조건은 다음과 같다.

- 양단 단순지지보(Fig. 2):

$$y(x,t)|_{x=0} = a(t); \text{ (non-homogeneous B.C.)} \quad (6)$$

$$y''(x,t)|_{x=0} = 0 \quad (7)$$

$$y(x,t)|_{x=L} = b(t); \text{ (non-homogeneous B.C.)} \quad (8)$$

$$y''(x,t)|_{x=L} = 0 \quad (9)$$

- 외팔보(Fig. 3):

$$y(x,t)|_{x=0} = a(t); \text{ (non-homogeneous B.C.)} \quad (10)$$

$$y'(x,t)|_{x=0} = 0 \quad (11)$$

$$y''(x,t)|_{x=L} = 0 \quad (12)$$

$$y'''(x,t)|_{x=L} = 0 \quad (13)$$

위 식들에서 문자 위의 점(dot)은 시간에 관한 편미분을, 상첨자로 쓴 빗금(prime)은 x 에 관한 편미분을 의미한다.

경계조건으로부터 시간의존성을 제거하기 위해 준정적 분해법을 적용하면, 변위 $y(x,t)$ 는 준정적 변위($y_s(x,t)$)와 동적 변위($w(x,t)$)의 합으로 가정할 수 있다.

$$y(x,t) = y_s(x,t) + w(x,t) \quad (14)$$

위 식에 의해

$$\theta(x,t) = \theta_s(x,t) + \phi(x,t) \quad (15)$$

여기서 $\theta_s(x,t)$ 와 $\phi(x,t)$ 는 각각 준정적 각변위와 동적 각변위로서 다음과 같이 정의한다.

$$\theta_s(x,t) = \frac{\partial y_s(x,t)}{\partial x} \quad (16)$$

$$\phi(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (17)$$

준정적 변위는 $EI \frac{\partial^4 y_s(x,t)}{\partial x^4} = 0$ 및 주어진 경계

조건들을 만족시키는 변위이다. Fig. 2 및 Fig. 3과 같은 정정보가 지점운동을 받는 경우, 준정적 변위는 강제운동의 변위로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y_s(x,t) = a(t)L_1(x) + b(t)L_2(x) \quad (18)$$

단 외팔보의 경우 $b(t) = a(t)$ 이고, $L_1(x)$ 과 $L_2(x)$ 는 다음과 같다.

$$L_1(x) = 1 - x/L, \quad L_2(x) = x/L \quad (0 \leq x \leq L) \quad (19)$$

식 (14), (18) 및 (19)를 이용하여 운동방정식, 초기조건 및 경계조건들을 동적변위 $w(x,t)$ 로 표현하면 각각 다음과 같이 변환된다.

- 운동방정식:

$$m\ddot{w}(x,t) + \left(2\alpha m + \beta EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \dot{w}(x,t) + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = g(x,t) \quad (20)$$

여기서

$$g(x,t) = -m\ddot{y}_s(x,t) - 2\alpha m\dot{y}_s(x,t) = -m\{\ddot{a}(t) + 2\alpha\dot{a}(t)\}L_1(x) - m\{\ddot{b}(t) + 2\alpha\dot{b}(t)\}L_2(x) \quad (21)$$

- 초기조건:

$$w(x,t)|_{t=0} = y_0(x) - \{a(0)L_1(x) + b(0)L_2(x)\} \quad (22)$$

$$\dot{w}(x,t)|_{t=0} = \dot{y}_0(x) - \{\dot{a}(0)L_1(x) + \dot{b}(0)L_2(x)\} \quad (23)$$

- 양단 단순지지보의 경계조건:

$$w(x,t)|_{x=0} = 0 \quad (24)$$

$$w''(x,t)|_{x=0} = 0 \quad (25)$$

$$w(x,t)|_{x=L} = 0 \quad (26)$$

$$w''(x,t)|_{x=L} = 0 \quad (27)$$

- 외팔보의 경계조건:

$$w(x,t)|_{x=0} = 0 \quad (28)$$

$$w'(x,t)|_{x=0} = 0 \quad (29)$$

$$w''(x,t)|_{x=L} = 0 \quad (30)$$

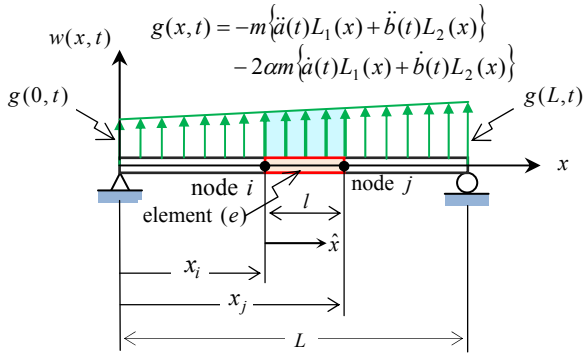
$$w'''(x,t)|_{x=L} = 0 \quad (31)$$

여기서 시간의 함수로 주어지는 경계조건들(식 (6), (8), (10))이 시간의 함수가 아닌 경계조건으로

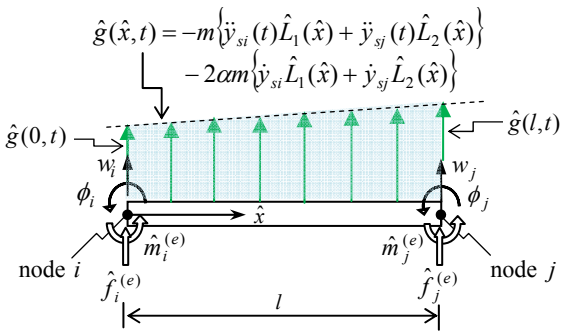
변환되었음을 유의할 필요가 있다.

2.2 동적변위를 기본으로 하는 유한요소 방정식 동적 변위 ($w(x,t)$)로 표현된 운동방정식 (20)과 경계조건(식 (24)-(27) 및 식 (28)-(31))에 대응하는 양단 단순지지보 및 외팔보를 그림으로 나타내면 각각 Fig. 4(a) 및 Fig. 5 와 같다.

Fig. 4(a)의 보를 유한요소로 분할했을 때, 임의의 요소(e)를 확대하여 Fig. 4(b)에 다시 그렸다. Fig. 4(b)에서 l 은 요소(e)의 길이를, \hat{x} 는 요소좌표계를, w_i, w_j 는 절점 i 와 j 에서의 변위를, 그리고 ϕ_i, ϕ_j 는 각변위를 나타낸다.



(a) Effective force model of the beam in Fig. 2



(b) A beam element (e) of the effective force model

Fig. 4 Effective force model of the beam in Fig. 2 and its typical element.

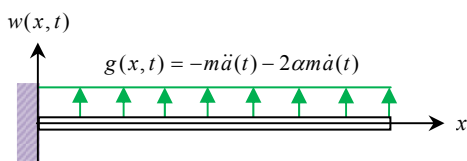


Fig. 5 Effective force model of the cantilever in Fig. 3

Fig. 4(a)에 표시한 분포하중 $g(x,t)$ 은 식 (21)의 것으로 지점운동에 의해 보에 가해지는 관성력과 댐핑력을 나타낸다. 이 저항력들을 요소좌표계를 기준으로 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{g}(\hat{x},t) = -m\{\ddot{y}_{si}(t)L_1(\hat{x}) + \ddot{y}_{sj}(t)L_2(\hat{x})\} - 2cam\{\dot{y}_{si}(t)L_1(\hat{x}) + \dot{y}_{sj}(t)L_2(\hat{x})\} \quad (32)$$

여기서 $y_{si}(t), \dot{y}_{si}(t), \ddot{y}_{si}(t)$ 는 절점 i 에서의 준정적 변위, 속도, 가속도로서 식 (18)로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} y_{si}(t) &= a(t)L_1(x_i) + b(t)L_2(x_i) \\ y_{sj}(t) &= a(t)L_1(x_j) + b(t)L_2(x_j) \\ \dot{y}_{si}(t) &= \dot{a}(t)L_1(x_i) + \dot{b}(t)L_2(x_i) \\ \dot{y}_{sj}(t) &= \dot{a}(t)L_1(x_j) + \dot{b}(t)L_2(x_j) \\ \ddot{y}_{si}(t) &= \ddot{a}(t)L_1(x_i) + \ddot{b}(t)L_2(x_i) \\ \ddot{y}_{sj}(t) &= \ddot{a}(t)L_1(x_j) + \ddot{b}(t)L_2(x_j) \end{aligned} \quad (33)$$

위 식들에서 x_i, x_j 는 각각 절점 i 와 j 의 전체 좌표계를 기준한 좌표 값들이다. 단, 외팔보의 경우에는 위 식들에 $b(t)=a(t)$ 를 사용하면 절점에서의 준정적 변위, 속도, 가속도를 계산할 수 있다.

변위(w)와 각변위($\phi = w'$)의 연속성을 보장하도록 요소좌표계에서 $w(\hat{x},t)$ 의 변위함수를 다음과 같이 가정한다.

$$w(\hat{x},t) = [N]\{w^{(e)}\} \quad (34)$$

여기서

$$[N] = [N_1(\hat{x}) \ N_2(\hat{x}) \ N_3(\hat{x}) \ N_4(\hat{x})] \quad (35)$$

$$\{w^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} w_i(t) \\ \phi_i(t) \\ w_j(t) \\ \phi_j(t) \end{Bmatrix} \quad (36)$$

이고, $N_i(\hat{x}), (i=1, 2, 3, 4)$ 는 Hermite 형상함수로서, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1(\hat{x}) &= \frac{1}{l^3}(2\hat{x}^3 - 3l\hat{x}^2 + l^3) \\ N_2(\hat{x}) &= \frac{1}{l^3}(l\hat{x}^3 - 2l^2\hat{x}^2 + l^3\hat{x}) \\ N_3(\hat{x}) &= \frac{1}{l^3}(-2\hat{x}^3 + 3l\hat{x}^2) \\ N_4(\hat{x}) &= \frac{1}{l^3}(l\hat{x}^3 - l^2\hat{x}^2) \end{aligned} \quad (37)$$

위의 변위함수와 라그랑지 운동방정식을 이용하여, 운동방정식 (20)과 식 (32)의 분포하중에 대응하는 다음과 같은 오일러-베르누이 보 요소(e)의 유한요소 방정식을 얻는다.^(10,11)

$$[m^{(e)}]\{\ddot{w}^{(e)}\} + (2\alpha[m^{(e)}] + \beta[k^{(e)}])\{\dot{w}^{(e)}\} + [k^{(e)}]\{w^{(e)}\} = \{\hat{f}^{(e)}\} + \{\hat{f}_0^{(e)}\} \quad (38)$$

여기서

$$[m^{(e)}] = \int_0^l m[N]^T [N] d\hat{x} = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$[k^{(e)}] = \int_0^l EI[N'']^T [N''] d\hat{x} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\{\ddot{w}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{w}_i(t) \\ \ddot{\phi}_i(t) \\ \ddot{w}_j(t) \\ \ddot{\phi}_j(t) \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{w}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \dot{w}_i(t) \\ \dot{\phi}_i(t) \\ \dot{w}_j(t) \\ \dot{\phi}_j(t) \end{Bmatrix}, \quad (41)$$

$$\{\hat{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_1^{(e)} \\ \hat{m}_1^{(e)} \\ \hat{f}_2^{(e)} \\ \hat{m}_2^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad (42)$$

$$\{\hat{f}_0^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \int_0^l \hat{g}(\hat{x}, t) N_1(\hat{x}) d\hat{x} \\ \int_0^l \hat{g}(\hat{x}, t) N_2(\hat{x}) d\hat{x} \\ \int_0^l \hat{g}(\hat{x}, t) N_3(\hat{x}) d\hat{x} \\ \int_0^l \hat{g}(\hat{x}, t) N_4(\hat{x}) d\hat{x} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

식 (43)의 하중벡터는 분포하중(관성력과 댐핑력)을 등가절점하중으로 변환한 것으로서, 식 (32)와 식 (37)을 식 (43)에 대입하여 계산하면 다음과 같다.

$$\{\hat{f}_0^{(e)}\} = \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -147\ddot{y}_{si} - 63\ddot{y}_{sj} \\ -21\dot{y}_{si} - 14\dot{y}_{sj} \\ -63\ddot{y}_{si} - 147\ddot{y}_{sj} \\ 14\dot{y}_{si} + 21\dot{y}_{sj} \end{Bmatrix} + 2\alpha \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -147\dot{y}_{si} - 63\dot{y}_{sj} \\ -21\ddot{y}_{si} - 14\ddot{y}_{sj} \\ -63\dot{y}_{si} - 147\dot{y}_{sj} \\ 14\ddot{y}_{si} + 21\ddot{y}_{sj} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

2.3 절대변위를 기본으로 하는 유한요소 방정식 동적변위로 표현된 식 (38)의 유한요소방정식에 동적변위에 관한 경계조건을 적용한 다음, 식 (14)

를 이용하면 절대변위($y(x,t)$)로 표현한 유한요소 방정식을 얻을 수 있다. 이러한 요소들은 동적변위($w(x,t)$)의 경계조건을 적용하여 얻어지는 까닭에 지지점의 조건(support condition)에 따라 다르다. 본 연구에서는 이러한 요소들을 동지점 요소(moving support element)라고 부른다.

오일러-베르누이 보 요소(2 절점 요소)의 절점에 부과되는 경계조건들의 조합에 따라서 여러 가지의 동지점 요소를 개발할 수 있다. 그러나 통상적으로 보를 유한요소로 모델링할 때 한 개의 요소로 모델링하지 않는다는 점을 고려하여, (i) 두 절점이 모두 지지점이 아닌 경우의 비지점 요소(support-free element)와 (ii) 요소의 한 절점이 단순지점 또는 고정지점이고 다른 절점은 지지점이 아닌 경우로 조합되는 네 가지의 경우(왼쪽 단순지점—오른쪽 비지점; 왼쪽 비지점—오른쪽 단순지점; 왼쪽 고정지점—오른쪽 비지점; 왼쪽 비지점—오른쪽 고정지점)의 동지점 요소(moving support element)들을 개발한다.

비지점 요소와 동지점요소를 유도하기 위해, Fig. 4(a)와 같이 요소의 왼쪽 절점번호를 i 로, 오른쪽 절점번호를 j 로 각각 표기하기로 한다.

• 비지점 요소(Support-free element)

식 (14)와 (15)로부터 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \{y^{(e)}\} &= \{y_s^{(e)}\} + \{w^{(e)}\}, \\ \{\dot{y}^{(e)}\} &= \{\dot{y}_s^{(e)}\} + \{\dot{w}^{(e)}\}, \\ \{\ddot{y}^{(e)}\} &= \{\ddot{y}_s^{(e)}\} + \{\ddot{w}^{(e)}\} \end{aligned} \quad (45)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{\ddot{y}^{(e)}\} &= \begin{Bmatrix} \ddot{y}_i(t) \\ \ddot{\theta}_i(t) \\ \ddot{y}_j(t) \\ \ddot{\theta}_j(t) \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{y}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \\ \dot{y}_j(t) \\ \dot{\theta}_j(t) \end{Bmatrix}, \quad \{y^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} y_i(t) \\ \theta_i(t) \\ y_j(t) \\ \theta_j(t) \end{Bmatrix}, \\ \{\ddot{y}_s^{(e)}\} &= \begin{Bmatrix} \ddot{y}_{si}(t) \\ \ddot{\theta}_{si}(t) \\ \ddot{y}_{sj}(t) \\ \ddot{\theta}_{sj}(t) \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{y}_s^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_{si}(t) \\ \dot{\theta}_{si}(t) \\ \dot{y}_{sj}(t) \\ \dot{\theta}_{sj}(t) \end{Bmatrix}, \quad \{y_s^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} y_{si}(t) \\ \theta_{si}(t) \\ y_{sj}(t) \\ \theta_{sj}(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

이다. 또한 식 (15)와 식 (16)으로부터

$$\begin{aligned} \theta_s(x,t) &= a(t)L'_1(x) + b(t)L'_2(x), \\ \dot{\theta}_s(x,t) &= \dot{a}(t)L'_1(x) + \dot{b}(t)L'_2(x), \\ \ddot{\theta}_s(x,t) &= \ddot{a}(t)L'_1(x) + \ddot{b}(t)L'_2(x) \end{aligned} \quad (47)$$

이므로

$$\begin{aligned}\theta_{si}(t) &= \theta_{sj}(t) = \frac{b(t) - a(t)}{L} = \frac{y_{sj}(t) - y_{si}(t)}{l}, \\ \dot{\theta}_{si}(t) &= \dot{\theta}_{sj}(t) = \frac{\dot{b}(t) - \dot{a}(t)}{L} = \frac{\dot{y}_{sj}(t) - \dot{y}_{si}(t)}{l}, \\ \ddot{\theta}_{si}(t) &= \ddot{\theta}_{sj}(t) = \frac{\ddot{b}(t) - \ddot{a}(t)}{L} = \frac{\ddot{y}_{sj}(t) - \ddot{y}_{si}(t)}{l}\end{aligned}\quad (48)$$

이다.

식 (45)-(48)을 식 (38)에 적용하여 다음의 유한 요소 운동방정식을 얻는다.

$$[m^{(e)}]\{\ddot{y}^{(e)}\} + (2\alpha[m^{(e)}] + \beta[k^{(e)}])\{\dot{y}^{(e)}\} + [k^{(e)}]\{y^{(e)}\} = \{\hat{f}^{(e)}\} \quad (49)$$

위 식은 두 절점이 모두 지지점이 아닌 경우(비지점)에 대한 요소방정식이다.

식 (49)에서 $\{\hat{f}^{(e)}\}$ 는 이웃하는 요소에 의해 절점에 작용하는 집중하중벡터이다. 본 논문에서는 외력이 작용하지 않을 경우를 고려하고 있으므로 요소방정식을 조립하여 전체방정식을 만들면 절점에 작용하는 집중하중벡터는 영이 된다. 따라서 간편성을 위해 이후로는 생략한다.

• 「왼쪽 단순지점—오른쪽 비지점」 요소

(Left-hinged element)

만약 Fig. 4(a)의 왼쪽 절점 i 가 지점운동을 받는 단순지점이고 오른쪽 절점 j 는 비지점(지점이 아님)인 경우라면 $w_j(t) = 0$ 이므로 이를 식 (38)에 적용하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}& \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 13l & 156 & -22l \\ -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_i \\ \ddot{w}_j \\ \ddot{\phi}_j \end{Bmatrix} + \\ & \left(2\alpha \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 13l & 156 & -22l \\ -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} + \beta \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -6l & 12 & -6l \\ 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_i \\ \dot{w}_j \\ \dot{\phi}_j \end{Bmatrix} \\ & + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -6l & 12 & -6l \\ 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \\ & = \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -21\ddot{y}_{si} - 14\ddot{y}_{sj} \\ -63\ddot{y}_{si} - 147\ddot{y}_{sj} \\ 14\ddot{y}_{si} + 21\ddot{y}_{sj} \end{Bmatrix} + 2\alpha \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -21\dot{y}_{si} - 14\dot{y}_{sj} \\ -63\dot{y}_{si} - 147\dot{y}_{sj} \\ 14\dot{y}_{si} + 21\dot{y}_{sj} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (50)$$

식 (14)와 (15)로부터 다음의 관계가 정의된다.

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ y_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \theta_{si} \\ y_{sj} \\ \theta_{sj} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

식 (51)과 식 (48)을 이용하여, 식 (50)을 절대변위, 절대속도, 절대가속도로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}& \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 13l & 156 & -22l \\ -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_i \\ \ddot{y}_j \\ \ddot{\theta}_j \end{Bmatrix} + \\ & \left(2\alpha \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 13l & 156 & -22l \\ -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} + \beta \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -6l & 12 & -6l \\ 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{y}_j \\ \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} \\ & + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -6l & 12 & -6l \\ 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ y_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \\ & = \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -22\ddot{y}_{si} - 44\alpha\dot{y}_{si} \\ -54\ddot{y}_{si} - 108\alpha\dot{y}_{si} \\ 13\ddot{y}_{si} + 26\alpha\dot{y}_{si} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} -6ly_{si} - 6\beta\dot{y}_{si} \\ 12y_{si} + 12\beta\dot{y}_{si} \\ -6ly_{si} - 6\beta\dot{y}_{si} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (52)$$

• 「왼쪽 비지점—오른쪽 단순지점」 요소

(Right-hinged element)

Fig. 4(a)의 왼쪽 절점 i 는 지점이 아니고(비지점), 오른쪽 절점 j 가 지점운동을 받는 단순지점일 경우, $w_j(t) = 0$ 이므로 이를 식(38)에 적용한 다음, 식 (14), (15), (48)을 이용하여 절대변위로 표현하면 다음의 운동방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}& \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & -13l \\ 22l & 4l^2 & -3l^2 \\ -13l & -3l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_i \\ \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_j \end{Bmatrix} + \\ & \left(2\alpha \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & -13l \\ 22l & 4l^2 & -3l^2 \\ -13l & -3l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} + \beta \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & 6l \\ 6l & 4l^2 & 2l^2 \\ 6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} \\ & + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & 6l \\ 6l & 4l^2 & 2l^2 \\ 6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} \\ & = \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -54\ddot{y}_{sj} - 108\alpha\dot{y}_{sj} \\ -13\ddot{y}_{sj} - 26\alpha\dot{y}_{sj} \\ 22\ddot{y}_{sj} + 44\alpha\dot{y}_{sj} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} 12y_{sj} + 12\beta\dot{y}_{sj} \\ 6ly_{sj} + 6\beta\dot{y}_{sj} \\ 6ly_{sj} + 6\beta\dot{y}_{sj} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (53)$$

• 「왼쪽 고정지점—오른쪽 비지점」 요소

(Left-fixed element)

Fig. 4(a)의 왼쪽 절점 i 가 지점운동을 받는 고정지점이고 오른쪽 절점 j 는 지점이 아닌 경우라면, $w_i(t)=0$, $\phi_i(t)=0$ 이므로 이를 식 (38)에 적용한 다음, 식(14), (15), (48)을 이용하여 절대변위로 표현하면 다음의 운동 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_j \\ \ddot{\theta}_j \end{Bmatrix} \\ & + \left(2\alpha \cdot \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{bmatrix} + \beta \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y}_j \\ \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} \\ & + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \\ & = \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -41\ddot{y}_{si} - 13\ddot{y}_{sj} + 2\alpha(-41\dot{y}_{si} - 13\dot{y}_{sj}) \\ 10l\ddot{y}_{si} + 3l\ddot{y}_{sj} + 2\alpha(10l\dot{y}_{si} + 3l\dot{y}_{sj}) \end{Bmatrix} \\ & + \frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} 6y_{si} + 6y_{sj} + \beta(6\dot{y}_{si} + 6\dot{y}_{sj}) \\ -4ly_{si} - 2ly_{sj} + \beta(-4l\dot{y}_{si} - 2l\dot{y}_{sj}) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

• 「왼쪽 비지점—오른쪽 고정지점」 요소

(Right-fixed element)

Fig. 4(a)의 왼쪽 절점 i 가 지점이 아니고 오른쪽 절점 j 가 지점운동을 받는 고정지점일 경우라면 $w_j(t)=0$, $\phi_j(t)=0$ 이므로 이를 식 (38)에 적용한 다음, 식 (14), (15), (48)을 이용하여 절대변위로 표현하면 다음의 운동 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l \\ 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{Bmatrix} \\ & + \left(2\alpha \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l \\ 22l & 4l^2 \end{bmatrix} + \beta \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{Bmatrix} \\ & + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \\ & = \frac{ml}{420} \begin{Bmatrix} -13\ddot{y}_{si} - 41\ddot{y}_{sj} + 2\alpha(-13\dot{y}_{si} - 41\dot{y}_{sj}) \\ -3l\ddot{y}_{si} - 10l\ddot{y}_{sj} + 2\alpha(-3l\dot{y}_{si} - 10l\dot{y}_{sj}) \end{Bmatrix} \\ & + \frac{EI}{l^3} \begin{Bmatrix} 6y_{si} + 6y_{sj} + \beta(6\dot{y}_{si} + 6\dot{y}_{sj}) \\ 2ly_{si} + 4ly_{sj} + \beta(2l\dot{y}_{si} + 4l\dot{y}_{sj}) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (55)$$

2.4 요소 분할과 전체 유한요소 운동방정식

앞의 2.3 절에서 제시한 동지점 요소 및 비지점 요소를 사용하여 지점운동을 받는 보를 Fig. 6 과 같이 분할한 다음, 각 요소의 요소방정식을 더하

면 다음과 같은 형태의 전체방정식을 얻는다.

$$[M]\{\ddot{y}\} + (2\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F(t)\} \quad (56)$$

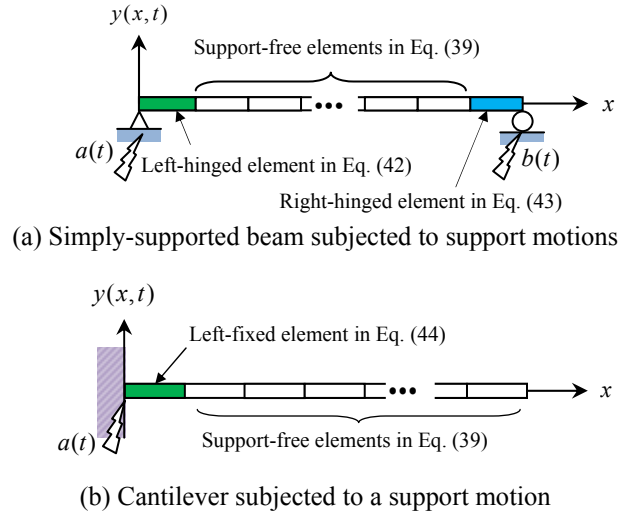


Fig. 6 Discretization of typical beams subjected to support motions.

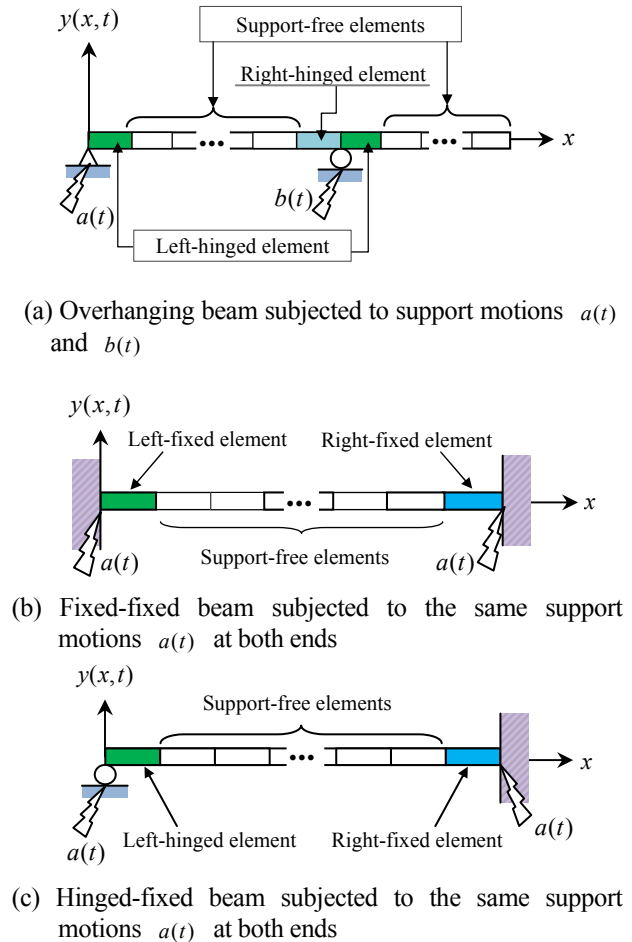


Fig. 7 Discretization of beams accompanying quasi-static rigid-body motion by support motions

여기서 $[M]$ 은 전체 질량행렬이고, $[K]$ 는 전체 강성행렬이다. $\{y\}$, $\{\dot{y}\}$, $\{\ddot{y}\}$ 는 각각 전체 변위벡터, 속도벡터, 가속도벡터를 나타내는데, 이미 동적 변위에 대한 경계조건을 적용한 요소를 사용하였기 때문에 지점의 종류에 따른 해당 자유도는 제거된 상태이다. 본 연구에서는 식 (56)에 시간 적분법의 하나인 Newmark method⁽¹¹⁾를 적용하여 시간영역에서의 응답을 계산하였다. 이때 변위, 속도, 가속도뿐만 아니라 굽힘모멘트 및 전단력 등에 대한 응답도 충분히 수렴할 수 있도록 시간 간격(Δt)을 설정하였다.

동지점 요소들은 지점운동으로 인한 보의 준정적 운동이 강제운동인 경우에는 모두 적용할 수 있기 때문에 내민보(overhanging beam)나 준정적 강제운동을 받는 연속보(continuous beam)에 대해서도 적용할 수 있다. 이러한 보의 요소분할을 Fig. 7에 예시한다.

3. 수치실험

지점운동으로 가진 되는 보의 동해석을 위해 개발된 요소들의 성능을 검토하기 위해 지점운동을 받는 정정보에 대하여 유한요소해석을 실시하고 그 결과를 이론해와 비교하였다.

3.1 지점 가속도를 받는 외팔보

외팔보(Fig. 8(a) 참조)에 대한 입력 데이터는 다음과 같다.

- $L = 20 \text{ m}$
- $EI = 2.08 \times 10^7 \text{ Nm}^2$
- $m = 67.4388 \text{ kg/m}$
- 고정단에서의 지점 가속도:

$$\ddot{a}(t) = \begin{cases} -\frac{2A_0}{t_0}t + A_0 & \text{for } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{for } t > t_0 \end{cases}$$

여기서 $A_0 = 0.5 \text{ m/s}^2$, $t_0 = 1.0 \text{ s}$ 이다.

- 초기조건: $y(x,t)|_{t=0} = 0$, $\dot{y}(x,t)|_{t=0} = 0$,
 $\theta(x,t)|_{t=0} = 0$, $\dot{\theta}(x,t)|_{t=0} = 0$.

시간 간격(Δt) 및 요소개수(NEL)에 따른 정확도 및 수렴성을 파악하기 위해 외팔보를 NEL=4, 10, 20, 30 개의 균등한 요소로 모델링하여 Δt 의 변화에 따른 유한요소해석결과들(전단력 분포)을 Fig. 8(b)에 비교하였다. 전단력을 비교하는 이유는, 변위를 기본으로 하는 유한요소해석에서 수치해의 정확도는 변위 > 각변위 > 굽힘모멘트 > 전단력 순으로 낮아지는데, 이는 변위를 먼저 구하고 이를 차례로 x 에 관한 미분 차수를 높여가며 미분하는 형태를 취하기 때문이다. 따라

서 전단력이 정확하면 변위, 속도, 가속도 및 굽힘모멘트도 충분히 정확하다고 할 수 있다. Fig. 8(b)를 보면, 수치해의 정확도는 요소개수(NEL)보다 시간 간격(Δt)에 더 민감함을 알 수 있다. 또한, NEL=20, $\Delta t=10^{-4}$ 에서 외팔보의 수치해가 충분히 수렴하였음을 알 수 있다. 따라서 Fig. 8(c)에서는 NEL=20, $\Delta t=10^{-4}$ 일 때의 변위, 속도, 가속도의 시간응답이론해와 비교하였다.

다양한 수치실험 결과, 변위, 속도, 가속도의 시간응답은 $\Delta t = 0.01s$ 이면 충분히 수렴하는 경향을 보이지만, 이때의 전단력은 약간의 오차를 보인다는 사실이다. 이러한 오차는 시간간격을 감소시킴으로써 정확한 해를 구할 수 있다.

3.2 다지점 운동을 받는 내민보

내민보(Fig. 9(a) 참조)에 대한 입력 데이터는 3.1 절의 외팔보와 동일하다. 전단력의 정확도를 보장하는 수준의 $\Delta t = 10^{-4}s$ 와 NEL=30를 사용하여 내민보에 대한 유한요소해석을 실시하였다. 그 결과를 Fig. 9(b) 및 Fig. 9(c)에서 이론해와 비교하였다.

3.3 다지점 운동을 받는 단순지지보

지점운동 및 댐핑이 각기 다른 두 가지 경우의 단순지지보에 대하여 유한요소해석을 실시하였다. 이때 보는 전단력을 정확도를 높이기 위하여 $\Delta t = 10^{-3}s$ 및 NEL=20 개의 균등한 요소로 모델링하였다. 두 가지 보의 공통 입력 데이터는 다음과 같다.

- $L = 60 \text{ m}$
- $EI = 2.45 \times 10^9 \text{ Nm}^2$
- $m = 2400 \text{ kg/m}$
- 왼쪽 단($x = 0$)에서의 지점운동:
 $a(t) = S_0 \exp(-\delta t) \cdot \sin(\Omega t)$ at $x = 0$
여기서 $S_0 = 0.01 \text{ m}$, $\delta = 0.1$, $\Omega = 3.77 \text{ rad/s}$
- 오른쪽 단($x = L$)에서의 지점운동을 $b(t)$ 라 하자.
다음은 두 가지 보의 지점운동, 댐핑계수 및 초기조건들이다.

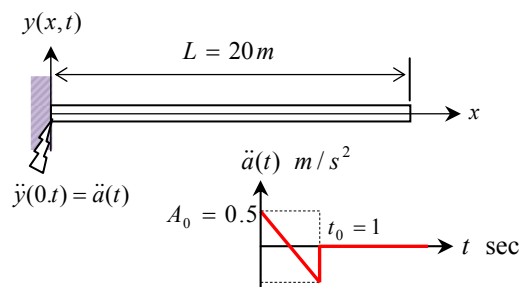


Fig. 8(a) A cantilever subjected to the acceleration time history at fixed end

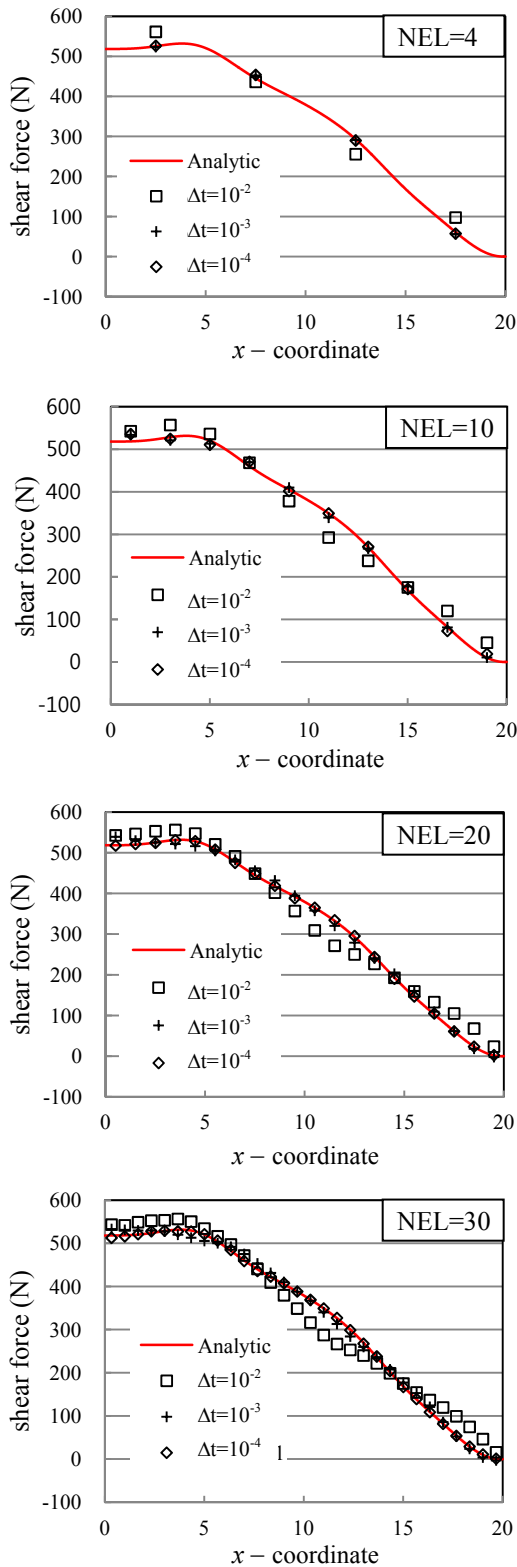


Fig. 8(b) Shear forces at $t = 0.5 \text{ s}$ under variations of NEL and Δt , where the analytic solutions are obtained by using 100 modes

(i) 위상이 다른 지점운동의 경우(Fig. 11(a)):
 $b(t) = -a(t)$, $\alpha = 0.1381 \text{ s}^{-1}$, $\beta = 0 \text{ s}$ 이고, 초

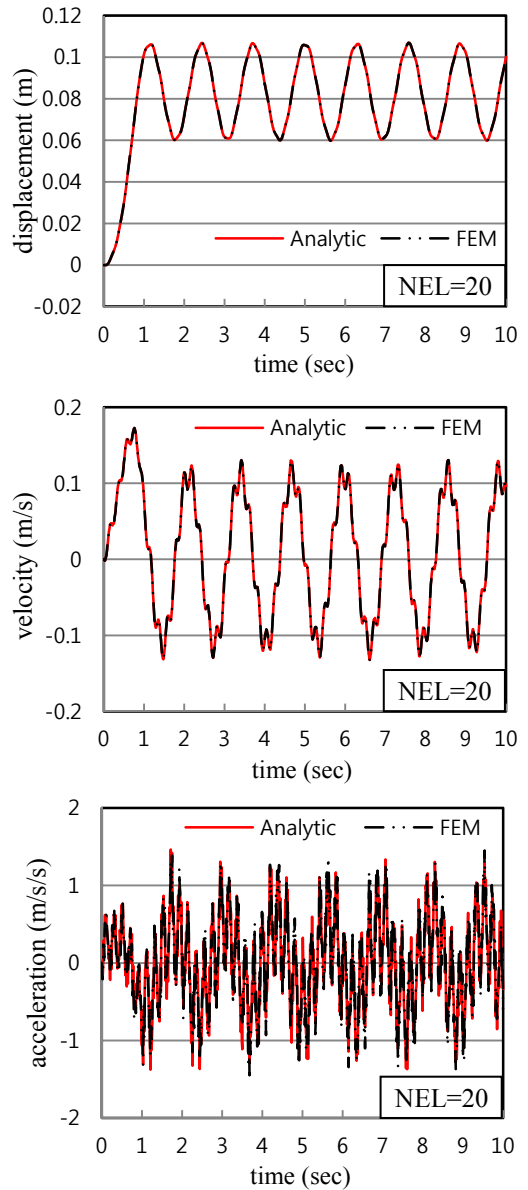


Fig. 8(c) The Responses at $x = 10 \text{ m}$ where the analytic solutions are obtained by using 100 modes ($\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$, NEL = 20)

기조건은 다음과 같다.

$$y(x,t)|_{t=0} = 0, \quad \dot{y}(x,t)|_{t=0} = S_0 \Omega \left(1 - \frac{2}{L} x\right),$$

$$\theta(x,t)|_{t=0} = 0, \quad \dot{\theta}(x,t)|_{t=0} = -2S_0 \Omega / L$$

(ii) Rayleigh 댐핑을 고려한 경우(Fig. 12(a)):

$b(t) = a(t)$, $\alpha = 0.1111 \text{ s}^{-1}$, $\beta = 0.0072 \text{ s}$ 이고, 초기 조건은 다음과 같다.

$$y(x,t)|_{t=0} = 0, \quad \dot{y}(x,t)|_{t=0} = S_0 \Omega,$$

$$\theta(x,t)|_{t=0} = 0, \quad \dot{\theta}(x,t)|_{t=0} = 0$$

위의 두 가지 모델들(Fig. 10(a), Fig. 11(a) 참조)에 대한 $x = 15 \text{ m}$ 에서의 수치해(시간영역에서의 변위,

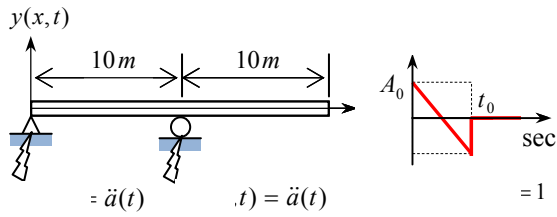


Fig. 9(a) Overhanging beam subjected to the acceleration time histories $\ddot{a}(t)$ at hinged supports

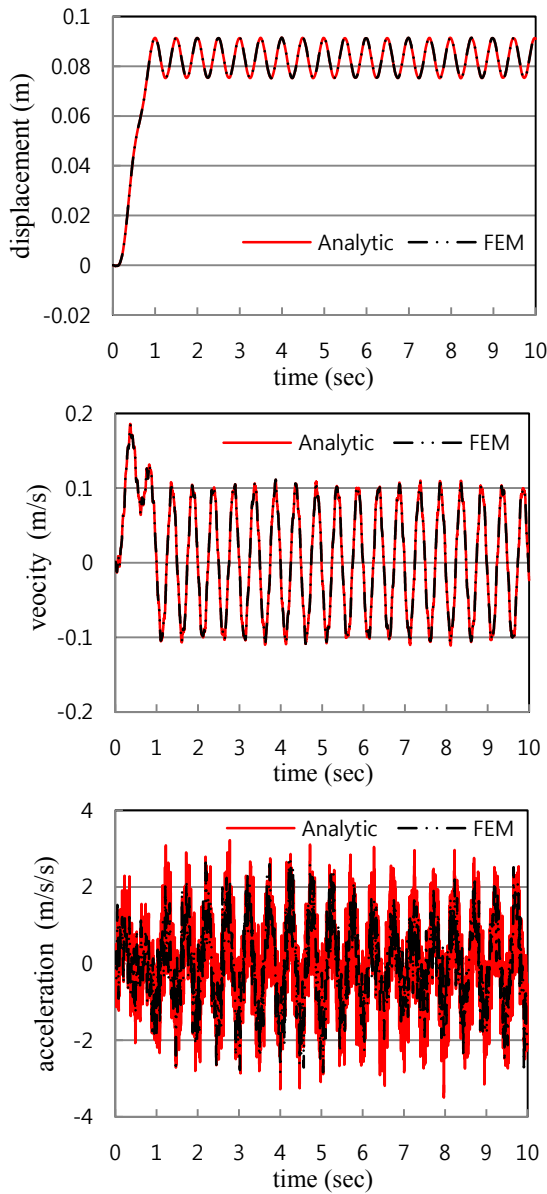


Fig. 9(b) Responses at $x = 20 \text{ m}$, where the analytic solutions are obtained by using 20 modes ($\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$, $\text{NEL} = 30$)

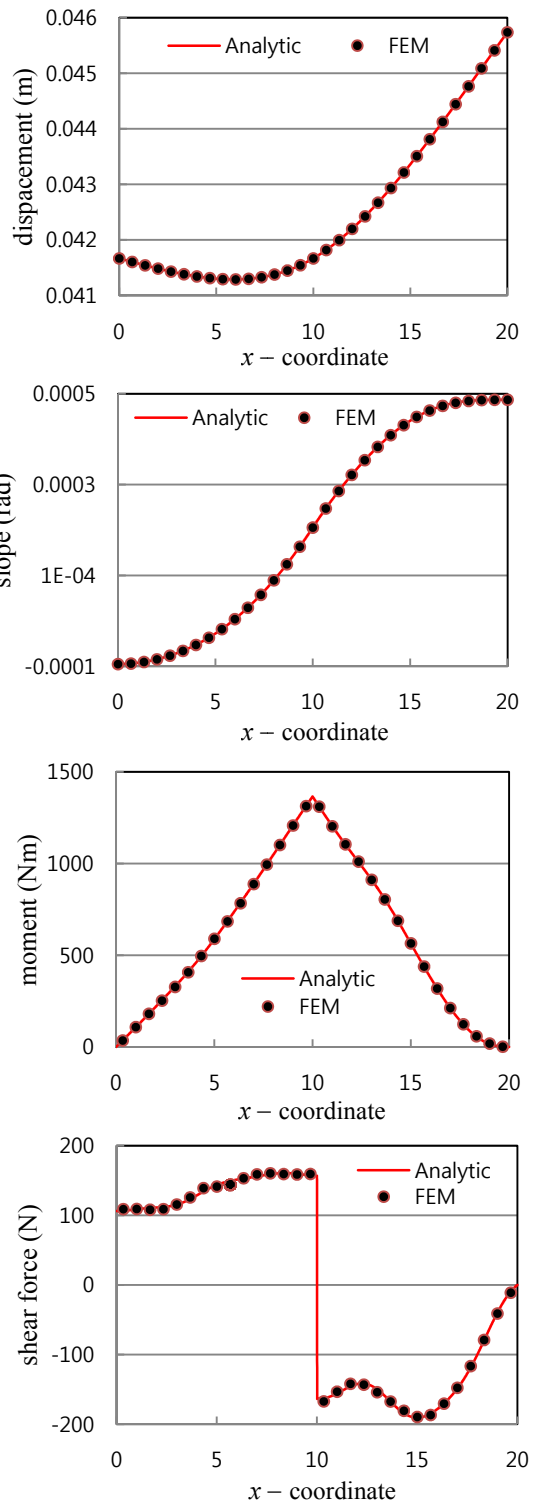


Fig. 9(c) Displacement, slope, moment and shear force at $t = 0.5 \text{ s}$, where the analytic solutions are obtained by using 20 modes ($\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$, $\text{NEL} = 30$)

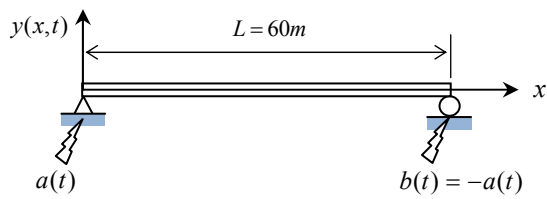


Fig. 10(a) A simply-supported beam subjected to the displacement time histories $a(t)$ and $b(t)$ at ends ($\alpha = 0.1381 \text{ s}^{-1}$ and $\beta = 0 \text{ s}$)

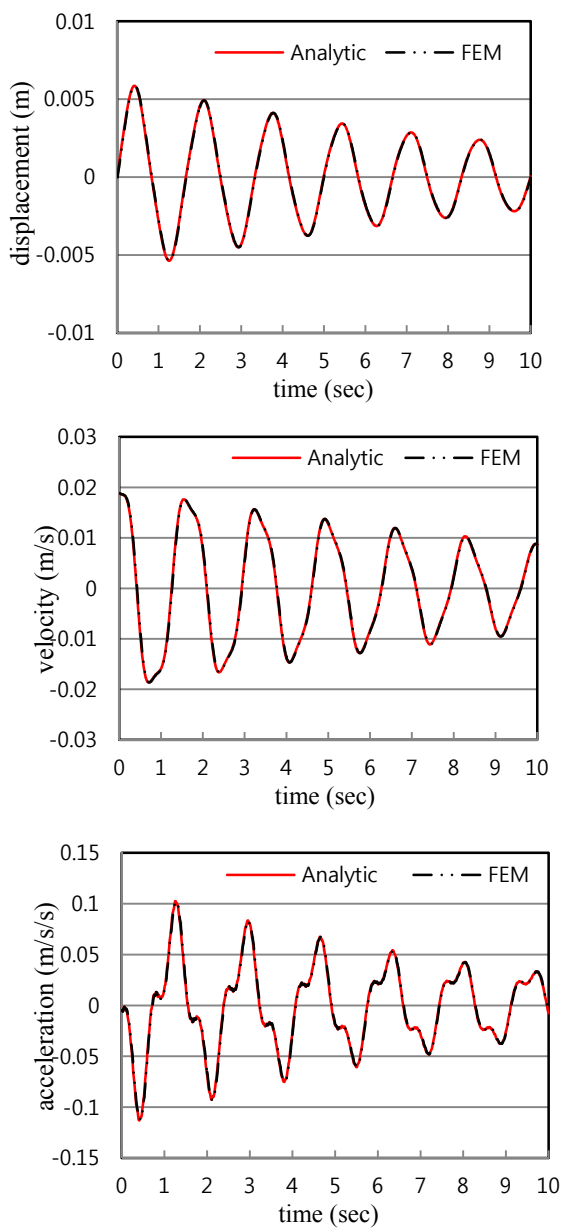


Fig. 10(b) Responses at $x = 15 \text{ m}$, where the analytic solutions are obtained by using 100 modes ($\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$, $\text{NEL} = 20$)

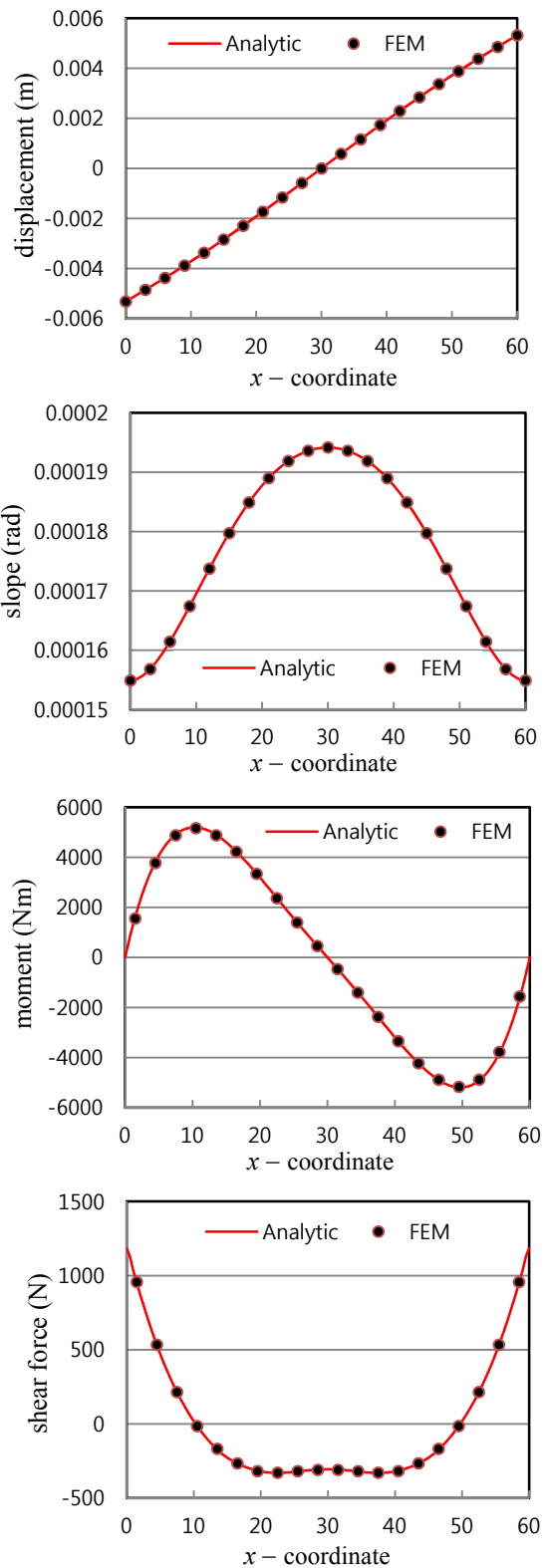


Fig. 10(c) Displacement, slope, moment and shear force at $t = 1 \text{ s}$, where the analytic solutions are obtained by using 100 modes ($\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$, $\text{NEL} = 20$)

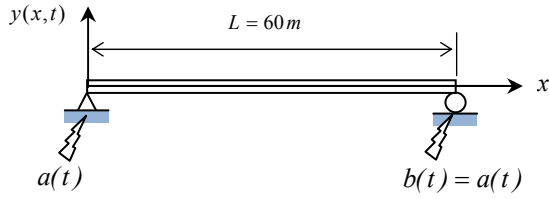


Fig. 11(a) A simply-supported beam subjected to the displacement time histories $a(t)$ and $b(t)$ at ends ($\alpha = 0.1111 \text{ s}^{-1}$ and $\beta = 0.0072 \text{ s}$)

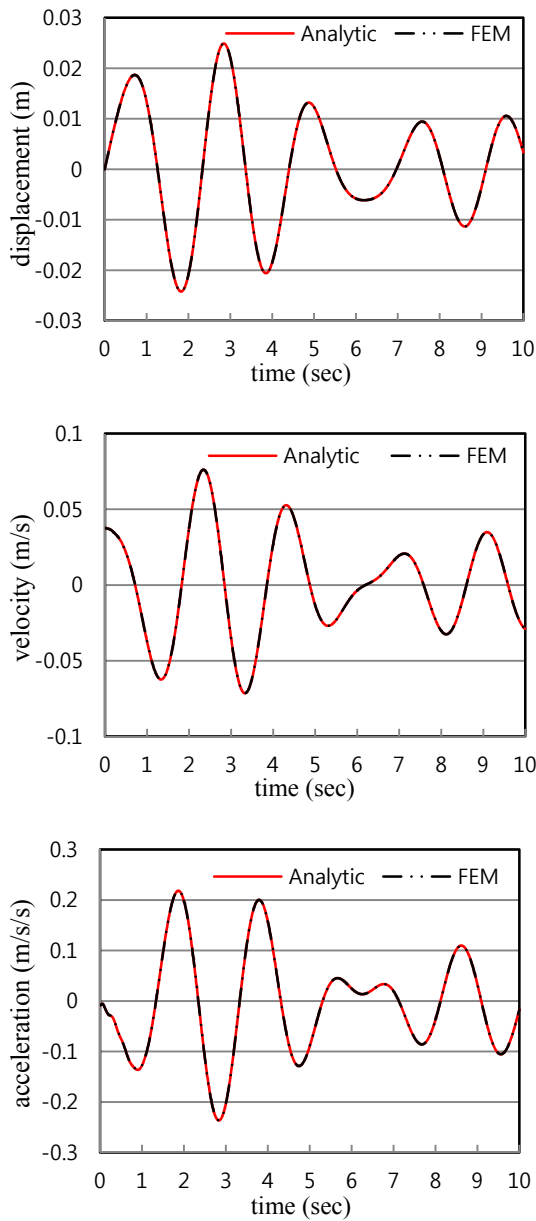


Fig. 11(b) Responses at $x = 15 \text{ m}$, where the analytic solutions are obtained by using 100 modes ($\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$, $\text{NEL} = 20$)

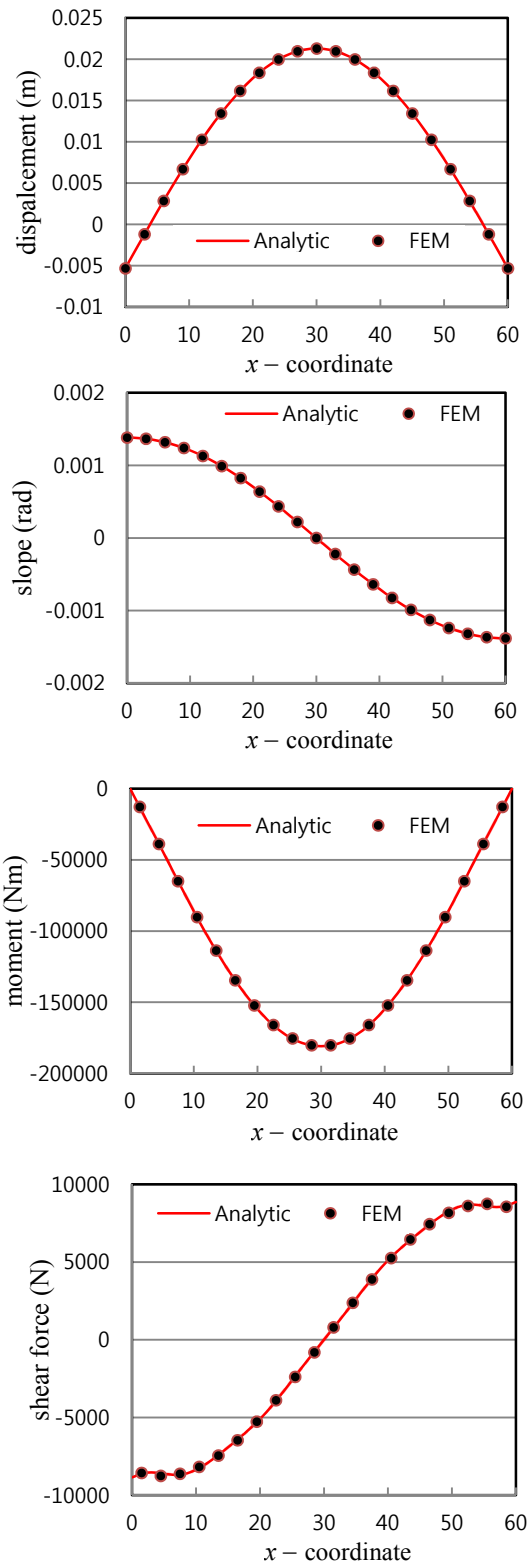


Fig. 11(c) Displacement, slope, moment and shear force at $t = 1 \text{ s}$, where the analytic solutions are obtained by using 100 modes ($\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$, $\text{NEL} = 20$)

속도, 가속도 응답)를 Fig. 10(b) 및 Fig. 11(b)에서 각각의 이론 응답과 비교하였으며; $t = 1.0s$ 일 때의 수치해(변위, 기울기, 굽힘 모멘트 및 전단력 등의 분포)를 Fig. 10(c) 및 Fig. 11(c)에서 각각의 이론해와 비교하였다. Fig. 10과 Fig. 11에서 보는 바와 같이, 동지점 요소를 사용한 유한요소해석 결과는 이론해와 잘 일치하고 있다.

4. 결론

지점의 운동을 받아 가진 되는 정정보의 동해석을 위한 동지점 유한요소를 개발하였다. 이 요소들은 전통적인 2 절점 Hermitian 보 요소로서 기존의 모델링 방법을 그대로 따르면서 한 쪽 절점이 운동하는 지지점과 일치하는 경우에 해당 요소만을 본 연구에서 제안하는 요소로 대체하여 사용할 수 있도록 수식화하였다

이 요소들은 준정적 분해법을 보의 운동방정식에 적용하여 동적변위(상대변위)에 관한 유한요소 운동방정식으로 변환시킨 다음, 이 운동방정식에 동적변위의 경계조건을 적용한 후, 다시 절대변위에 관한 유한요소 운동방정식으로 변환시켜 동지점 유한요소 및 비지점 유한요소를 얻었다. 이렇게 얻은 요소들의 운동방정식은 절대변위를 기본으로 하는 유한요소 방정식으로서 유도과정에서 동적변위에 관한 경계조건을 적용하므로 지점의 종류에 따라 요소의 형태가 다르다.

본 연구에서는 단순지점, 고정지점, 그리고 자유지점에 따른 동지점 요소를 개발하여 제시하였으며, 이 요소들을 지점운동을 받는 정정보에 적용하여 얻은 결과를 이론해와 비교함으로써 그 정확도를 확인하였으며 동시에 사용법을 예시하였다.

후 기

본 연구는 한국원자력안전기술원의 지원으로 연구를 수행함.

참고문헌

(1) Mindlin, R. D. and Goodman, L. E., 1950, "Beam

Vibrations with Time-Dependent Boundary Conditions," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, pp. 377~380.

(2) Clough, R. W. and Penzien, J., 1993, *Dynamics of Structures*, Second Edition, McGraw-Hill, Singapore.

(3) Chopra, A. K., 1995, *Dynamics of Structures: Theory and Application to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, USA.

(4) Abdel-Ghaffar, A. M. and Rood, J. D., 1982, "Simplified Earthquake Analysis of Suspension Bridge Towers," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol.108, EM2, pp. 291~302.

(5) Yau, J. D., 2009, "Dynamic response analysis of Suspended Beams Subjected to Moving Vehicles and Multiple Support Excitations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 325, pp. 907~922.

(7) Wang, A.-P., Fung, R.-F. and Huang, S.-C., 2001, "Dynamic Analysis of Tall Building with a Tuned-Mass-Damper Device Subjected to Earthquake Excitations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 244, No. 1, pp. 123~136.

(8) Meirovitch, L., 1975, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York, pp. 190~231.

(9) Chen, J. T., Hong, H.-K., Yeh, C. S. and Chyuan, S. W., 1996, "Integral Representations and Regularizations for a Divergent Series Solution of a Beam Subjected to Support Motions," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, pp. 909~925.

(10) Logan, D. L., 1992, *A First Course in the Finite Element Method*, 2nd Edition, PWS-Kent, USA.

(11) Bathe, K.-J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, USA, pp.768~837.

(12) Leger, P., Ide, I. M. and Paultre, P., 1990, "Multiple-Support Seismic Analysis of Large Structures," *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 6, pp. 1153~1158.

(13) Kim, Y.-W. and Jhung, M. J., 2011, "Mathematical Analysis Using Two Modeling Techniques for Dynamic Responses of a Structure Subjected to a Ground Acceleration Time History," *Nuclear Engineering and Technology*, Vol. 43, No. 4, pp. 361~374.