

반응면 기법을 이용한 복합재 평판의 신뢰도 및 민감도해석[§]

이석제^{*†} · 장문호^{**} · 김재기^{**} · 문정원^{**} · 김인걸^{*}

* 충남대학교 항공우주공학과, ** LIG넥스원

Reliability and Sensitivity Analysis for Laminated Composite Plate Using Response Surface Method

Seokje Lee^{*†}, Moon-Ho Jang^{**}, Jae-Ki Kim^{**}, Jung-Won Moon^{**} and In-Gul Kim^{*}

* Department of Aerospace Engineering, Chungnam National University.

** Mechanical Engineering R&D Lab, LIG Nex1,

(Received July 16, 2012 ; Revised November 20, 2012 ; Accepted December 6, 2012)

Key Words: Reliability Analysis(신뢰성 해석), Most Probable Failure Point(최다확률과괴점), Laminated Composite Plate(복합재 적층판), Response Surface Method(반응면 기법), Probabilistic Sensitivity Analysis(확률론적 민감도 해석)

초록: 섬유강화 복합재료는 무게 절감을 위해 다양한 공학 분야에 널리 사용되고 있다. 각 층의 재료 물성치는 일반적인 금속재료에 비해 더 불확실한 것으로 알려져 있으며 하중 방향에 따라 매우 민감하게 반응한다. 그러므로, 복합재 적층판의 설계에서 불확실성을 고려하는 것은 매우 중요하다. 본 논문에서는 COMSOL과 MATLAB을 이용하여 끝단 변위가 설계 요구조건으로 정의된 경우, 재료 물성치를 확률변수로 하는 복합재 적층판에 대한 신뢰성 해석을 수행하였다. 또한 근사기법의 효율성과 정확성을 확인하고 확률론적 민감도 해석을 수행하였다. 결과적으로 수중 비행체의 비행자세 안정장치에 대한 개선된 설계 방법의 적용가능성을 제시할 수 있었다.

Abstract: Advanced fiber-reinforced laminated composites are widely used in various fields of engineering to reduce weight. The material property of each ply is well known; specifically, it is known that ply is less reliable than metallic materials and very sensitive to the loading direction. Therefore, it is important to consider this uncertainty in the design of laminated composites. In this study, reliability analysis is conducted using COMSOL and MATLAB interactions for a laminated composite plate for the case in which the tip deflection is the design requirement and the material property is a random variable. Furthermore, the efficiency and accuracy of the approximation method is identified, and a probabilistic sensitivity analysis is conducted. As a result, we can prove the applicability of the advanced design method for the stabilizer of an underwater vehicle.

1. 서론

구조물의 정확한 거동을 해석하는데 있어서 일반적으로 이용해 온 방법은 해석에 고려되는 변수들이 일정한 불변의 값을 가지고 있다는 가정에 입각한 확정론적 접근방법(deterministic approach)이었다.

그러나 복합재의 경우는 제작 과정의 특성상 경화시의 온도 및 습도, 섬유내로의 기지 함침률, 기포 등 복합재내의 불연속 공간의 존재 유무, 그리고 특히 각 층(ply)의 두께에 따라 복합재의 재료 물성치는 동일한 섬유재와 기지재를 사용하더라도 큰 변동성을 갖게 된다.

탄소섬유강화 복합재료는 항공우주 구조물에 본격적으로 쓰이기 시작하여 현재에도 가장 많이 이용되고 있는 대표적인 복합재료이다. 비강도 및 비강성도가 좋고 피로 특성이 우수하여 군용 항공기의 구조용 재료를 비롯하여, 열변형 안정

§ 이 논문은 2011년도 대한기계학회 추계학술대회(2011.11.2-4., EXCO) 발표논문임.

† Corresponding Author, seokjelee@cnu.ac.kr

© 2013 The Korean Society of Mechanical Engineers

성의 특성이 필요한 우주구조물의 주요 재료로 응용되고 있으며, 현재에는 신형 민간항공기와 지상, 수중무기에도 본격적으로 사용되고 있다.⁽¹⁾ 따라서 다양한 구조 설계요구조건에 대한 합리적인 검토를 위해서는 이들 물성치의 변동량을 정량적으로 고려할 수 있는 신뢰성 해석에 기반한 확률론적 접근(probabilistic approach)이 요구된다고 할 수 있다.⁽²⁾

더 나아가 확률변수가 많은 대형 구조물의 경우, 신뢰성 해석 과정에서 많은 해석 비용을 필요로 하게 되므로 정확성을 보장하면서 효율을 높일 수 있는 반응면 기법 등을 이용한 근사 기법에 대한 연구가 동시에 수반되어야 한다. 반응면 기법의 도입은 해석시 효율을 높이는 데 도움이 된다는 것을 선행 연구를 통해 검증된 바 있다.⁽³⁾

본 논문에서는 복합재 평판에 대하여 graphite/epoxy 재료 물성을 적용하고, 단일층(lamina) 물성치가 분산형태를 가질 때의 신뢰도 및 민감도 해석을 수행하였다. 기존의 연구는 이론적 접근, 또는 단순한 비선형 함수에 대한 검증이 주를 이루었으며, 본 논문에서는 실제로 제작, 상용화 될 비행자세 안정장치 구조에 대해 적용하여 향후 확률론적 접근방법의 적용가능성을 고찰하였다. 설계 요구조건 및 파손 기준은 최대 관성력을 적용시켰을 경우의 끝단의 변위로 가정하였고 몬테카를로 시뮬레이션(MCS)과 개선된 1계 2차 모멘트법(AFOSM) 같은 구조 신뢰성 방법을 통하여 해석 하였다. 계산에 필요한 과도한 해석시간을 줄이기 위해 반응면 기법(RSM)의 근사식 형태를 선형과 비선형으로 정의한 경우 각각의 정확도를 비교하였고, AFOSM을 이용한 해석 과정에서 도출되는 결과를 응용하여 효과적으로 민감도를 계산할 수 있는 확률론적 민감도 해석(PSA)을 수행하여 향후 설계자에게 유용한 정량적인 정보를 제공하고자 하였다.

2. 이론적 배경

Fig. 1과 같이 구조물의 저항요소(R)와 외부하중에 의한 구조물의 응답(L)의 적절한 안전계수(\bar{R}/\bar{L})를 적용한 경우라도 하중이나 재료의 강성, 강도에 대한 분포특성이 반영될 경우 R 과 L 이 하나의 값이 아닌 분포를 갖게 된다. 이때 접

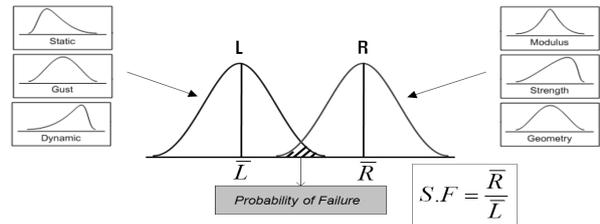


Fig. 1 Probability of failure due to uncertainty

친 영역에서 응답이 저항요소를 초과할 수 있으므로 구조물의 파괴가 일어날 수 있다. 이 경우 파괴확률을 계산하기 위하여 MCS와 AFOSM이 주로 사용된다.

2.1 몬테카를로 시뮬레이션(MCS)

주어진 구조물의 파괴를 정의하는 한계상태식이 $g(x)$ 로 주어지고 확률변수들의 결합 확률밀도 함수가 $f_X(x)$ 와 같을 때, 파괴확률 P_f 을 식 (1)과 같이 다중적분형태로 정의할 수 있다.

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} f_X(x) dx \quad (1)$$

MCS는 파괴확률을 근사적으로 추정하는 가장 보편적인 방법 중 하나로써 확률변수의 분포특성이 반영된 난수(random number)를 추출하여 충분한 수의 확률변수의 표본집단(set)을 생성한 다음, 생성된 각 확률변수의 값을 차례로 한계상태식에 대입하여 그 값이 0보다 큰지 작은지, 즉 구조물이 안전한지 파괴되는지를 판단한다. 그 결과로 모두 N 개의 확률변수 집단을 추출하였을 때, 한계상태식이 0보다 작은 경우가 N_f 번 관측되었다면 파괴확률 P_f 는 식 (2)와 같이 근사적으로 추정할 수 있다. 계산된 파괴확률이 적절한 신뢰도를 갖기 위해서는 예상되는 파괴확률 역수의 10배 내지는 100배 이상의 값을 전체 추출횟수의 값으로 선정하는 것이 일반적이다.⁽⁴⁾

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (2)$$

2.2 개선된 1계 2차 모멘트법(AFOSM)

정규분포 확률변수 x_i 의 평균과 표준편차가 각각 μ_i, σ_i 일 때, 한계상태식 g 는 식 (3)과 같이 x_i 의 선형함수로 정의된다. 여기서 a_0 및 a_i 는 구

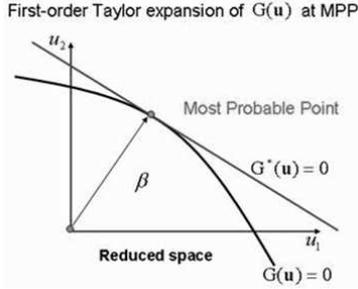


Fig. 2 Geometric concept of β

조 시스템 응답을 모사하는 상수이며, 식 (4)와 (5)에서도 동일하게 사용된다.

$$g = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n \quad (3)$$

이때 한계상태식 g 의 값을 새로운 확률변수 G 라고 하면, 확률변수 G 의 확률분포는 정규분포가 되며 G 의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu_G = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i\mu_i \quad (4)$$

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Cov[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (5)$$

여기서 X 는 각 확률변수들의 집합을 의미한다. 따라서 한계상태식 g 에 대한 파괴확률은 새롭게 정의된 정규분포 확률변수 G 가 0보다 작은 확률이므로 식 (6)과 같이 쓸 수 있다.

$$P(g \leq 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_g}{\sigma_g}\right) = \Phi(-\beta) \quad (6)$$

이때 β 를 신뢰도 지수(reliability index)라고 한다. 신뢰도 지수는 Fig. 2와 같이 표준정규분포 확률변수 공간에서 원점으로부터 한계상태식까지의 최단 거리라는 기하학적 의미를 갖는다.^(4,5) 이 방법은 MCS에 비해 해석시간을 단축시킬 수 있지만, 한계상태식의 비선형성이 큰 경우 오차가 많은 단점이 있다.

2.3 반응면 기법(RSM)

RSM은 관심 있는 응답이 여러 설계 변수들에 의해 영향을 받을 때 설계 변수에 대하여 반응면을 근사적으로 모델링하고 해석하기 위한 유용한 수학적, 통계적 기술들의 집합을 말한다. 반응면 기법은 크게 근사 반응 함수를 생성하기 위한 최소자승법(least square method)과 변수 선택법(variable selection method), 근사화된 함수를 평가하기 위한 분산분석(ANOVA : ANalysis Of VAriance), 그리고 반응치를

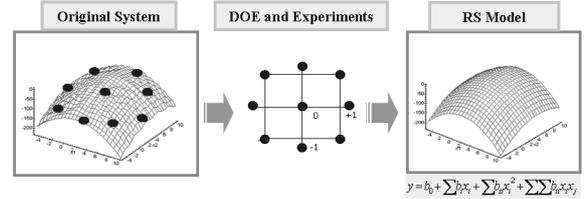


Fig. 3 Response surface method

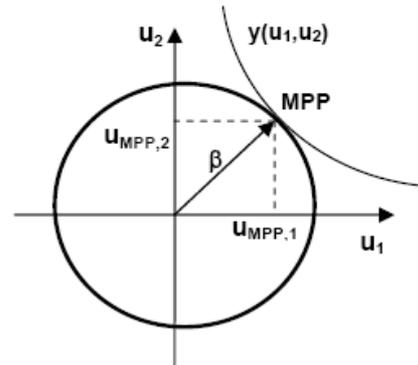


Fig. 4 Illustration of the MPP-based sensitivity measures

구하기 위해 설계 공간에 실험점들을 선택하는 실험 계획법(DOE : Design Of Experiment)으로 나뉘어진다.^(4,6)

본 논문에서는 Fig. 3과 같이 D-optimal 계획법을 이용하여 표본점을 선정하고, 이 표본점에 대한 적은 횟수의 구조해석을 수행하였다. 이 결과를 바탕으로 구성된 반응면 근사 모델에 대하여 MCS와 AFOSM을 이용하여 파괴확률을 계산하였다.

2.4 민감도 계산

PSA(Probabilistic Sensitivity Analysis) 기법 중 MPP-based sensitivity factor를 이용한 방법은 Fig. 4와 같이 표준정규분포 공간에서 정의된 MPP 좌표에 의해 결정된다. 원점에서 MPP까지의 최단거리를 나타내는 신뢰도 지수를 각 확률변수의 차원으로 투영하면 민감도 계수를 구할 수 있다. 모든 확률변수가 표준정규분포인 경우 식 (7)과 같이 단순화하여 표현할 수 있으며, 여기서 u_i^{MPP} 는 각 확률변수의 MPP 좌표를 의미한다. 각 확률변수의 S 의 합은 1이어야 한다.⁽⁷⁾

$$S_i = \left| \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\phi(u_i)}{h(x_i)} \right)^2}{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\phi(u_j)}{h(x_j)} \right)^2} \right|_{MPP} = \frac{(u_i^{MPP})^2}{\beta^2} \quad (7)$$

3. 수치해석 예제 및 결과

본 논문에서는 상용 유한요소해석 프로그램인 COMSOL⁽⁸⁾과 MATLAB을 사용하였으며, 아래식과 같이 두 형태의 반응면 근사식을 사용하였다.

$$\text{type I: } \hat{F} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i \quad (8)$$

$$\text{type II: } \hat{F} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 \quad (9)$$

여기서 b 는 근사식의 계수를 나타내며 x 는 확률변수, n 은 확률변수의 개수를 의미한다.

RSM의 성능을 검증하기 위해 신뢰성 해석 기법(MCS, AFOSM)을 이용한 파괴확률 및 신뢰도 지수를 계산하여 분석하였다. 또한 가장 직관적이면서 의미있는 근사모델의 정확도를 평가할 수 있는 RMSE(Root Mean Square Error)의 계산결과, 두 가지 형태 각각, 4.11e-4mm, 3.98e-4mm로 작은 오차를 갖는 것을 확인하였다.

3.1 수치해석 예제

수치 해석에 사용된 날개형상은 Fig. 5와 같이 익근에 힌지구조로 체결되는 복합재 평판이다. 사용된 재료는 graphite/epoxy USN-150B이며 각 층의 두께는 0.125mm이다. 구속조건은 익근(wing root)의 힌지부분을 완전 고정(fixed)으로 하여 외팔보(cantilever beam)와 같이 구현하였다. 발사환경을 고려하여 복합재 날개의 y방향으로 60g의 관성하중을 적용하였고, 유한요소 해석시 특별 직교 이방성 적층판으로 가정하여 모델링하였다.^(9,10) 임의의 파손기준을 적용하여, 최대 변위가 0.008mm보다 클 경우 파괴가 일어난다고 가정하였으므로 한계상태식은 식 (10)과 같다. 이와 같이 최대 변위를 선정한 이유는 MCS를 이용한 파괴확률 계산시 파괴확률이 매우 작을 경우 적절한 신뢰도를 갖기 위한 추출횟수가 과도하게 많아지므로 5% 내외의 파괴확률을 갖기 위함이다.

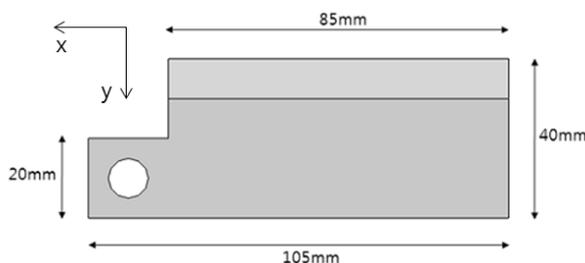


Fig. 5 Stabilizer configuration

여기서 변위는 COMSOL을 이용한 유한요소해석과 반응면 근사식, 두 가지 결과를 이용한다.

$$g = 0.008\text{mm} - \delta_{\max}(E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}) \quad (10)$$

각 확률변수의 평균 및 표준편차는 Table 1과 같이 선정하였다.⁽¹¹⁾ 평균은 물성실험을 통해 알아낸 결과이고, 표준편차와 평균의 비인 COV는 참고문헌의 결과를 이용하였다.

Fig. 6은 복합재 적층판의 변위를 계산하기 위해 COMSOL에서 모델링 한 유한요소모델의 형상을 나타낸다. 4면체(tetrahedral)요소를 사용하였고 총 개수는 4,999개이다. 관성하중에 의한 선형 탄성해석을 수행하였으며, 최대 변위는 두께가 얇은 앞전의 가장 끝 모서리(-x, -y방향)에서 발생하였다.

3.2 수치해석 결과

MCS을 이용하여 계산한 결과, 파괴확률 및 한계상태식의 분포를 알 수 있었다. 이 방법은 MPP에 국한되지 않고 확률변수의 분포 영역 전체에 대한 특성을 반영하므로 반응면 근사 모델의 정확도를 판단할 수 있다. 1,000회의 시뮬레이션 결과를 Table 2에 정리하였으며, 95% 신뢰도를 갖는 파괴확률 범

Table 1 Properties of random variables

	Mean	COV	Distribution
E_1 (GPa)	131.0	0.046	Normal
E_2 (GPa)	8.2	0.040	
ν_{12}	0.28	0.060	
G_{12} (GPa)	4.5	0.031	
t_{ply} (mm)	0.125		
Stacking sequence	[0/+45/-45/90]		

Table 2 Result using MCS

	P_f	Computation time
	MCS	
Full model	6.60±1.57%	111min.
RSM-type I	6.10±1.51%	9min.
RSM-type II	5.00±1.38%	9min.

위도 함께 정리하였다. 시뮬레이션 횟수는 2.1절에 제시한 추출횟수 선정방법을 기반으로, 5% 내외의 파괴확률을 목표로 했으므로 200~2,000번 사이의 값인 1,000회를 선정하였다.

상대적으로 정확한 full model의 결과와 비교해 볼 때, RSM의 효율 및 정확도가 우수한 것을 확인 하였으며, 두 근사식 형태 중에서 type I의 정확도가 더 좋은 것을 알 수 있다. 여기서 full model이란 반응면 근사식으로 모사하고자 한 원래의 적층판의 변형 형상, 즉 COMSOL을 이용한 해석결과를 의미한다. RSM을 위한 실험계획법은 D-optimal 방법을 사용하였다. 이 방법은 확률변수의 평균과 이를 중심으로 표준편차만큼 떨어진 거리의 값을 표본점으로 사용하며, 본 논문에서는 4개의 확률변수를 선정하였기 때문에 $81(3^4)$ 개의 표본점에 대해 구조해석을 수행하고 근사모형을 생성하였다. Fig. 7은 한계상태식의 분포 형태를 나타내고 있다. 앞서 최대 변위를 파괴 판단의 기준으로 정의 했으므로 전체 면적에 대해 0.008의 기준선을 넘는 상대 면적이 파괴확률이 된다. Fig. 8은 1,000회의 MCS 시뮬레이션이 진행되는 동안 파괴확률이 변화를 나타내며, 결과의 수렴 정도를 파악할 수 있다. 두 근사식 모두 1% 이내의 오차 범위에서 수렴이 잘 된 것을 확인할 수 있었다. 여기서 MCS-full model이란 MCS 시뮬레이션 동안 COMSOL을 이용한 유한요소해석 결과를 이용하여 얻은 파괴확률(6.60%)을 의미한다.

AFOSM을 이용하여 신뢰성 해석을 수행하면 파괴확률, MPP 좌표, 신뢰도 지수가 각각 계산된다. 이는 MPP에서의 정확도 향상을 명확히 판단할 수 있는 근거가 된다. 결과는 Table 3에 정리하였다.

앞서 MCS의 결과와 같이 파괴확률 및 신뢰도 지수에서 충분한 정확도를 나타내는 것을 알 수

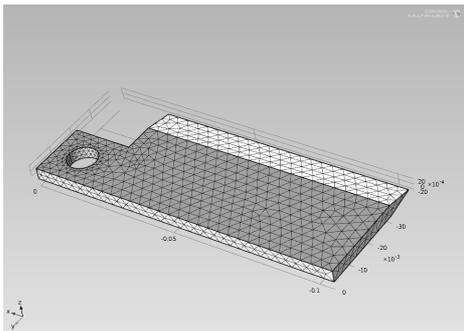
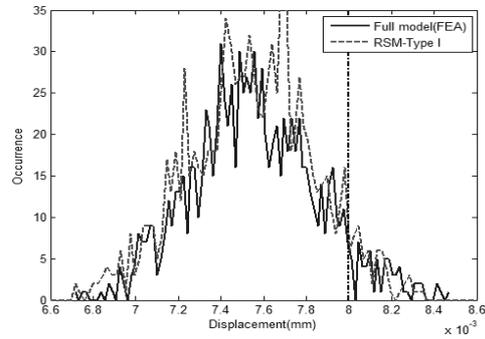
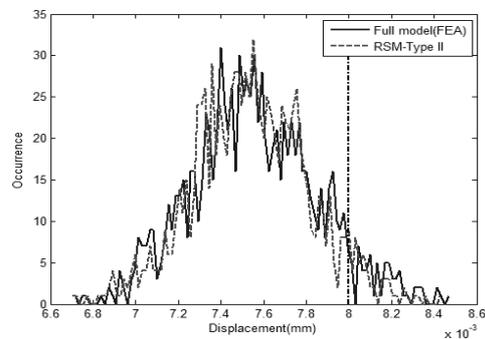


Fig. 6 Finite element model

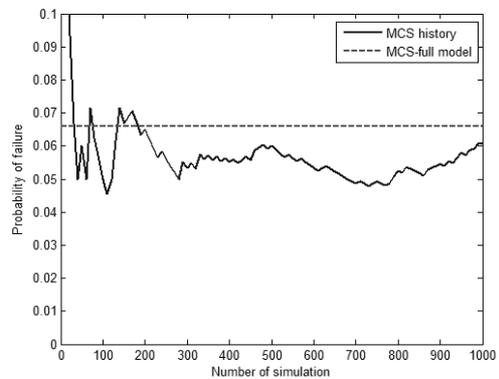


(a) RSM-type I

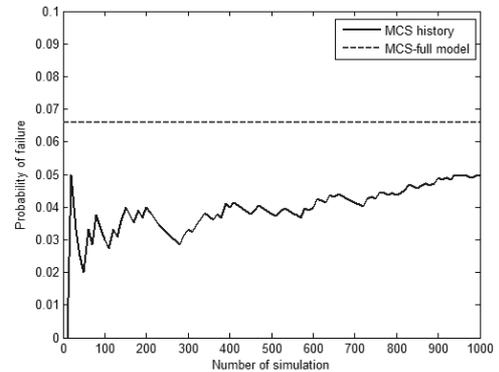


(b) RSM-type II

Fig. 7 Distribution form of limit state equation



(a) RSM-type I



(b) RSM-type II

Fig. 8 History of probability of failure

Table 3 Result using AFOSM

	P_f	β
	AFOSM	
Full model	7.25%	1.46
RSM-type I	6.70%	1.50
RSM-type II	4.26%	1.72

Table 4 Sensitivity

	S_i
E_1	9.63e-1
E_2	1.42e-2
ν_{12}	5.13e-3
G_{12}	1.74e-2

있었다. 또한 신뢰도 지수의 근사정도로 보아 근사식을 이용한 MPP는 전역 최적점임을 알 수 있다.

PSA 방법을 이용하여 각 확률변수의 민감도를 계산하여 Table 4에 정리하였다. 예상한 바와 같이 E_1 이 해석결과에 가장 크게 영향을 미치는 것을 알 수 있었다.

4. 결론

본 논문에서는 날개형 복합재 평판에 대한 신뢰성 해석을 수행하였다. MCS를 이용한 결과 두 가지 근사식 형태 중 type I의 파괴확률이 우수한 결과를 나타내었다. AFOSM과 같은 한계상태 근사기법을 이용한 파괴확률 계산시에는 신뢰도 지수를 정확히 알아내는 것이 중요한데, 마찬가지로 type I의 결과가 더 정확한 것을 알 수 있었다. 또한 PSA 방법을 이용하여 각 확률변수의 민감도를 효율적으로 계산할 수 있었다. 결과적으로 수중운동체의 비행자세 안정장치 개발에 있어 복합재료의 적용 가능성을 확인하고, 기존에 제안된 신뢰성 해석 기법 및 근사기법에 대해 효율과 정확성을 비교해 봄으로써 불확실성을 고려한 개선된 설계 결과 도출을 위한 기본 연구를 수행하였다.

향후 통계적이고 공학적으로 계산된 설계 요구조건 및 구조적으로 가장 취약한 구조물을 선정

하여 본 논문에서 정립, 검증한 신뢰성 해석 과정에 적용한다면, 불확실성에 의한 구조 응답을 정량적으로 파악할 수 있을 것이다. 즉, 보수적인 방법에서 벗어나 확률론적으로 명확한 근거를 바탕으로 개선된 설계안을 제시할 수 있다.

참고문헌

- (1) Baker, A., Dutton, S. and Kelly D., 2004, *Composite Materials for Aircraft Structures*, 2nd ed., AIAA Education Series.
- (2) Long, M. W. and Narciso, J. D., 1992, *Probabilistic Design Methodology for Composite Aircraft Structures*, DOT/FAA/AR-99/2.
- (3) Lee, S. J., Kim, I. G. and Jang, M. H., 2007, "Reliability Analysis for Composite Plate with the Various Design Requirements," *Journal of the Korean Society for Composite Materials*, Vol. 20, No. 4, pp. 25~30.
- (4) Yang, Y. S., 1999, *Structural Reliability Analysis*, Publishing Devison of Seoul National University, pp. 67~75.
- (5) Haldrar, A. and Mahadevan, S., 2000, *Reliability Assessment using Stochastic Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons Inc.
- (6) Myers, R. H. and Montgomery, D. C., 2002, *Response Surface Methodology*, John Wiley & Sons Inc.
- (7) Liu, H. and Chen, W., 2004, "Probabilistic Sensitivity Analysis Methods for Design under Uncertainty," *AIAA 2004-4589*, pp. 5~6.
- (8) COMSOL, 2011, *COMSOL Multiphysics Release Notes*, COMSOL Inc.
- (9) Swanson, S. R., 1997, *Introduction to Design and Analysis with Advanced Composite Materials*, Prentice-Hall International Inc.
- (10) Voyiadjis, G. Z. and Kattan, P. I., 2005, *Mechanics of Composite Materials with MATLAB*, Springer, pp. 169~170.
- (11) Jeong, H. K. and Sheno, R. A., 2000, "Probabilistic Strength Analysis of Rectangular FRP Plates Using Monte Carlo Simulation," *Computers and Structures* 76, pp. 219~235.