

# 형태 다양체에서 접벡터 변화량을 측정하기 위한 접속 방식 제안

한 희 일<sup>†</sup>

## 요 약

본 논문에서는 단순 폐곡선으로 구성된 형태열을 형태 다양체의 기하학적 특성에 따라 평행한 무빙 프레임으로 표현하는 기법을 개발한다. 형태 다양체는 기본적으로 유클리드 공간이 아니어서 형태열(곡선)에서 구한 접벡터의 변화율 등을 측정하기가 매우 어렵다. 레비 치비타 접속(Levi-Civita connection) 이론에 의하면 무빙 프레임을 주어진 형태열에 따라 평행 이동할 수 있으면 공변미분을 통하여 접벡터장의 변화율을 측정하는 것이 가능하다. 따라서 본 논문에서는 주 프레임 다발(principal frame bundle)의 개념을 도입하여 비유클리드 공간의 형태열의 접벡터를 유클리드 공간으로 평행 이동시키는 툴을 구현하고 실험을 통하여 이의 특성을 확인하고 분석한다.

## Proposing a Connection Method for Measuring Differentiation of Tangent Vectors at Shape Manifold

Hee-il Hahn<sup>†</sup>

## ABSTRACT

In this paper an algorithm that represents shape sequences with moving frames parallel along the sequences are developed. According to Levi-Civita connection, it is not easy to measure the variation of the vector fields on non-Euclidean spaces without tools to parallel transport them. Thus, parallel transport of the vector fields along the shape sequences is implemented using the theories of principal frame bundle and analyzed via extensive simulation.

**Key words:** Shape Sequence(형태열), Manifold(다양체), Parallel Transport(평행이동), Connection(접속), Principal Frame Bundle(주 프레임 다발)

## 1. 서 론

사람의 활동이나 제스처 등을 인식하는 문제는 감시 카메라에서 신원을 확인하거나 수신호를 통한 로봇 제어, 비디오 검색 등 다양한 분야에서 많은 관심을 받고 있어 널리 연구되고 있다. 현재까지 발표된 대부분의 제스처 인식 방법은 제스처를, 각 단위

시간 마다 추출한 특징점들을 하나의 열로 표현하여 모델링하고 있다. 여기서 특징점은 응용 분야, 이미지 화질, 계산량의 제한 등에 따라 optical flow, 모서리 점 등을 다양하게 선택할 수 있고, 경우에 따라서는 랜드마크를 지정해서 처리할 수도 있다. 하지만 이러한 방식은 검출하고 추적하여야 하는 번거로움이 있고 제스처의 움직임이 급격히 변하거나 일부의

※ 교신저자(Corresponding Author): 한희일, 주소: 경기도 용인시 모현면 왕산리 한국외국어대학교 정보통신공학과(449-791), 전화: 031) 330-4356, FAX: 031) 330-4256, E-mail: hihahn@hufs.ac.kr

접수일: 2012년 11월 21일, 수정일: 2012년 12월 25일

완료일: 2013년 1월 9일

<sup>†</sup> 정회원, 한국외국어대학교 정보통신공학과

※ 본 연구는 2012학년도 한국외국어대학교 학술연구비 지원으로 수행되었음.

화면이 가려지는 형상이 발생하면 성능이 크게 저하되는 어려움이 발생할 수 있다. 관심 있는 움직임 정보를 추출하고 해석하기 위해서 가장 많이 이용되는 특징 정보는 각 이미지에서 추출한 윤곽선(형태)을 열로 나타낸 형태열(shape sequence)이다. 이미지 이해, 컴퓨터 비전, 의료영상 처리 등의 분야에서는 관심 물체의 검출, 분석 및 추적 등을 효율적으로 처리하기 위하여 형태 분석에 대한 연구가 지속적으로 진행되고 있다. 이미지 상의 물체를 인식하거나 그 움직임 등을 분석하기 위해서는 처리해야 할 정보를 줄이기 위하여 특징벡터를 구하게 되는데, 그 중에서 물체의 윤곽선 정보를 이용하여 형태를 추출하는 방법은 적은 계산량으로 효과적이고 효율적인 구현이 가능하므로 가장 보편적으로 활용되고 있다. 윤곽선 정보는 물체의 정체를 파악하거나 움직임 등을 분석하는데 있어서 중요한 정보를 매우 효율적으로 제공한다.

이러한 형태 정보는 대부분 벡터로 표현하여 유클리드 벡터 공간에서 제스처를 모델링하거나 인식한다. 그런데 이 벡터는 일반적으로 유클리드 공간이 아닌, 휘어진 비유클리드 공간에 존재하기 때문에 성능이 저하되는 문제를 피할 수 없다. 이를 해결하기 위하여, 많은 실험 데이터로 형태 다양체(shape manifold)를 구하는 연구가 활발히 진행되고 있다. Kendall[1]이 랜드마크 기반으로 형태 공간을 구성한 이래 다양한 요구에 맞게 형태 공간들이 정의되고 있다. 하지만, 랜드마크 기반으로 형태를 나타내는 것은 랜드마크를 이용할 수 없다는가 잘 정의되어 있지 않으면 여러가지로 많은 문제가 발생할 수 있다. 예를 들어 ASM(active shape model)을 이용하여 얼굴형태를 검출하고자 할 때 대부분은 얼굴의 정면 모습에 대한 랜드마크만 정의한다. 이럴 경우에 얼굴의 옆 모습에 대한 이미지가 주어지면 이를 제대로 검출할 수 없는 문제가 발생한다[2,3]. Klassen, et al.[4]은 물체의 윤곽선을 하나의 연속 단순 폐곡선으로 표현하는 형태모델을 발표하였는데, 이 모델은 랜드마크를 지정해야 하는 어려움을 해결하여 관련 연구에 주로 이용되고 있다. Abdelkader, et al.[5]은 제스처 인식을 위하여 Klassen의 형태모델을 이용하여 형태를 표현하고, 형태 다양체에서 곡률의 영향을 줄이려는 목적으로 측지거리(geodesic distance)를 이용하여 DTW(dynamic time warping)와 HMM(hid-

den Markov model)을 구동시키는 방법을 제안하였다. 이와 달리, Yi, et al.[6,7]은 전처리 단계에서 공변미분(covariant derivative)을 이용하여 형태열의 접벡터(tangent vector) 변화율을 측정하고, 이를 기반으로 브라우니언 모델(Brownian stochastic model)을 이용하여 형태열을 인식하는 방법을 제안하고 있다.

본 논문에서는 Yi의 사상 알고리즘[7]을 기반으로 형태 다양체의 휘어져 있는 공간에 있는 형태열을 편평한 유클리드 공간의 점으로 사상시키기 위한 접속방법을 개발한다. 주 프레임 다발(principal frame bundle) 이론을 이용하여, 경로(path)를 따라 서로 다른 접공간(tangent space)의 기저벡터들(basis vectors)을 평행이동시킴으로써 접공간의 평행관계를 구축하는 방법을 제시한다.

본 논문에서 형태공간은 미분 다양체(differentiable manifold)라고 가정한다. 이 공간에서는 임의의 두 점을 연결하는 경로가 존재하며, 부드럽게 움직이는 점들의 속도벡터를 구할 수 있고, 각 점에서 접공간이 잘 정의된다. 다양체의 접벡터들은 기준점이 다르면 다른 공간에 있는 벡터들이므로 이들을 비교할 수 있는 방법 즉, 평행이동법(parallel transport)이 주어지지 않으면 다른 기준점에 있는 벡터들의 변화율을 측정할 수 없다. 예를 들어, 유클리드 공간에서 시작점이 서로 다른 두 벡터  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ 의 변화율을 측정하려면  $\vec{p}$ 를  $\vec{q}$ 의 위치로 평행이동한 다음 그 차를 구하면 된다. 그런데 유클리드 공간에서 평행이동은 그 경로에 전혀 영향을 받지 않으므로 단순히 그 벡터 성분의 차가 곧 벡터의 변화량이다. 하지만 휘어진 공간에서는 이동경로에 따라 벡터의 평행이동은 기본적으로 서로 다르다. 여기서 벡터장  $V$ 가 다양체 위의 곡선  $\alpha(t)$ 를 따라 평행이라 함은  $V$ 를  $\alpha(t)$ 에 따라 방향 미분할 때 그 크기와 방향이 0임을 의미한다. 이를 수식으로 나타내면  $\nabla_{c(t)}V=0$ 를 만족하여야 한다. 다시 말하면, 유클리드 공간에서는 두 벡터의 시작점을 일치시키는 과정이 곧 평행이동이고 그 두 벡터의 차가 변화율이지만, 휘어진 공간에서는 위와 같은 방법으로 평행이동한 다음 그 차를 구해 주어야 한다. 주어진 경로를 따라 벡터들을 평행이동할 수 있으면, 이를 이용하여 임의의 벡터장  $V$ 의 변화율  $\nabla V$ 를 측정할 수 있다. 벡터장의 변화율을 측정하는 방법을 접속(connection)이라고 하는데,

공변미분을 통하여 계산할 수 있다. 접속을 통하여 다양체의 경로를 따라 서로 다른 접공간에 있는 접벡터들의 평행을 정의할 수 있다[8,9].

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 Klassen의 형태 모델[2]에 따른 형태 다양체의 구조를 리뷰한다. 3장에서는 주 프레임 다발 이론을 간략히 소개하고 이에 따라 벡터장을 주어진 경로에 따라 평행이동하는 방법을 간략히 소개한다. 동영상에서 추출한 형태열에서 접벡터장을 구하고 이에 평행한 무빙 프레임으로 접벡터장을 평행이동한 결과와 그 좌표를 이용하여 합성한 실험 결과 등을 4장에 제시한다. 마지막으로 5장에서는 결론을 맺고 향후 연구 진행방향에 대하여 논의한다.

## 2. 형태 공간 모델

수학이나 공학 등에서 형태공간은 매우 중요한 관심사 중의 하나이다. Kendal[1]이 랜드마크를 이용하여 거리로 매개화된 곡선의 각 함수로 형태를 표현하는 형태공간을 제안한 이래 다양한 요구에 맞게 형태공간들이 정의되고 있다. 본 논문에서는  $S^1$ (circle)에서  $R^2$ (이차원 평면)으로의 임베딩으로 형태를 모델링하는 Klassen[4]의 형태 모델을 이용한다.

형태는  $R^2$ 에서의 단순 폐곡선으로 정의된다. 회전, 이동, 스케일 등과 같이 어파인 변환(Affine transform)으로 표현 가능한 움직임 만큼 차이가 나는 두 폐곡선은 동일한 형태를 나타내는 것으로 간주한다. 본 논문에서 곡선은  $2\pi$ 를 주기로 갖고 길이(arclength) 함수  $s$ 로 재매개화된다. 즉, 곡선을  $\alpha(s)$ 로 표현하면 모든  $s$ 에 대하여  $|\alpha'(s)|=1$ 을 만족하게 되어  $\alpha(s)$ 의 속도 벡터  $T(s)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(s) = \alpha'(s) = e^{j\theta(s)} \quad (1)$$

따라서 임의의 폐곡선은  $\theta(s)$ 로 나타낼 수 있으며,  $\theta(s)$ 에 상수를 더하면 그만큼 회전된 폐곡선을 쉽게 얻을 수 있다. 역으로  $\theta(s)$ 가 폐곡선을 나타내기 위해서는  $\int_0^{2\pi} e^{j\theta(s)} ds = 0$ 를 만족하여야 한다. 이에 따라 형태 다양체  $M$ 은 다음과 같은 레벨 함수  $\phi$ 로 정의된다.

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \left( \int_0^{2\pi} \theta ds, \int_0^{2\pi} \cos(\theta) ds, \int_0^{2\pi} \sin(\theta) ds \right) \\ M &= \phi^{-1}(\pi, 0, 0) \end{aligned} \quad (2)$$

그리고  $M$ 의 법공간(normal space)을 위한 기저벡터는  $(1, \cos(\theta), \sin(\theta))$ 으로 구성된다. 따라서 접공간  $T_\theta M$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$T_\theta M = \left\{ v \in L^2 \mid v \perp \text{span}(1, \cos(\theta), \sin(\theta)) \right\} \quad (3)$$

이를 통하여 한 개의 변수  $\theta$ 만으로 형태는 물론 형태 다양체 등을 표현할 수 있으므로 관련 연산을 크게 간략화시킬 수 있는 특징이 있다.

## 3. 주 프레임 다발 이론에 기반한 형태 벡터의 평행 이동

일반적으로 다양체의 곡률은 그 위에 존재하는 벡터장의 변화에 대한 측정을 어렵게 한다. 이를 위해서는 벡터를 평행이동할 수 있는 틀이 마련되어야 하는데, 이 문제가 해결되려면 주어진 다양체에 메트릭이 잘 정의되어 있어야 한다. 평행이동을 통하여 다양체의 서로 다른 접벡터 공간을 하나의 고정된 공간으로 연결시키는 과정을 접속이라고 부른다. 본 논문에서는 형태 다양체를 리만 다양체라고 가정하고, 주 프레임 다발 이론을 이용하여 접속을 정의하고 구현한다.

### 3.1 주 프레임 다발 이론

$n$ 차원 다양체  $M$  위의 점  $p$ 에서의 접공간  $M_p$ 에 대한 프레임(frame)  $u$ 는  $M_p$ 의 기저벡터  $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 를 말한다.  $F(M)$ 은  $M_p$ 위의 모든  $u$ 의 집합을 나타내는데 프레임 다발(bundle of frames)이라고 부른다. 여기서  $\pi: F(M) \rightarrow M$ 는  $M_p$ 위의 프레임  $u$ 를  $M$  위의 점  $p$ 로 사상시키는 맵이다. 즉  $\pi(u)=p$ 이다.  $(x, U)$ 가  $M$ 에서의 좌표체계(local chart)이면  $M_p$  위의 모든 프레임  $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_j = \sum_{i=1}^n x_j^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(u)} \quad (4)$$

위 식에서 행렬  $x_j^i(u)$ 이 nonsingular이면  $u \rightarrow (x^i(\pi(u)), x_j^i(u)) \in R^n \times GL(n, R)$ 는 일대일 맵이다. 그러면  $F(M) \times GL(n, R) \rightarrow F(M)$ 는  $C^\infty$  맵으로서  $(u, A) \rightarrow u \cdot A$ 로 주어진다. 여기서  $(u \cdot A)_i = \sum_{j=1}^n A_j^i u_j$ 이다. 이 때, 각  $\pi^{-1}(p)$ 는 리군(Lie group)  $GL(n, R)$ 과 diffeomorphic이다.  $M$ 에서의 주 다발  $P \rightarrow M$ 은  $(P,$

$\pi, \cdot$ )로 표기되기도 하는데, 다음과 같이 정의된다.

- (1)  $P$ 는 주 다발의 전공간(total space)을 나타내는  $C^\infty$  다양체이다.
- (2)  $\pi: P \rightarrow M$ 는 다발의  $C^\infty$  사영 맵(projection map)으로서 모든  $u \in P$ 와  $a \in G$ 에 대하여  $\pi(u \cdot a) = \pi(u)$ 를 만족한다. 여기서  $G$ 는 리군을 의미한다.
- (3)  $\cdot$ 는  $P \times G$ 를  $P$ 로 매핑시키는 즉,  $(u, a) \rightarrow u \cdot a$ 인  $C^\infty$  맵으로서 모든  $u \in P$ 와  $a, b \in G$ 에 대하여  $u \cdot (ab) = (u \cdot a) \cdot b$ 이며 local triviality를 만족한다.

여기서 local triviality는 각  $p \in U \subset M$ 에 대하여  $t: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \cdot G$ 인 맵이 diffeomorphism임을 의미한다. 이 때,  $t(u) = (\pi(u), \phi(u))$ 이고  $\phi(u \cdot a) = \phi(u)a$ 인 관계를 만족한다.

그림 1은 주 프레임 다발의 개념도를 나타낸 것이다.

$P$ 의 각 올(fiber)  $\pi^{-1}(p)$ 는 리군  $G$ 와 diffeomorphic인데,  $u \in P$ 에 대하여  $p = \pi(u)$ 이고  $i: \pi^{-1}(p) \rightarrow P$ 가 포함(inclusion) 맵이면  $i_*(\pi^{-1}(p)_u)$ 는  $u$ 에서의 수직공간(vertical space)  $V_u$ 에 속한다. 이에 속하는 접벡터를 수직 접벡터라고 부르는데, 접벡터  $Y$ 가  $\pi_* Y = 0$ 이면  $Y \in V_u$ 이다.  $M$  위에 임의의 벡터장  $X$ 에서 모든  $u \in P$ 에 대하여  $\pi_*(X^*_u) = X_{\pi(u)}$ 인 수평 벡터장  $X^*$ 가 유일하게 존재한다. 여기서  $X^*$ 를  $X$ 의 리프트(lift)라고 부른다.

주어진 곡선  $c: [0,1] \rightarrow M$ 에서  $\pi(u_0) = c(0)$ 인  $u_0 \in P$ 를 선택하면  $c^*(0) = u_0$ 인  $c$ 의 유일한 리프트  $c^*$ 가 존재한다.  $c(t)$ 가  $M$ 에서의 벡터장  $X$ 의 적분곡선(integral curve)이듯이  $c^*(t)$ 는 리프트  $X^*$ 의 적분곡선이다. 이를 이용하면  $c: [0,1] \rightarrow M$ 를 따라 주 다발

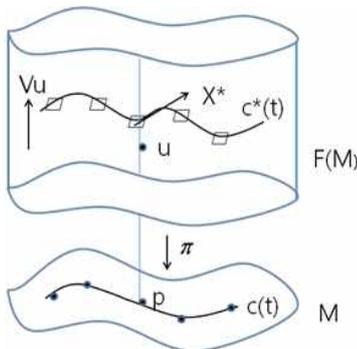


그림 1. 주 프레임 다발의 개념도

$\pi: P \rightarrow M$ 의 올에서의 평행이동을 정의할 수 있다. 임의의  $u \in \pi^{-1}(c(0))$ 에서  $c: [0,1] \rightarrow M$ 를 따라 평행이동한 프레임을  $c^*(t)$ 이라고 하면 다음과 같은 맵을 얻을 수 있다.

$$\tau_t: \pi^{-1}(c(0)) \rightarrow \pi^{-1}(c(t)) \tag{5}$$

즉,  $c^*(t) = \tau_t(c^*(0))$ 이다.

프레임 다발  $\pi: F(M) \rightarrow M$ 은 모든 프레임  $u \in F(M)$ 에서  $u: \mathbf{R}^n \rightarrow M_{\pi(u)}$ 인 동형사상(isomorphism)이다. 즉,  $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ 은  $u_i \in M_{\pi(u)}$ 로 매핑된다. 이는 구체적으로  $\xi \in \mathbf{R}^n$ 에 대하여  $(u \cdot a)(\xi) = u(a \cdot \xi)$ 이 성립함을 의미한다.

$X_p \in M_p$ 가  $p = c(0)$ 에서 접벡터이고  $c^*: [0,1] \rightarrow F(M)$ 가  $c^*(0) = u$ 인  $c$ 의 리프트이면,  $c^*(0)(\xi) = u(\xi) = X_p$ 인  $\xi \in \mathbf{R}^n$ 가 존재한다. 따라서 벡터의 평행이동은  $\tau_t(X_p) = c^*(t)(\xi)$ 로 정의될 수 있다. 리프트  $c^*$ 가 주어지면  $c(t)$ 는 다음과 같이 시작점과  $c^*$ 으로 나타낼 수 있다.

$$c(t) = c(0) + \int_0^t \lambda(\tau) \cdot c^*(\tau) d\tau \tag{6}$$

여기서  $\lambda(t)$ 는  $c'(t)$ 를 기저 벡터  $c^*(t)$ 로 사영시켰을 때의 좌표이다. 즉,  $\lambda(t) = \langle c'(t), c^*(t) \rangle$ 이다. 다시 말하면,  $c'(0)$ 를  $c^*(0)$ 의 프레임으로 표현했을 때의 좌표가  $\lambda(0)$ 이라면 이를  $t$ 만큼 평행이동하여 프레임  $c^*(t)$ 로 나타내면 그 계수는  $\lambda(0)$ 로 변하지 않는다. 따라서 다양체 위의 점열이 유클리드 공간의 점열로 변환시키는 결과를 얻을 수 있다. 그리고  $c(0)$ 와  $c^*(0)$ 가 초기조건으로 주어지면  $c'(t)$ 와  $\lambda(t)$ 는 일대일 매핑이다[9].

### 3.2 형태열의 전처리

우선, 형태열의 각 폐곡선(형태점)이 미분 가능하도록 하면서 또한 계산량을 줄이기 위하여 푸리에 기술자(Fourier descriptor)를 이용하여 각 폐곡선을 부드럽게 한 다음 100개의 점으로 재 표본화한다. 또한 각 폐곡선 간에도 큐빅 스플라인 보간법으로 5배 보간시켜 더욱 부드럽게 연결되도록 한다. 그림 2는 뛰는 사람의 윤곽선으로 구성된 형태열을 전처리한 결과의 일부분을 보여 주고 있다.

### 3.3 형태 벡터의 평행 이동

위에서 설명한 방법으로 충분히 매끄럽게 전처리

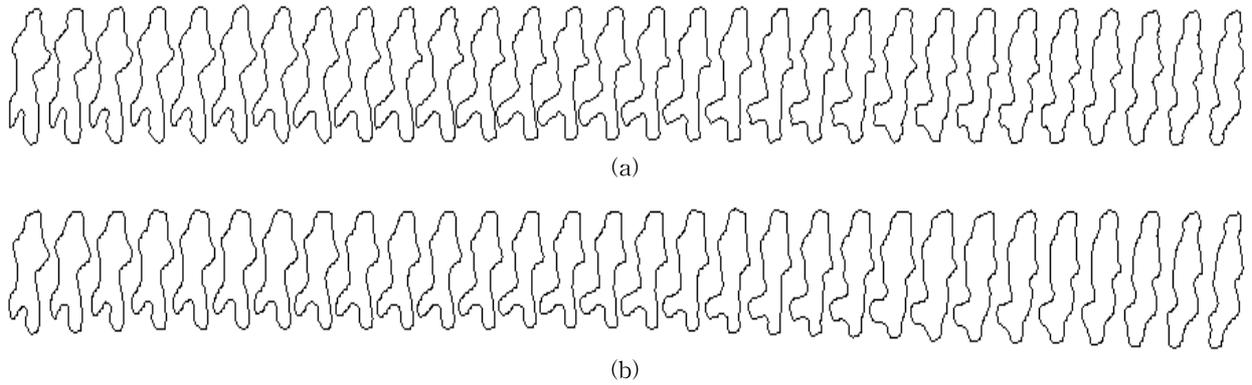


그림 2. (a) 원 형태열 (b) 푸리에 기술자와 큐빅 스플라인 보간법으로 전처리한 형태열

된 각 폐곡선을 형태 다양체에서의 한 점이라고 간주하면 이 형태열은 그 공간에서의 곡선인  $c(t)$ 를 표본화한 점열로 볼 수 있다. 하지만 본 논문에서는 편의상 이 형태열을  $c(t)$ 와 동일시한다.

곡선  $c(t)$ 를 따라 평행인 무빙 프레임(moving frame)  $u(t)=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 은 다음 식과 같은 공변미분을 통하여 구할 수 있다.

$$\nabla_{c(t)} u_i(t) = 0 \tag{7}$$

위 식에서 초기 형태의 접벡터를  $u_i(0)$ 으로 설정하면  $c^*(0)=u(0)$ 인  $c(t)$ 의 유일한 리프트  $c^*(t)=(u_1(t), \dots, u_n(t))$ 를 구할 수 있다.

이와 같이 경로  $c(t)$ 를 따라 서로 평행인 프레임  $c^*(t)$ 을 알고 있으면 경로 상의 접벡터들은 점의 위치에 관계없이 고유의 좌표를 갖는다. 즉, 출발점  $c(t_0)$ 에서의 접벡터  $c'(t_0)$ 를 도착점  $c(t_1)$ 으로 평행이동시키기 위해서는  $c(t_0)$ 에서의 프레임  $c^*(t_0)$ 를 이용하여 좌표  $\lambda(t_0)$ 를 구한다음, 좌표는 그대로 유지하면서  $c(t_1)$ 에서의 프레임  $c^*(t_1)$ 과 좌표  $\lambda(t_0)$ 를 결합하여  $c(t_1)$ 에서의 접벡터  $c'(t_1)$ 을 구할 수 있다. 이 과정을 “경로를 따르는 벡터의 평행이동”이라고 부른다. 이를 통하여 경로 상의 모든 접벡터들을 유클리드 공간의 점으로 사상시킬 수 있다. 즉,  $c(t_0)$ 에서의 접벡터  $c'(t_0)$ 는 경로  $c(t)$ 의 어느 위치에서도 고유좌표  $\lambda(t_0)$ 를 갖는다. 따라서  $c(t_0)$ 에서  $c(t_1)$ 으로 진행하면서 발생한 벡터의 변화율에 대한 좌표는 단순히  $a=\lambda(t_1)-\lambda(t_0)$ 이고 이를 벡터의 형태(가속도 벡터)로 나타내면  $a \in \mathbf{R}^n$ 과  $c^*(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 를 결합하여  $\sum_{k=1}^n a^k u_k$ 로 표현할 수 있다. 결과적으로 임의의 두 점 간의 벡터 변화량은 각 점에서의 접벡터 고유좌표의 차로 쉽게

구할 수 있다. 이를 통하여 형태 다양체의 곡률로 야기될 수 있는 난제를 해결할 수 있다.

### 3.4 평행 이동 구현

본 논문에서는 위에서 설명한 주 프레임 다발 이론을 적용하여 형태열의 접벡터 변화량을 측정하기 위한 접속방식을 구현한다. 이를 위하여 우선, 식 (3)에 제시한 형태 다양체의 접공간을 이용하여 형태열의 각 점마다 프레임을 생성한다. 여기서  $\cos(\theta)$ ,  $\sin(\theta)$ 는 각 점에서의 법벡터이므로 이에 수직인  $\{\cos(m\theta), \sin(m\theta)\}$ ,  $2 \leq m \leq 51$ 를 이용하여 100 차원의 서로 독립인 벡터들을 생성하고 3차원의 법벡터와 서로 독립인 벡터들이 서로 수직임을 보장하기 위하여 Gram-Schmidt 수직화 과정을 수행함으로써 프레임  $u(t)=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 을 구한다. 이와 함께 형태열의 인근 점 간의 차를 형태 다양체의 접공간에 사영시킴으로써 각 점마다 접벡터  $c'(t)$ 를 구한다. 프레임  $u(t)$ 가 형태열  $c(t)$ 에 평행이 되도록 식 (7)에 주어진 공변미분 방정식의 근  $c^*(t)$ 을 구한다. 여기서 근은 Yi[7]가 제안한 방식으로 구한다. 마지막으로  $c'(t)$ 를 기저 벡터  $c^*(t)$ 에 사영시킴으로써 유클리드 공간의 좌표  $\lambda(t)=\langle c'(t), c^*(t) \rangle$ 를 구한다. 여기서 벡터 변화량은  $\lambda(t) \in \mathbf{R}^n$ 의 미분인  $\lambda'(t)$ 이다.

### 4. 실험 및 토론

전처리된 형태열이 주어지면 우선 각 점(형태)마다 접벡터  $c'(t)$ 를 구하고, 식 (7)을 이용하여 곡선  $c(t)$ 를 따라 평행인 무빙 프레임을 구한다.

이와 같이 구한 서로 평행한 무빙 프레임  $c^*(t)$ 에,

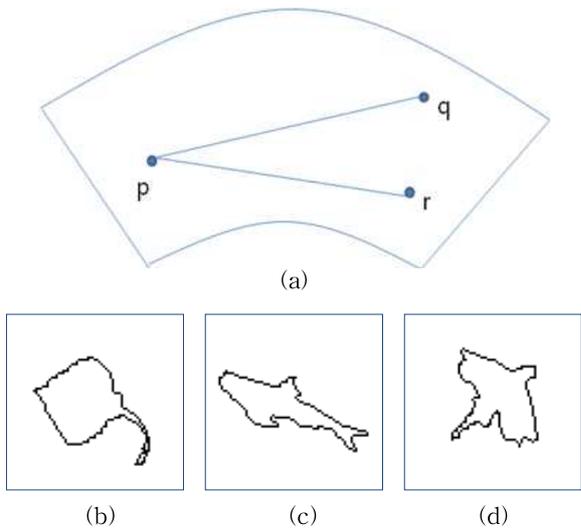


그림 3. 형태 다양체와 점(형태)의 예 (a) 형태 다양체, (b) 형태 p, (c) 형태 q, (d) 형태 r

형태열의 모든 점에서의 접벡터  $c'(t)$ 를 사영시켜 줌으로써 형태 다양체 위의 점을 유클리드 공간으로 변환할 수 있다. 이의 동작을 정성적으로 해석하기 위하여 그림 3과 같은 형태 p, q, r이 주어졌다고 가정한다.

p와 q를 연결하는 측지선(geodesic)은 Klassen이 제안한 방법[4]으로 그림 4-(a)에 나타낸 바와 같이 구할 수 있다. 여기서 p와 q를 선형 보간해서는 중간 형태들을 구할 수 없기 때문에 이 형태 다양체는 유클리드 공간이 아닌 사실을 알 수 있다. 측지선은 식 (7)에서  $V'(t)=c'(t)$ 일 때 즉,  $\nabla_{c'(t)}c'(t)=0$ 를 만족시키는  $c(t)$ 이므로 그 가속도 벡터가 0인, 유클리드 공간의 직선에 해당되는 선임을 알고 있다. 형태열의 접벡터장인  $c'(t)$ 를 기저 벡터  $c^*(t)$ 로 사영시켰을 때의 좌표인  $\lambda(t)$ 와  $c^*(t)$ 를 식 (6)에 대입하면  $c(t)$ 를

합성할 수 있다. 그림 4-(a)의 측지선 형태열에 대한 접벡터 변화율 즉, 가속도 벡터를 정성적으로 파악하기 위하여 식 (6)에서 원을  $c(0)$ 에 대입하여 합성한 결과를 그림 4-(c)에 제시하였다. 입력신호가 가속도 벡터의 크기가 0인 측지선이므로 합성신호인 원이 균일한 크기로 일정한 방향으로 변하고 있음을 확인할 수 있다. 그림 4-(b)는 원래의 초기 형태를 입력하여 합성한 결과를 보여 주고 있다. 이 그림을 보면 시간이 지남에 따라 왜곡이 발생하고 있는데, 그 원인은 합성하는 과정에서 그 결과를 반복적으로 형태 다양체에 사영시키고 있기 때문이다.

동일한 방법으로, p와 r을 측지선으로 연결하여 실험한 결과는 그림 5에 제시한 바와 같다.

그림 4-(c)와 그림 5-(c)를 비교하여 보면 원이 균일한 크기로 변하는 것은 동일하지만 그 방향은 다를 수 있다. 이는 그림 3-(a)에 나타낸 바와 같이 형태 다양체 위에 점 p, q, r이 서로 다른 위치에 놓여 있음을 보여 준다. 그림 6은 그림 4와 그림 5에 주어진 형태열이 유클리드 공간에서의 변화량을 확인하기 위하여 접벡터크기  $|\lambda(t)|$ 를 구하여 그래프로 표현한 것이다.

$\lambda(t)$ 는  $c'(t)$ 를 기저 벡터  $c^*(t)$ 로 사영시켰을 때의 좌표이기에  $|\lambda(t)|$ 는 속도벡터의 크기를 나타내는 바, 위의 두곡선 pq와 pr은 접벡터 크기가 시간에 따라 각각 거의 일정하여 벡터 변화량이 0인 측지선에 근사적으로 접근한다. 따라서 이 실험 결과는 이론과 정확히 일치함을 알 수 있다.

그림 7은 뛰는 사람의 형태열을 이용하여 형태열 접벡터의 변화량을 측정하고 이를 이용하여 합성한 결과를 보여 주고 있다. 위에서 설명한 바와 같이 원을 초기값으로 지정하여 합성하여 보면 벡터의 변화

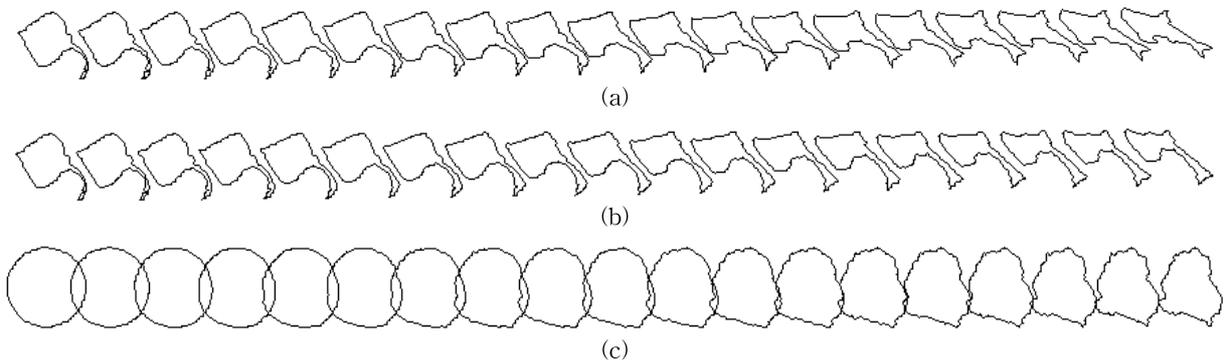


그림 4. 점 p와 점 q를 연결한 측지선에서의 접속 (a) 입력 형태열(측지선), (b) 직교좌표  $\lambda(t)$ 와 무빙프레임으로 합성한 형태열 (c) 원을 초기값으로 입력하여 합성한 형태열

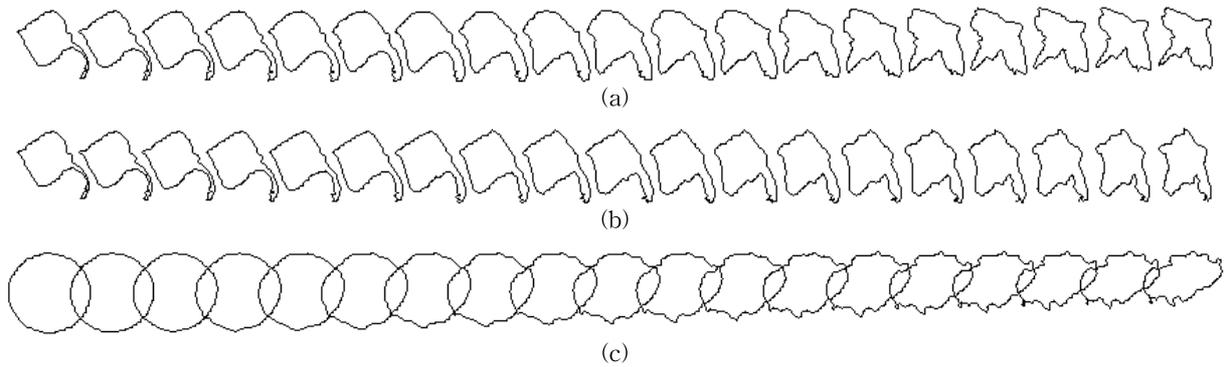


그림 5. 점  $p$ 와 점  $r$ 을 연결한 축지선에서의 접속 (a) 입력 형태열(축지선), (b) 직교좌표  $\lambda(t)$ 와 무빙프레임으로 합성한 형태열 (c) 원을 초기값으로 입력하여 합성한 형태열

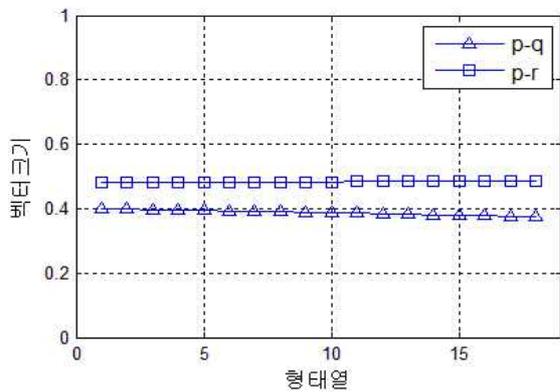


그림 6. 형태열  $pq$ 와  $pr$ 의 접벡터 좌표 크기( $|\lambda(t)|$ ) 비교

량을 시각적으로 파악하는데 도움을 준다. 중간 부분의 뛰는 모습에서는 속성상 상체보다는 하체의 변화가 더 크게 나타남을 그림 7-(c)를 통해서 알 수 있다.

그림 8은 걷는 사람의 형태열을 이용하여 위와 동일하게 실험한 결과를 보여주고 있다. 그림 7에서의 결과와는 달리 초중반 부분에서는 변화량이 미약하지만 후반부에서 다소 증가하는 모습이 관찰되고 있다.

그림 7과 그림 8에 주어진 형태열이 유클리드 공간에서의 변화량을 확인하기 위하여 벡터크기  $|\lambda(t)|$ 를 그림 9에 그래프로 제시하였다.

이 실험을 통해서 확인할 수 있듯이, 주어진 형태열의 변화량을 측정할 수 있으면 그 형태열에 내재된 고유특성을 벡터의 변화량 형태로 파악할 수 있으므로 중요한 특징정보로 활용할 수 있다. 정리하면, 형태 공간에 있는 형태열  $c(t)$ 에 대한 접벡터  $c'(t)$ 의 변화율은  $c'(t)$ 의 미분인  $c''(t)$ 가 아니라  $c'(t)$ 를  $c^*(t)$ 로 사영시켰을 때의 좌표  $\lambda(t)$ 의 미분인  $\lambda'(t)$ 와  $c^*(t)$ 의 선형조합이며, 초기값에 영향을 받지 않는 고유특성임을 확인할 수 있다.

### 5. 결 론

동영상에서 추출한 형태열을 이용하여 제스춰 등을 인식하는데 있어서, 각 형태는 유클리드 공간의 점이 아니라 휘어져 있는 공간의 점이기에 때문에 이리

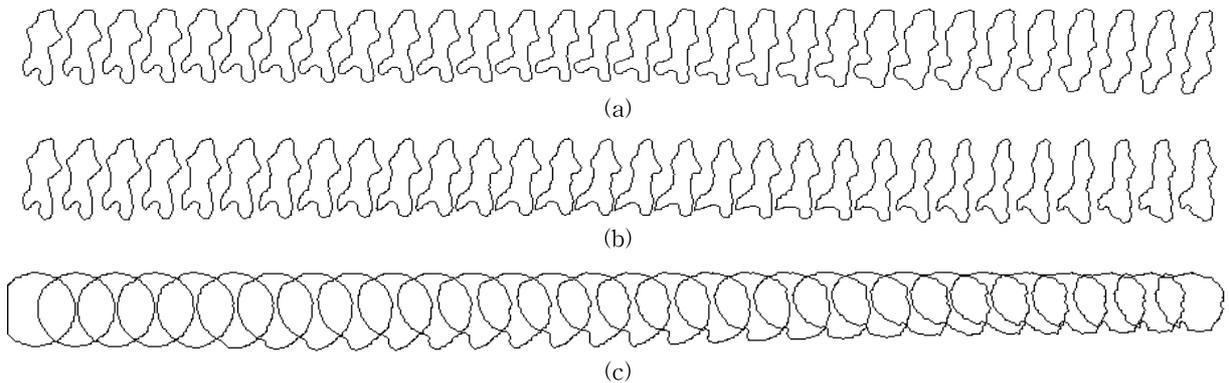


그림 7. 형태열(뛰는 사람)에서의 접속 (a) 입력 형태열, (b) 직교좌표  $\lambda(t)$ 와 무빙프레임으로 합성한 형태열 (c) 원을 초기 형태로 입력하여 합성한 형태열

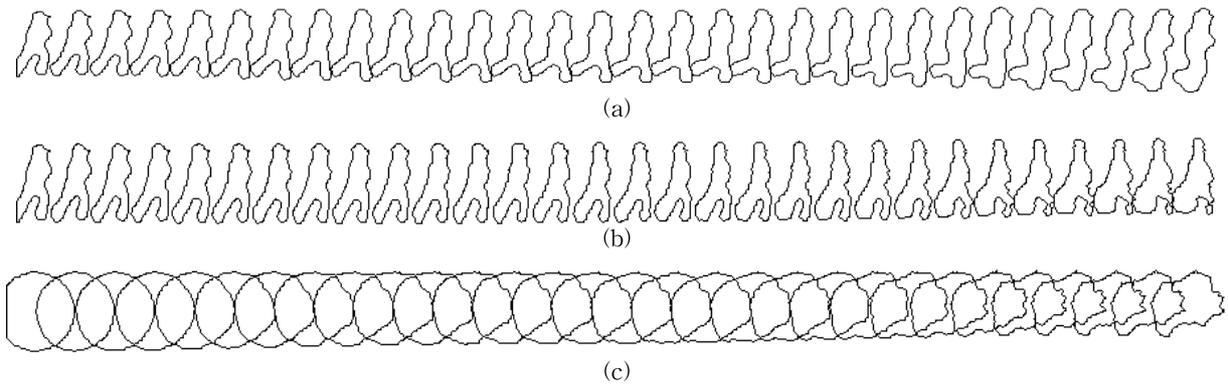


그림 8. 형태열(걷는 사람)에서의 접속 (a) 입력 형태열, (b) 직교좌표  $\lambda(\lambda)$ 와 무빙프레임으로 합성한 형태열 (c) 원을 초기 형태로 입력하여 합성한 형태열

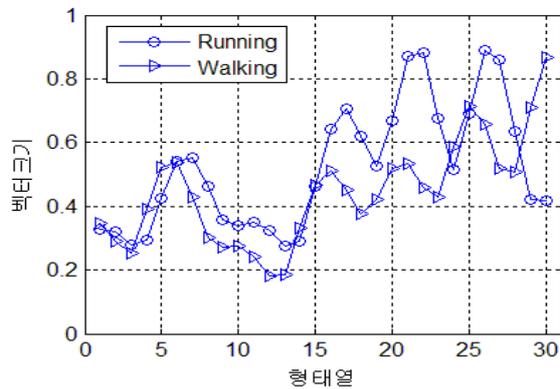


그림 9. 뛰는 사람과 걷는 사람 형태열의 접벡터 좌표 크기 ( $\lambda(\lambda)$ ) 비교

한 곡률로 인한 문제점을 해결하기 위하여 본 논문에서는 무빙 프레임과 레비 치비타 접속 이론 등을 이용하여 형태열을 유클리드 공간으로 사영시키는 알고리즘을 구현하였다. 구현 알고리즘에 측지선을 입력하면 접벡터 크기가 일정하여 그 가속도 벡터가 0임을 확인하였다. 이를 이용하면 형태열에서 구한 접벡터장의 변화율을 정확히 측정할 수 있으며, 이 변화량은 형태열 고유의 특성정보를 내재하고 있음을 확인하였다. 유클리드 공간의 좌표로 변환된 벡터 변화량은 그 차원을 크게 줄여 형태열을 표현하기 위한 정보량에 대한 압축이 가능하기에, 향후에는 이에 대한 연구와 함께 제스처 인식 알고리즘과 연동하여 실험함으로써 제안 알고리즘의 성능개선 효과를 정량적으로 확인할 계획이다.

참 고 문 헌

[1] D.G. Kendall, "Shape manifolds, Procrustean

Metrics, and Complex Projective Spaces," *Bull London Math. Soc.*, Vol. 16, pp. 81-121, 1984.

[2] T.F. Cootes, C.J. Taylor, and J. Graham, "Active Shape Model-Their Training and Application," *Computer Vision and Image Understanding* Vol. 61, No. 1, pp. 38-59, 1995.

[3] 한희일, "ASM의 성능향상을 위한 형태 정렬 방식 제안," 멀티미디어학회 논문지, 제15권, 제1호, Vol. 16, pp. 63-70, 2012.

[4] E. Klassen, A. Srivastava, W. Mio, and S.H. Joshi, "Analysis of Planar Shapes Using Geodesic Paths on Shape Spaces," *IEEE Trans. PAMI*, Vol. 26, No. 3, pp. 372-383, 2004.

[5] M.F. Abdelkader, W. Abd-Elmageed, A. Srivastava, and R. Chellapa, "Silhouette-Based Gesture and Action Recognition Via Modeling Trajectories on Riemannian Shape Manifolds," *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 115, Issue 3, pp. 439-455, 2011.

[6] S. Yi, H. Krim, and L.K. Norris, "Human Activity as a Manifold-Valued Random Process," *IEEE Trans. Image Processing*, Vol. 21, No. 8, pp. 3416-3428, 2012.

[7] S. Yi, H. Krim, and L.K. Norris, "A Invertible Dimension Reduction of Curves on a Manifold," *ICCV Workshops*, pp. 1378-1385, 2011.

[8] 김홍중, "리만 다양체의 홀로노미군," *Comm. Korean Math. Soc.*, 제15권, 제4호, pp. 555-585, 2000.

[9] Spivak, *A Comprehensive Introduction to*

*Differential Geometry*, Vol. 2, Publish or Perish Inc., USA, 2005.



한 희 일

1980년 3월~1984년 2월 서울대학교 제어계측 공학과 공학사

1984년 3월~1986년 2월 서울대학교 제어계측 공학과 공학석사

1992년 8월~1995년 12월 University of Arizona 전기및 컴퓨터 공학과 공학박사

1987년 1월~1998년 3월 한국전자통신연구원, 선임연구원

1998년 3월~현재 한국외국어대학교 정보통신공학과 교수  
관심분야: 신호처리, 영상처리, 컴퓨터비전, 패턴인식