

불변 집합을 이용한 컨버터의 입력 제약 추종 제어

Input-constrained Tracking Control of a Converter Model Using Invariant Sets

김정수*, 이영일
(Jung-Su Kim¹ and Young Il Lee¹)

¹Seoul National University of Science and Technology

Abstract: This paper proposes an input-constrained reference tracking control of a converter model. To this end, first it is shown that the bilinear converter model can be equivalently represented by a linear uncertain model belonging to a polytopic set. Then, an input-constrained tracking control scheme for the linear uncertain model is designed based on recently proposed tracking control scheme. The control scheme yields not only a stabilizing control gain but also a feasible and invariant set for the converter model. Finally, simulation results show that the state trajectory always stays in the feasible and invariant set and that the output tracks the given reference while satisfying the input constraint.

Keywords: constrained tracking control, invariant set, converter control

I. 서론

스마트 그리드와 신재생 에너지가 다음 세대 에너지 소비 및 공급의 주요한 요소로 인식되고 있다. 전통적으로 각 분야에서 주요한 기술로 인식되었지만 이러한 상황 인식으로 인해 더욱 주요한 기술로 재발견되고 있는 것이 DC/DC, AC/DC 컨버터로 대표되는 전력 변환 기술이다. 이로 인해 수년 전부터 전력 변환기 제어 설계에 고급 제어 기법을 적용하여 그 성능과 효율을 향상시키고자 하는 연구가 주목을 받기 시작하였다. 본 논문에서는 DC/DC 컨버터 제어를 위해 불변 집합을 이용한 입력 제약 출력 추종 제어 기법을 소개하고자 한다[1-4,12,13].

DC/DC 컨버터의 제어 문제에서는 제어 이론적 관점에서 크게 두 가지의 어려움이 존재한다. 첫 번째는 상태 공간 평균 모델로 모델링을 하는 경우 상태 변수와 입력에 해당 하는 듀티비(duty cycle)가 서로 곱해져 있어 선형 모델이 아닌 bilinear 모델이 되어 선형 제어 기법을 사용할 수가 없다. 또한 듀티비는 0과 1사이의 값만을 가지므로 원하는 출력을 얻기 위해 제어 입력인 듀티비는 0과 1 사이의 값을 가지도록 결정되어야 한다. 따라서 제어 이론적 관점에서 DC/DC 컨버터의 제어 문제는 bilinear 시스템의 출력을 원하는 값이 되게 하는 입력 제약 출력 추종(input constrained reference tracking) 문제이다[3-7].

본 논문에서는 이러한 컨버터의 출력 추종 제어를 위해 최근에 소개된 불확정 선형시스템을 위한 출력 추종 제어 기법이 효과적으로 적용될 수 있음을 보인다[11]. 이를

위해 우선 bilinear 형태인 컨버터의 평균 모델이 불확정성을 내포한 선형 시스템으로 동일하게 표현될 수 있음을 보인다. 그 후에 [11]에서 소개된 제어 기법 설계 과정을 컨버터 모델에 대해 적용한다. 또한 현재 상태 변수에서 원하는 출력 지령치에 도달할 수 없는 경우 도달 가능한 지령치로부터 최종적으로 원하는 지령치를 안정도와 가해성(feasibility)를 유지하면서 변화시키는 방법에 대해서 논의한다. 모의 실험을 통해서 제안하는 제어 기법이 입력 제약을 만족하면서도 컨버터 모델의 출력을 성공적으로 지령치로 수렴시킴을 보인다. 또한 계산된 불변 집합 안에서 출발한 상태 궤적이 제어과정에서 그 불변 집합 내에 존재함을 보인다.

소개하는 컨버터 출력 추종을 위한 제어 기법은 최근 제안된 불확정성을 내포한 입력 제약을 가진 선형 시스템의 제어 기법을 효과적으로 적용한 사례이다. 따라서 제안하는 제어 기법은 제어 기법 설계 과정이 복잡한 조절과정이 없이 체계적이며 입력 제약 조건을 제어기 설계 단계에서부터 고려할 수 있는 장점이 있다. 또한 입력 제약 조건을 만족하는 제어 이득 유도와 불변 집합 유도가 유기적으로 연결되어 있어 불변 집합의 크기를 최대화하는 것과 같은 작업이 가능하다. 기존의 제어 기법들은 bilinear 모델을 선형화 하는 것과 같은 과정으로 인해 제어기가 동작하는 상태 변수 영역의 크기 조절 등이 용이하지 않았다[4-6]. 또한 설계 과정에서 bilinear 모델을 불확정성을 포함한 선형 시스템으로 변환하여 제어기를 설계하였으므로 모델 파라미터 변화에 강한 컨버터 제어 기법이다.

II. 컨버터 모델

다음 그림과 같은 Buck-booster 컨버터를 고려하자.

그림 1에 나타난 컨버터는 출력 전압 v_o 를 원하는 값이 되게 PWM 값을 만들도록 스위칭의 듀티비(duty cycle)

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2012. 10. 23., 수정: 2012. 12. 31., 채택확정: 2013. 1. 28.

김정수, 이영일: 서울과학기술대학교 전기정보공학과

(jungsu@seoultech.ac.kr/yilee@seoultech.ac.kr)

※ 이 연구는 서울과학기술대학교 교내 학술연구비 지원으로 수행되었음.

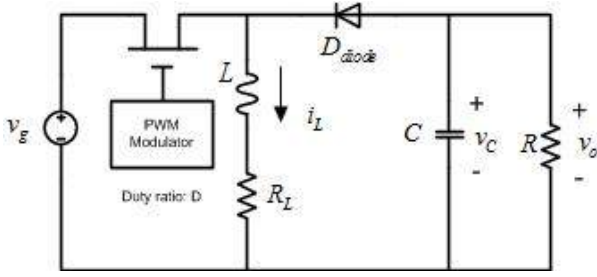


그림 1. Buck-booster 컨버터.

Fig. 1. Buck-boost converter.

$D \in [0,1]$ 를 조절한다. 실제 물리적으로는 스위칭 소자이므로 0과 1만의 값을 가지지만 본 논문에서는 D 가 0과 1 사이의 연속된 값을 가진다고 가정한다. 간단히 설명하면 그림 1에 표현된 회로는 D 가 0일 때와 1일 때 각각 다른 동특성을 보인다. 즉, D 가 1일 때는 컨덴서 C 에 전하가 축적되어 출력 전압이 증가하고 D 가 0일 때는 방전되어 출력 전압이 감소한다. 이러한 컨버터의 동특성은 코일을 흐르는 전류와 컨덴서의 전압을 상태 변수 x 로 하였을 때 다음과 같이 모델링할 수 있다.

$$\begin{cases} x(k+1) = A_1x + B_1v & \text{if } D=1 \\ x(k+1) = A_2x + B_2v & \text{if } D=0 \end{cases} \quad (1)$$

여기서 행렬 A_1, A_2, B_1, B_2 는 그림에 나타난 회로 소자들로부터 얻어진 적절한 행렬들이며 $v = \begin{bmatrix} v_g \\ v_D \end{bmatrix}$ 이고 v_D 는 다이오드 전압이다. 스위칭에 의해 동특성이 결정되는 상황을 수학적으로 표현하기 위하여 다음과 같이 평균 모델(averaged model)을 고려한다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (DA_1 + (1-D)A_2)x(k) + (DB_1 + (1-D)B_2)v \\ &= (A_2 + (A_1 - A_2)D)x(k) + (B_1 - B_2)vD + B_2v \\ &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}D + B_2v \\ &=: \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) + B_2v \\ y &= Cx(k) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $u(k) := D$, $\tilde{A} := A_2 + (A_1 - A_2)D$, $\tilde{B} := (B_1 - B_2)v$ 이며 y 는 출력 변수이다. 이러한 평균 모델을 구성하는 원리는 컨버터의 동특성이 $D=0$ 일 때와 $D=1$ 일 때의 평균에 따른다는 관찰에 기인한 것이다[7]. 이 평균 모델은 입력 D 와 상태 변수 $x(k)$ 가 곱해져 있는 bilinear 시스템의 형태이고 이것이 컨버터 제어 문제를 어렵게 만드는 이유 중 하나이다. 실제 컨버터의 듀티비 D 는 출력 지령치에 따른 정상 상태 값 근처에서 동작할 것이다. 이를 고려하여 다음과 같은 가정을 한다.

가정 1: 듀티비 D 는 다음과 같은 상하한을 가진다.

$$D \in [D_{\min}, D_{\max}] \in [0,1].$$

여기서 D_{\min} 과 D_{\max} 는 알려진 값이다. 가정 1을 고려하면 수식 (2)에 표현된 평균 모델은 블록 다각형으로 표현되는 불확정성을 가진 선형 모델로 등가적으로 다시 표현할 수 있다. 즉, 모델 (\tilde{A}, \tilde{B}) 는 다음과 같은 집합에 포함되어 있다고 해석할 수 있다.

$$\Omega = \{(\tilde{A}, \tilde{B}) = \eta(A_{m_1}, B_{m_1}) + (1-\eta)(A_{m_2}, B_{m_2}), \eta \in [0,1]\} \quad (3)$$

여기서 $B_{m_1} = B_{m_2} := (B_1 - B_2)v$ 이고

$$A_{m_1} := A_2 + (A_1 - A_2)D_{\min}, \quad A_{m_2} := A_2 + (A_1 - A_2)D_{\max}$$

이다. 이렇게 표현하면 시스템이 더 이상 bilinear 형태가 아니고 모델에 불확정성을 가진 입력 제약 선형 시스템이다. 따라서 본 논문에서 풀고자 하는 제어 문제는 다음과 같은 불확정성을 가진 입력 제약 모델에 대해서

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) + B_2v, \quad u(k) \in [u_{\min}, u_{\max}] \quad (4)$$

$$y = Cx(k)$$

출력 $y(k)$ 가 출력 지령치가 되도록 하는 입력 $u(k)$ 를 설계하는 것이다. 수식 (4)에서 $u_{\min} = D_{\min}, u_{\max} = D_{\max}$ 이다. 이러한 모델링으로 인해 시스템 파라미터 변화도 쉽게 모델에 반영할 수 있다. 즉 $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ 에 불확실성이 존재하는 경우를 모델링에 반영할 수 있다. 또한 모델 불확정성을 가진 입력 제약 시스템의 추종 제어 문제는 아직도 완전한 해가 제안되지 않은 난제로 여겨진다[11].

일반적으로 선형 시불변 모델 (A, B, C) 에 대해서 출력 추종 제어 문제를 해결하기 위해서 다음과 같은 정상 상태 방정식을 이용하여 상태와 입력의 정상 상태 값을 구한다.

$$\begin{bmatrix} I - AB \\ C \ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서 r 은 원하는 출력값(지령치, reference)이다. 일반적인 출력 추종 제어 문제에서는 방정식 (5)를 이용하여 상태 $x(k)$ 와 입력 $u(k)$ 의 정상 상태 $x(\infty)$ 와 $u(\infty)$ 를 구한 후 상태와 입력이 정상 상태에서 각각 $x(\infty)$ 와 $u(\infty)$ 가 되도록 제어 입력을 설계한다. 그러나 모델에 불확정성이 있으면 상태와 입력 변수의 정상 상태 값이 유일하게 정해지지 않는 어려움이 발생한다. 또한 본 논문에서 고려하는 입력 제약 추종 제어 문제가 유의미해지기 위해서는 불확정성을 나타낸 모델 (3)을 위의 정상 상태 방정식 (5)에 대입하여 얻는 입력의 정상 상태 값들이 모두 입력 제약 조건을 만족해야 한다. 또한 정상 상태 방정식 (5)의 해는 원하는 출력 지령치 r 에 의해서 변하게 된다. 따라서 불확정성을 포함한 모델을 위한 출력 추종 제어 기법으로 컨버터 출력 추종 제어 문제를 해결하기 위해서는 지령치 r 을 적절히 선정해야 한다. 즉 집합 (3)에 속한 모든 모델에 대해서 입력의 정상 상태 값이 입력 제약 조건을 만족하도록 하는 출력 지령치를 설정해야 한다. 또한 컨버터 모델을 위하여 (3)과 같은 불확정성을 포함한 모델을 고려하고 있으므로 주어진 출력 지령치 r 에 대하여 방정식 (5)를 계산할 때 (A_{m_1}, B_{m_1}) 과 (A_{m_2}, B_{m_2}) 를 사용하면 다음과 같은 정상 상태에서 상태 변수와 제어 입력 값의 상하한을 알 수 있다.

$$\underline{x}(\infty) \leq x(\infty) \leq \bar{x}(\infty), \quad \underline{u}(\infty) \leq u(\infty) \leq \bar{u}(\infty)$$

여기서 부등호는 벡터의 같은 위치 성분 간의 크기 비교이다. 따라서 정상 상태 값 $x(\infty)$ 와 $u(\infty)$ 는 불확정하지만 그들의 상하한 값들($\underline{x}(\infty), \bar{x}(\infty), \underline{u}(\infty), \bar{u}(\infty)$)은 알고 있는 값들이 된다.

III. 입력 제약 강인 제어

1. 안정화 제어 이득 계산

앞 장에서는 컨버터의 동특성이 bilinear 모델로 표현되고 그것은 불확정성을 포함한 선형 모델로 동일하게 표현될 수 있음을 보였다. 이러한 컨버터 모델 표현 덕분에 논문 [11]에서 제안한 추종 제어 설계 기법을 컨버터 출력 제어 문제에 적용할 수 있다.

다음과 같은 입력을 고려하자.

$$u(k) = u(k-1) + K(x(k) - x(k-1)) + L(y(k-1) - r). \quad (6)$$

여기서 r 은 원하는 출력값이고 K 와 L 은 제어 이득이다. 이 입력은 정상 상태에서 출력 추종 오차를 제거하기 위하여 적분 제어를 수행하며 상태 변이와 출력 오차에 대해서 제어 이득을 곱하는 형태이다. 입력 (6)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(k+1) = [K(\tilde{A} - I_2) + LC]x(k) + (K\tilde{B} + I_2)u(k) + (KB_2v - Lr). \quad (6^*)$$

이 표현과 모델 (4)를 이용하면 전체 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \tilde{\Psi} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2v \\ KB_2v - Lr \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ K(\tilde{A} - I_n) + LC & K\tilde{B} + I \end{bmatrix}$$

이다. 출력 추종이 이루어지도록 하는 제어 이득 K 와 L 을 구하기 위하여 (7)의 폐루프 동특성과 폐루프의 정상 상태 동특성 방정식에 해당하는

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \tilde{\Psi} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2v \\ KB_2v - Lr \end{bmatrix}$$

사이의 오차 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} e_x(k+1) \\ e_u(k+1) \end{bmatrix} =: e(k+1) = \tilde{\Psi} \begin{bmatrix} e_x(k) \\ e_u(k) \end{bmatrix} = \tilde{\Psi}e(k). \quad (8)$$

여기서

$$e_x(k) = x(k) - x(\infty), \quad e_u(k) = u(k) - u(\infty)$$

이고 $x(\infty)$ 와 $u(\infty)$ 는 제어 목적인 $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = r$ 을 달성하도록 하는 (5)의 해에 해당하는 상태와 입력의 정상 상태 값이다. 따라서 만약 $\tilde{\Psi}$ 가 안정한 행렬이 되도록 제어 이득 K 와 L 을 설정하면 제어 목적이 달성된다. 행렬 $\tilde{\Psi}$ 가 불확정성을 포함하고 있지만 잘 알려진 바와 같이 (3)의 $\eta=0$ 과 $\eta=1$ 인 경우 모두 행렬 $\tilde{\Psi}$ 를 안정한 행렬이 되도록 하는 이득 K 와 L 을 찾으면 행렬 $\tilde{\Psi}$ 로 표현되는 모든 행렬은 안정한 행렬이 된다[8,9]. 예를 들어 극점 배치법(pole placement)과 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequalities)을 이용한 방법 등이 가능하다. 부록에 LMI를 이용한 방법을 소개하였다. 안정화 이득 K 와 L 을 결정한 상태에서 다음과 같은 사실이 성립한다.

보조 정리 1 [10]: 다음 선형 행렬 부등식을 만족하는 대칭 양행렬 P 와 행렬 G 가 존재하면

$$\begin{bmatrix} P & \Psi_l^T G^T \\ G\Psi_l & G + G^T - P \end{bmatrix} > 0, \quad l=1,2, \quad (9)$$

$$\Psi_l = \begin{bmatrix} A_{m_l} & B_{m_l} \\ K(A_{m_l} - I_2) + LC & KB_{m_l} + I \end{bmatrix}$$

오차 동특성 (8)은 안정하다. \square

부등식 (9)는 리아프노프 함수의 차분이 음수라는 조건과 동치인 부등식으로 불변 조건(invariance condition)을 나타낸다. 이득 K 와 L 은 이미 정해져 있으므로 부등식 (9)는 P 와 G 에 대한 선형 행렬 부등식이다.

2. 입력 제약과 불변 집합

앞 절에서 행렬 $\tilde{\Psi}$ 를 안정하게 하는 이득을 구하더라도 그 이득을 이용한 제어 입력은 상태 변수에 따라 입력 제약 조건을 만족하지 않을 수 있다. 따라서 이 절에서는 입력 제약을 만족시키는 불변 영역(invariant set)을 구하는 방법을 소개한다. 다음과 같은 집합을 고려하자.

$$S = \{e \in R^{3 \times 1} \mid e^T P e \leq 1, P > 0\}. \quad (10)$$

이러한 집합에 대해 만약 S 에 속한 모든 e 에 대해서 (6*)의 제어입력이 입력 제약을 만족하고 그 입력이 모든 $e(k) \in S$ 에 대해서 $e(k+1) \in S$ 를 만족하게 할 때 그 집합 S 를 가해(feasible)이고 불변(invariant)하다고 한다. 이러한 집합 S 를 구하여 입력 제약을 만족하면서 안정도를 보장하는 상태 변수 x 의 집합을 파악할 수 있다. 입력 제약 조건이 입력의 정상 상태 오차와 어떤 관계가 있는지 파악하기 위하여 다음과 같은 관계식을 고려하자.

$$e_u(k+1) = [K(\tilde{A} - I_2) + LC \quad K\tilde{B} + I]e(k) =: K_u e(k).$$

오차 e_u 의 정의($e_u(k) = u(k) - u(\infty)$)로부터 만약 오차 e_u 가 $|e_u(k+1)| \leq \mu$ 를 만족하면 입력 제약 조건 $u(k) \in [u_{\min}, u_{\max}]$ 이 만족된다는 것을 알 수 있다. 여기서 μ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu = \min\{u_{\max} - \bar{u}(\infty), \underline{u}(\infty) - u_{\min}\}.$$

$\bar{u}(\infty)$ 와 $\underline{u}(\infty)$ 는 모델 (4)에서 $\eta=0$ 일 때와 $\eta=1$ 일 때의 모델을 정상 상태 방정식 (5)에 대입하여 구한 정상 상태 입력값들 중 최댓값과 최솟값을 의미한다. 부등식 $|e_u(k+1)| \leq \mu$ 은 다음 부등식과 동일하다.

$$\begin{aligned} |e_u(k+1)|^2 &= |(K_u e(k))_i|^2 \\ &\leq \max_{e \in S} |(K_u P^{-1/2} P^{1/2} e(k))_i|^2 \\ &\leq \|(K_u P^{-1/2})\|_2^2 \leq (K_u P^{-1} K_u^T)_{ii} \leq \mu^2 \end{aligned} \quad (11)$$

이 부등식은 아래와 같은 선형 행렬 부등식 조건으로 나타낼 수 있다[9].

보조 정리 2: 다음 선형 행렬 부등식의 해 X 가 존재하면 부등식 (11)이 만족한다.

$$\begin{bmatrix} X & K_u^i \\ K_u^{i T} & P \end{bmatrix} > 0, \quad i=1,2. \quad (12)$$

$$X \leq \mu^2$$

여기서 $K_u^i = [K(A_{m_i} - I_2) + LC, KB_{m_i} + 1]$ 이다.

정리. 불확정성을 포함한 행렬 \tilde{u} 를 안정하게 만드는 이득 K 와 L 이 결정되었다면, 입력 제약을 만족하는 불변 영역은 다음과 같은 반한정 문제(semidefinite programming)를 통해 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \min_{P,G,X} & -\text{trace}(P) \\ \text{subj. to} & (9), (12). \end{aligned} \quad (13)$$

앞서 설명한 바와 같이 (9)는 불변 조건(invariance)을 나타내는 부등식이고 (12)는 가해 조건(feasibility)을 나타내는 부등식이다. 최적화 문제의 목적 함수를 문제 (13)과 같이 설정함을 통해 크기가 가장 큰 불변 집합을 얻을 수 있다. 따라서 초기치를 앞에서 소개한 가해이면서 불변 집합 내부로 설정을 하면 제어 법칙 (6)은 입력 제약을 만족하면서 출력 추종을 달성한다.

3. 출력 지령치 조절

앞 장에서 설명한 바에 따르면 입력 제약이 있는 출력 추종 문제의 경우 추종 가능한 출력 지령치에 두 가지 형태의 제한이 있다. 앞서 설명한 바와 같이 주어진 출력 지령치와 입력 제약 조건을 고려하면 결코 달성할 수 없는 경우가 있다. 다른 하나는 주어진 입력 제약으로 도달 가능하지만 현재 상태 변수가 주어진 출력 지령치의 가해 불변 집합(feasible and invariant set)에 포함되지 않아서 앞에서 제안한 제어 기법을 적용할 수 없는 경우이다. 전자는 근본적인 한계에 해당하며 후자는 적절한 대처 방안이 필요하다.

원하는 출력 지령치가 현재 상태에서 추종 가능하지 않을 때 출력 지령치를 점진적으로 변화시킬 필요가 있다. 예를 들면, 만약 원하는 지령치가 r_n 이지만 현재 상태 변수가 r_n 의 가해 불변 집합에 포함되지 않아서 앞 장의 추종 제어 기법을 적용할 수 없다고 가정하자. 또한 이 경우에 현재 상태 변수가 지령치 r_1 의 가해 불변 집합에 포함되어 도달 가능하다고 가정하자. 궁극적으로 지령치 r_n 을 추종하기 위해서는 지령치를 우선 달성 가능한 r_1 에서 점진적으로 r_n 으로 변화시켜가야 한다. 그러나 이 때에 출력 지령치를 임의로 변화시킬 경우 안정도에 문제가 생길 수 있다. 즉, 만약 어떤 특정 시간에 지령치를 임의로 변경하였는데 그 순간의 상태 변수가 새로운 지령치의 불변 집합에 포함되지 않는다면 안정도에 문제가 생길 수 있다. 따라서 현재의 상태 변수가 변경하고자 하는 지령치의 불변 집합에 포함될 때만 지령치를 변경할 수 있다. 따라서 설계 단계에서 이러한 상황을 고려하여 지령치를 변경할 수 있는 체계적인 방법을 강구해야 한다. 안정도를 보장하면서 지령치를 변경하기 위하여서는 두 가지 사실이 중요하다. 하나는 지령치들의 불변 집합들을 미리 잘 계산해야 하고 다른 하나는 안정도를 유지하면서 지령치를 변경할 수 있는 조건을 잘 정의해야 한다는 것이다.

불변 집합 계산과 관련하여서 제어기 설계 단계에서 여러 출력 지령치(r_1, r_2, \dots, r_n)에 대해서 불변 집합을 구하여야 한다고 가정하자. 우선 불변 집합 (10)이 x 좌표에서는 다음과 같이 나타남을 주목한다.

$$[x(k) - x(\infty)]^T P [x(k) - x(\infty)] \leq 1.$$

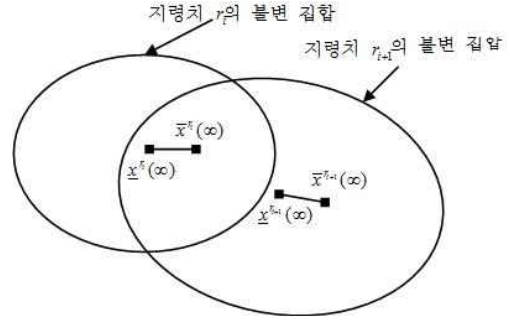


그림 2. 불변 집합 전환.

Fig. 2. Transition of invariant sets due to reference change.

그런데 여기서 불변 집합의 중심에 해당하는 상태 변수의 정상 상태 값 $x(\infty)$ 가 모델 불확정성으로 인하여 두 값이 될 수 있다. 따라서 불변 집합들을 미리 계산하는 과정에서 지령치 r_i 의 불변 집합을 계산할 때 그것의 두 개의 중심($\underline{x}^{r_i}(\infty), \bar{x}^{r_i}(\infty)$)이 지령치 r_{i+1} 의 불변 집합에 포함되도록 r_{i+1} 의 불변 집합이 정의되어야 한다.

그림 2는 이러한 상황을 설명한다. 처음 r_1 에 대한 불변 집합을 정의하고 이후의 불변 집합들은 이러한 조건을 만족하도록 정의한다.

이렇게 불변 집합들을 계산해 둔 상태에서 실제 제어 동작 중에 현재 지령치 r_i 에서 r_{i+1} 로 변경하기 위해서는 현재 상태 변수가 r_{i+1} 의 불변 집합에 포함되었는지 확인하면 된다. 지령치가 r_i 일 때 출력 추종이 성공적으로 달성됨에 따라 상태 변수는 r_i 의 불변 집합의 중심으로 수렴하게 된다, 즉 $(y(k) - r_i) \rightarrow 0$ 이다. 또한 r_{i+1} 의 불변 집합은 r_i 의 불변 집합의 중심을 포함되도록 생성되었다. 따라서 상태 변수가 r_{i+1} 의 불변 집합 내부에 속하게 되는 시간이 반드시 존재하게 된다. 그러므로 현재 지령치 r_i 에서 r_{i+1} 로 변경하고자 한다면 현재 상태 변수 $x(k)$ 가 r_{i+1} 의 불변 집합에 포함되었는지 확인하면 된다. 이것은 다음 두 부등식을 만족하는지 확인함을 통해 알 수 있다.

$$[x(k) - \underline{x}^{r_{i+1}}(\infty)]^T P [x(k) - \underline{x}^{r_{i+1}}(\infty)] \leq 1 \quad (14)$$

$$[x(k) - \bar{x}^{r_{i+1}}(\infty)]^T P [x(k) - \bar{x}^{r_{i+1}}(\infty)] \leq 1$$

이런 체계적인 과정을 통하여 안정도를 보장하면서 지령치를 변경할 수 있다.

IV. 모의실험

모의 실험을 위해서 그림 1에 나타난 회로 소자를 위해 다음과 같은 값들을 사용하였다[4].

$$\begin{aligned} R &= 48, C = 0.00033, L = 0.0001, R_{on} = 0.08, \\ R_L &= 0.34, v_g = 9, v_D = 0.67. \end{aligned}$$

이러한 값들을 이용하여 그림 1의 컨버터를 모델링한 연속 시간 모델을 0.1ms로 샘플링한 이산 시간 모델 (1)은 다음과 같다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.6091 & 0.6102 \\ -0.1849 & 0.8935 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 7.8888 \\ -0.0885 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.6533 & 0.0482 \\ -0.0146 & 0.9858 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 7.8888 \\ -0.0885 \end{bmatrix}$$

입력 제약은 입력의 정상 상태 값이 0.54라 가정하고 그 정상 상태 값 부근에서 입력 값이 결정된다고 가정하여 다음과 같은 값을 고려하였다.

$$u_{\min} = 0.24, \quad u_{\max} = 0.94.$$

이러한 모델에 대하여 방정식 (5)에 정의한 주어진 지령치에 따른 정상 상태값과 입력 제약값을 비교하면 그림 2와 같다. III 장에서 소개한 제어 이득과 불변 집합을 위의 파라미터를 이용하여 구하면 $r = -7$ 인 경우 다음과 같다.

$$K = [-0.1738 \quad 1.0241], \quad L = 0.0686$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0159 & -0.0233 & 0.0677 \\ -0.0233 & 0.1974 & -0.1195 \\ 0.0677 & -0.1195 & 0.7867 \end{bmatrix}$$

그림 3은 지령치를 변화시켜가면서 $\eta = 0$ 일 때와 $\eta = 1$ 일 때의 모델을 이용하여 계산한 입력의 정상 상태 값을 도시하였다. 앞서 설명하였듯이 입력의 정상 상태 값이 입력 제약 조건을 만족하여야 입력 제약 추종 문제가 유의미하다. 따라서 예를 들어 이 모델의 경우 출력의 지령치를 $r = -8$ 로 설정하였을 경우 $\eta = 0$ 일 때의 정상상태 입력값이 입력 제약을 만족하지 않으므로 의미 있는 허용 가능한 출력 지령치가 아니다. 이 경우 출력 지령치는 $-7.3 \leq r \leq -1.2$ 범위일 때 입력 제약 출력 추종 문제가 유의미해지므로 출력 지령치를 이 범위에서 설정하여야 한다.

그림 4는 설계된 제어기가 정상 상태 오차 없이 출력이 지령치를 추종하게 함을 보인다. 즉 출력 지령치를 -7과 -6으로 하였을 때 모두 시스템 출력이 성공적으로 지령치를 추종함을 알 수 있다. 이 과정에서 $r = -6$ 로 변경하는 과정에서 $k = 100$ 에서 상태 변수가 $r = -6$ 의 가해 불변 집합에 포함됨을 부등식 (14)를 통해 확인하여 만족함을 검증하였다. 그림 5는 그림 4에서 보인바와 같이 출력 추종을 달성하면서도 입력이 제약 조건을 만족함을 보인다.

그림 6은 수식 (10)에 정의된 오차 $e(k)$ 에 대한 불변 집합과 $e(k)$ 의 궤적을 그린 것이다. 불변 집합이므로 처음 집합 S 내부에서 출발한 궤적은 집합 S 를 벗어나지 않음을 확인할 수 있다.

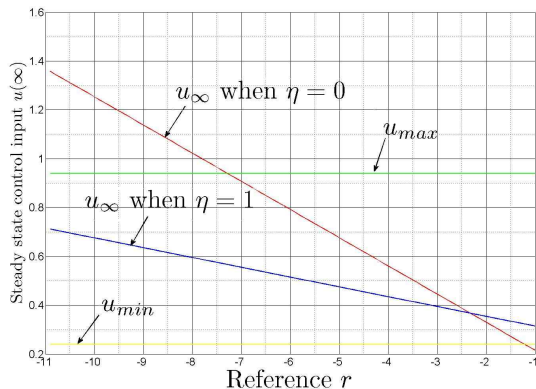


그림 3. 지령치와 입력 정상 상태 값의 관계.
Fig. 3. Relation between reference and steady state control input.

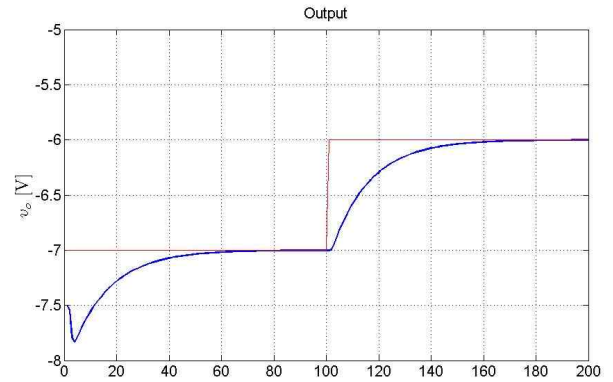


그림 4. 출력 추종 결과.
Fig. 4. Output tracking.

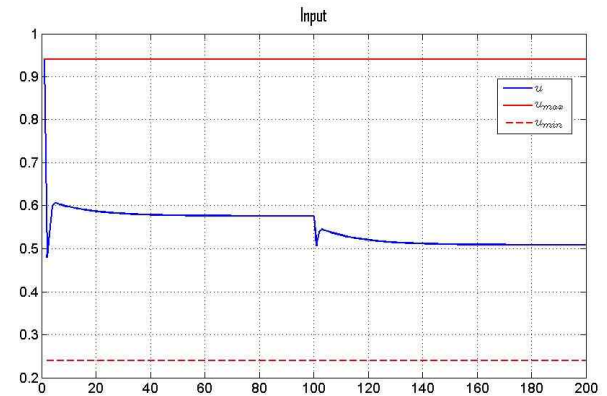


그림 5. 입력 제약과 인가된 입력.
Fig. 5. Input constraints and applied input.

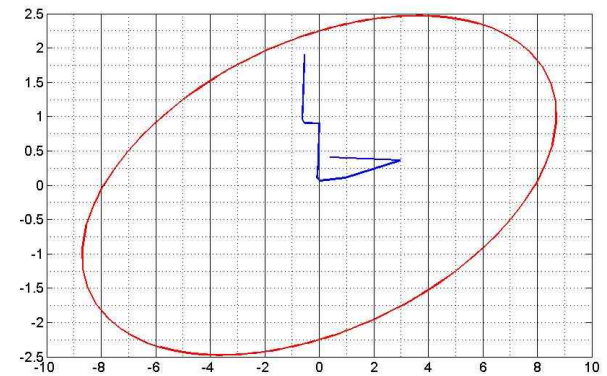


그림 6. 불변 집합과 상태 궤적.
Fig. 6. Invariant set and state trajectory.

V. 결론

본 논문에서는 컨버터 모델에 대한 입력 제약 출력 추종 제어 기법을 소개하였다. bilinear 형태의 컨버터 모델을 불확정성을 포함한 선형 시스템으로 나타낼 수 있음을 보인 후에 새롭게 표현한 모델에 대해서 최근에 제안된 입력 제약 선형 시스템을 위한 추종 제어 기법이 적용될 수 있음을 보였다. 또한 안정도를 유지하면서 출력 지령치를 변화시키는 방법을 소개하였다. 모의 실험을 통해 컨버터의 출

력 추종 제어 문제가 입력 제약에도 불구하고 성공적으로 해결됨을 보였다. 추후 연구 과제로 컨버터 출력 추종 달성 뿐만 아니라 성능까지도 만족할 만한 수준을 달성하는 추종 제어 기법 연구를 고려할 수 있다.

부록

부록에서는 LMI를 이용하여 식 (8)에 나타난 \tilde{v} 를 안정하게 하는 제어 이득 K 와 L 을 구하는 방법을 소개한다. 제어 법칙 (6)은 다음과 같이 등가적으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\hat{u}(k) &= \hat{u}(k-1) + y(k-1) - r \\ u(k) &= Kx(k) + L\hat{u}(k)\end{aligned}$$

이렇게 표현된 제어 법칙을 시스템에 인가하여 유도한 오차 동특성 방정식과 제어 법칙은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\tilde{e}(k+1) &= \hat{A}\tilde{e}(k) + \hat{B}(u(k) - u_o) \\ u(k) - u_o &= \hat{F}\tilde{e}(k)\end{aligned}$$

여기서

$$\tilde{e} = \begin{bmatrix} x(k) - x_o \\ \hat{u}(k) - \hat{u}_o \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ CI \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{F} = [K \ L]$$

이다. 따라서 폐루프 방정식은 다음과 같다.

$$\tilde{e}(k+1) = (\hat{A} + \hat{B}\hat{F})\tilde{e}(k).$$

이 방정식은 불확정성을 포함한 선형 시스템이므로 이를 안정화하는 이득 $\hat{F} (= [K \ L])$ 은 LMI 기법을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

참고문헌

- [1] G. C. Goodwin, D. Q. Mayne, T. Chen, C. Coates, G. Mirzaeva, and D. E. Quevedo, "Opportunities and challenges in the application of advanced control to power electronics and drives," *Proc. of 2010 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, pp. 27-39, 2010.
- [2] P. Cortes, M. P. Kazmierkowski, R. M. Kennel, D. E. Quevedo, and J. Rodriguez, "Predictive control in power electronics and drives," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 12, pp. 4312-4324, 2008.
- [3] P. Cortes and J. Rodriguez, *Predictive Control of Power Converters and Electrical Drives*, Wiley-IEEE Press, 2012.
- [4] T. Hu, "A nonlinear system approach to analysis and design of power electronic converters with saturation and bilinear terms," *IEEE Trans. Power Electronics*, vol. 26, no. 2, pp. 399-410, 2011.
- [5] F. Garofalo, P. Marino, S. Scala, and F. Vasca, "Control of DC/DC converters with linear optimal feedback and nonlinear feedforward," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 9, no. 6, pp. 607-615, Nov. 1994.
- [6] H. Sira-Ramirez, "Nonlinear P-I controller design for switchmode DC-to-DC power converters," *IEEE Trans.*

Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol. 38, no. 4, pp. 410-417, Apr. 1991.

- [7] R. D. Middlebrook and S. Cuk, "General unified approach to modeling switching power converter stages," in *Proc. IEEE Power Electron. Specialists Conference*, pp. 18-34, 1976.
- [8] M. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 32, no. 10, pp. 1361-1379, 1996.
- [9] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, *SIAM*, 1994.
- [10] M. Oliveira, J. Bernussou, and J. Geromel, "A new discrete-time robust stability condition," *Systems & Control Letters*, 37, pp. 261-265, 1999.
- [11] J. S. Lim, J.-S. Kim, and Y. I. Lee, "Robust tracking model predictive control for input-constrained uncertain systems," *Accepted in International Journal of Control*, 2012.
- [12] J. S. Lee, Y. I. Lee, and J. S. Lim, "Invariant set based model predictive control of a three-phase inverter system," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 2, pp. 149-155, 2012.
- [13] G. G. Park and J. W. Choi, "AC-DC converter control for power factor correction of inverter air conditioner system," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 13, no. 2, pp. 154-162, 2007.

김 정 수

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지, 제18권 제7호, 참조.

이 영 일

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지, 제18권 제2호, 참조.