대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 1, 17 ~ 35. Feb 2013

나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘의 확장에 관한 연구[1)]

김 진 환* · 박 교 식**

본 연구에서는 초·중등 수학교사의 전문성을 신장하기 위해, 문장제 상황을 바탕으로, 정수를 대상으로 하는 나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘을 분수(유리수)를 대상으로 하는 나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘으로의 확장에 대해 다룬다. 분수 나눗셈의 문장제 상황에 나타난 이산적 환경과 연속적 환경 및 등분제와 포함제에 따라 '나눈다'는 개념을 두 유형으로 분류하였다. 하나는 유리수체에서 현대대수학 관점에서 다루어지는 대수적 개념이며, 다른 하나는 몫과 나머지가 동반된 정수 나눗셈 알고리즘을 유리수 나눗셈 알고리즘으로 일반화하는 개념이다. 후자의 개념을 중심으로 학교수학에서 다루어지거나 다룰 수 있는 문제 상황을 제시하며, 분수를 대상으로 하는 나눗셈 알고리즘, 최대공약수와 최소공배수, 유클리드 알고리즘에 관해 논의한다.

Ⅰ. 서론

수학교사는 학생들의 수학적 활동을 안내하고 그 활동의 의미를 분석할 수 있는 전문적인 지식을 가지고 있어야 한다. Shulman(1986, 1987)의 교수법적 내용 지식(PCK)이 제안된 이후로 수학교사의 PCK에 대한 논의가 활발하게 진행되어 왔다. 최근에는 Ball, Hill & Bass(2005)와 Ball, Thames, & Phelps(2008) 등이 교과 내용 지식과 교수법적 내용 지식의 두 범주로 하여 수학교사의 PCK를 보다 세분화하고 개념화하였다. 수학 교과의 관점에서 수학 교사가 갖추어야 하는 수학 교과 내용 지식은 단지 학생들에게 가르쳐야 하는 내용에 한정되지 않는다. 전문성이 있는 교사는 그것을 학생들의 수준에 맞게 가르치는 능력도 갖추어야 하지만, 그것보다 더 많고 더 깊이 있는 지식을 가지고 있어야 한다.

본 연구는 수학 교사의 전문성 신장의 일환으로, 특히 정수를 대상으로 하는 나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘을 유리수를 대상으로 하는 나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘으로 확장할 수 있다는 것에 초점을 맞춘다. 그러나 학교수학에서 이러한 확장 가능성은 명시적으로 언급되어 있지 않다. 그런 까닭에 분수 나눗셈에서의 '몫(quotient)'과 '나머지(remainder)'의 처리에서 자주 모호함이 나타난다. 특히, 분수 나눗셈 상황을 포함한 문장제의 구성에서 상당한 오류가 발생한다는 것이 알려져 있다. 잘 알려진 Ma(2002)의 연구를 포함하여, 이에 관한 국내외의 연구가 다수 있다. 이러한 연구는 크게 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 한 부류는 예비수학교사나 수학교사를 대상으로 한 것으로, 분수 나눗셈에 적합한 문장제의 구성을 통해 그들의 불완전한 지식을 드러내는 것

* 영남대학교 (kimjh@ynu.ac.kr)
** 경인교육대학교 (pkspark@gin.ac.kr)
1) 이 연구는 2011학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임

(김민경, 2003; 박교식, 송상헌, 임재훈, 2004; 방정숙, Li, 2008; 서관석, 전경순, 2003; 이종욱, 2005)이고, 다른 한 부류는 분수나 분수 나눗셈 계산의 의미를 적절한 맥락에서 찾아 형식적인 나눗셈 계산을 보완하는 것이다(김명운, 장경윤, 2009; 방정숙, 이지영, 2009; 백선수, 2004; 임재훈, 2007; Yim, 2010).

그러나 이러한 일단의 연구에서, 나눗셈의 대상이 자연수, 소수, 분수로 확장되어 있음에도 '나눈다(divide)'는 것의 의미를 일관되고 통일적으로 제시하고 있지는 않다. 김창수, 전영배, 노은환(2011)은 유한소수의 나눗셈 알고리즘을 측정 단위에 따라 나머지를 규정하여 다루고 있지만, 일반적 의미의 나머지의 개념을 다루고 있지 않으며, 정수 나눗셈 알고리즘을 유리수 나눗셈 알고리즘으로 자연스럽게 확장하는 것을 고려하지 않고 있다. 박교식, 권석일(2012)에서도 초등학교 수학 교과서에서 소수 나눗셈에서의 몫과 나머지의 의미가 일관되지 않음을 지적하고 있지만, 일반적 의미의 나머지 개념을 다루고 있지는 않다. 특히 김명운, 장경윤(2009)은 나머지의 개념이 유리수에서는 언급될 수 없다고 하였다.

본 연구는 이러한 실상에 주목하여, 정수를 대상으로 하는 유클리드 알고리즘을 유리수를 대상으로 하는 유클리드 알고리즘으로 자연스럽게 확장하는 것과 그것을 뒷받침하는 유리수 나눗셈 알고리즘과 '나눈다'의 개념에 관해 논의한다. 특히 분수 나눗셈의 여러 가지 맥락을 분류한 연구를 바탕으로 나머지의 개념과 이에 기초한 나눗셈 알고리즘에 관해 논의한다. 또, 이에 준하여 최대공약수와 최소공배수 개념에 관하여 논의하며, 알고리즘의 확장에서 정수와의 관계를 살펴보고 유리수와 무리수의 차이점도 논의한다.

본 연구에서는 일상적 맥락을 고려하여 '나눈다'의 개념, 나눗셈 알고리즘, 유클리드 알고리즘을 0을 포함한 양의 정수와 양의 유리수로 한정하여 다룬다. 분수는 유리수를 정의하는 방법이고 표현의 방법이며 동치인 분수들이 같은 맥락을 만들어 낼 때 분수는 유리수로 유리수는 분수로 혼용하여 쓸 수 있다. 본 논문에서는 분수를 유리수의 표현으로 사용하고 유리수와 분수의 용어를 동일시한다.

Ⅱ. 분수 나눗셈으로 해결되는 문장제 맥락과 나눗셈 알고리즘

본 장에서는 분수 나눗셈의 여러 가지 맥락을 분류한 연구를 바탕으로 나머지의 개념과 이에 기초한 나눗셈 알고리즘에 관해 논의한다. 계산 결과에만 집중하고 연산이 가지는 의미의 가치를 간과하면, 일반적인 수학 지식으로 의미 있는 정립과는 거리가 먼 고립된 기교로 귀착될 수 있다(Gravemeijer & Galen, 2003).

1. 나눗셈에 적합한 문장제 맥락과 나머지의 개념

자연수 나눗셈에서 발생되는 나머지의 의미를 알아보기 위해 다음의 상황 ①~④와 나눗셈 $13 \div 5 = 2\frac{3}{5}$사이의 관계를 살펴보기로 한다. 이 네 상황의 공통점은 양이 모두 자연수로 주어지며 피제수는 13이고 제수는 5라는 것이다.

상황 ① : 13개의 색연필을 한 학생에게 5자루씩 나누어 줄 때 몇 명에게 나누어 줄 수 있습니까? (교육과학기술부, 2011a)

상황 ② : 13개의 색연필을 5명의 어린이에게 나누어 줄 때 한 명이 받는 색연필

은 몇 개입니까?

상황 ③ : 우유 13L을 한 명에게 5L씩 준다면 몇 명에게 나누어 줄 수 있습니까?

상황 ④ : 우유 13L을 5명에게 나누어 주면 한 명이 몇 L의 우유를 받습니까?

실생활의 입장에서 이 네 상황의 대상(양)과 나누는 대상(양)의 속성을 살펴보자. 상황 ①~③에서는 13을 5로 나누어 얻게 될 수(몫)가 범자연수로 주어지는 이산양이고, 상황 ④에서는 13을 5로 나눈 결과는 유리수 범위에서 주어지는 수로 연속량이다. 상황 ①~③에서 사람의 수와 색연필의 개수는 범자연수(0 혹은 자연수)로 주어지는 바, 그것은 $\frac{1}{2}$개(명) 또는 $\frac{1}{3}$개(명)라고 말하는 것이 적절치 않은 양(즉, 이산량)이다. 상황 ①~③의 답을 $2\frac{3}{5}$명 혹은 $2\frac{3}{5}$개라고 하는 것에는 교육적으로는 심각한 문제점이 있다(박교식, 송상헌, 임재훈, 2004; 임재훈, 김수미, 박교식, 2005; Ma, 2002). 즉, 나눗셈 계산 결과인 $2\frac{3}{5}$ 혹은 $\frac{13}{5}$을 상황 ①~③의 답으로 보아서는 안 된다. 상황 ④에서는 우유 $\frac{1}{2}$L, $\frac{1}{5}$ L, … 라고 말하는 것이 적절하며, 어떤 유리수로 주어질 수 있는 양(즉, 연속량)이다.

상황 ①은 초등학교 수학 교과서 ≪3-2≫의 54쪽에서 다루고 있다. 이 경우 13을 5로 나누면 몫은 자연수 2이고, 나머지는 3인 바, 이것을 식으로 '13÷5=2 … 3'와 같이 나타낸다. 이때 몫인 2(명)는 교육적으로나 상황적으로도 옳다. 초등학교 수학에서는 이와 같이 자연수 나눗셈에서 몫과 나머지의 개념을 도입하고, 몫을 범자연수 범위에서 구하며, 나머지는 제수 5보다 작고 0이상인 수로 정하고 있다. 여기서 정수 나눗셈 알고리즘이 처음으로 나타나고 있다. 상황 ②, ③에서도 13을 5로 나누면 몫이 2이고 나머지가 3인 바, 그 답을 2개 혹은 2명으로 보아야 한다. 한편, 상황 ④에서는 나눗셈으로부터 얻은 $2\frac{3}{5}$L가 답으로 적절한 바, 13을 5로 나누면 몫이 분수(유리수) $2\frac{3}{5}$이고 나머지는 없다. 이러한 논의를 바탕으로 상황 ①, ②, ③을 곱셈과 덧셈으로 나타내면 $13=5\times2+3$ (몫이 자연수 2이고 나머지가 3)이다. 상황 ④는 덧셈 없이 곱셈으로 $13=5\times2\frac{3}{5}$으로 나타나며, 이때 몫 $2\frac{3}{5}$은 정수 범위를 넘어 유리수 범위에서 주어진다.

이제 자연수나 정수로 제한하지 말고 분수(유리수)로 확대하여 분수 나눗셈에서의 나머지 문제에 관하여 논의하기로 한다. 분수의 개념은 초등학교 3학년 수학에서 도입되어 초등학교 4학년부터 6학년까지에서 양의 분수에 대한 사칙계산을 취급하고 있다. 분수와 유리수는 초등학교 수학에서 가장 복잡한 영역으로 학생들이 어려워하는 개념이다(Ball, 1990). 그간 분수 나눗셈에 의미를 주기 위한 상황이나 모델에 대한 연구와 그 상황이나 모델에 대한 교사의 지식에 대한 연구가 활발하게 이루어져 왔다(강영란, 조정수, 김진환, 2012; 박교식 외, 2004; 임재훈, 2007; 임재훈 외, 2005; Yim 2010; Ma, 2002; Siebert, 2002; Sinicrope etal., 2002; van de Walle, 2004). 이러한 연구에서 다루어지는 다음 상황을 분수 나눗셈과 관련짓고, 그 나머지에 관해 논의해 보자.

상황 ⑤ : 우유 $\frac{3}{2}$L를 6명에게 나누어 줄 때 한 명이 받게 될 우유는 몇 L입니까?

상황 ⑥ : 어떤 수의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$이 되는 그 어떤 수는 무엇입니까?

상황 ⑦ : $1\frac{3}{4}$안에 $\frac{1}{2}$이 몇 번 들어갑니까?

상황 ⑧ : 우유 $1\frac{3}{4}$L를 한 사람이 $\frac{1}{2}$L씩 마신

다면 몇 명이 마실 수 있습니까?

상황 ⑨ : 철사 $\frac{1}{2}$m의 무게가 $1\frac{3}{4}$kg이라면 철사 1m의 무게는 몇 kg입니까?

각 상황에서 양은 모두 유리수(분수)에서 택한 것이다. 상황 ⑤는 분수 나눗셈 $\frac{3}{2}\div6=\frac{1}{4}$에 적합한 문장제이고, 상황 ⑥~⑧은 분수 나눗셈 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$에 적합한 문장제이다(Ma, 2002; 박교식 외, 2004). 상황 ⑤의 답으로는 나눗셈 결과인 $\frac{1}{4}$(L)가 바르고, 상황 ⑥의 답으로는 $3\frac{1}{2}$가 바르다. 그러나 상황 ⑦, ⑧에서는 나눗셈을 한 결과를 답으로 보기보다는, 상황을 고려한 3번, 3명이 각각 교육적으로 바른 답이다. 구하고자 하는 양이 범자연수로 주어지는 이산양이기 때문이다. 위의 논의를 바탕으로 상황 ⑤는 $\frac{3}{2}=6\times\frac{1}{4}$로 나타낼 수 있다. 상황 ⑥은 $1\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}$로 나타낼 수 있는 데, 더하는 항이 없고 몫이 유리수 범위에서 주어진다. 상황 ⑦, ⑧은 $1\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{4}$ (몫이 자연수 3, 나머지가 $\frac{1}{4}$)로 나타낼 수 있다. 이때 $1\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times(3+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{4}$임에 유의해야 한다. $1\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{2}$은 오류이다.

지금까지의 논의에서, 주어진 양과 나누는 양 사이의 관계에서 몫을 범자연수(0 혹은 자연수)와 유리수(분수)의 어느 것으로 볼 것인가 하는 것이 중요하다는 것을 알 수 있다. 주어진 양과 나누는 양이, 상황 ①, ③, ⑦, ⑧과 같이, 서로 같은 양으로 주어져 있는 상황을 포함제(measurement division, 측정모델)의 맥락이라고 한다. 주어진 양과 나누는 양이, 상황 ②, ④, ⑤와 같이, 서로 다른 양으로 주어져 있는 상황을 등분제(partition division, 분할모델)의 맥락이라고 한다. 상황 ⑥, ⑨처럼 단위당 주어지는 양을 구하는 상황은 단위 비율 결정의 맥락이라고 한다(박교식 외, 2004; Ma, 2002; Sinicrope etal., 2002; van de Walle, 2004). Ma(2002)는 상황 ⑥을 등분제로 소개하고 있으나, 등분은 제수가 자연수인 경우에 적합하다고 할 수 있다. 제수가 자연수가 아닌 분수인 경우에는 Sinicrope etal가 분류한 단위 비율 결정의 맥락이 더 적절하며 단위 비율 결정의 맥락은 포함제와 달리 분수 나눗셈의 결과와 실제 문제의 해가 그대로 일치할 수 있다는 장점이 있다(박교식 외, 2004).

자연수를 포함한 분수 나눗셈 상황에서 나머지가 발생하는 것은 몫이 문맥적으로 범자연수로 주어져야 하는 경우이다. 위의 상황에 기초하여 분수 나눗셈 유형에 따라 나머지가 발생하는 상황을 <표 Ⅱ-1>과 같이 분류해 볼 수 있다.

포함제의 맥락에서 구하는 해는 범자연수로 나타난다. 그 해는 상황에 따라 몫 또는 몫에

<표 Ⅱ-1> 나머지가 발생하는 상황

나눗셈 상황	몫이 취하는 값(양)	나머지	수학적 적용
포함제 ①, ③	범자연수(이산량)	고려할 필요, 범자연수	정수 나눗셈 알고리즘
포함제 ⑦, ⑧	범자연수	고려할 필요, 음이 아닌 유리수	유리수 나눗셈 알고리즘으로 확장하는 것을 고려
등분제 ②	범자연수	고려할 필요, 범자연수	정수 나눗셈 알고리즘
등분제 ④, ⑤	유리수(분수, 연속량)	없다	유리수체에서 연산 (나눗셈의 결과와 실제 문제의 해가 일치)
단위비율의 결정 ⑥, ⑨	유리수(분수, 연속량)	없다	유리수체에서 연산 (나눗셈의 결과와 실제 문제의 해가 일치)

1을 보태준 값이다(van de Walle, 2004). 후자의 예로 “배에 8대의 차를 실어 강을 건너 나를 수 있다. 25대의 차를 나르려면 몇 번 실어 날려야 하는가?”, “$\frac{1}{2}$L을 담을 수 있는 병에 우유 $1\frac{3}{4}$L을 옮기려면 최소한 몇 개의 병이 필요한가?” 등을 들 수 있다.

2. 분수(유리수) 나눗셈 알고리즘과 나머지

정수 나눗셈 알고리즘은 정수론에서 다루어지는 기장 기본적인 정리로 ‘나눈다’의 개념을 제시해 주며 약수와 배수 개념을 도입하게 해준다. 최대공약수를 구하는 유클리드 알고리즘을 생성하는 데도 중요한 역할을 한다. 여기서는 Ⅱ-1의 상황을 배경으로 정수 나눗셈 알고리즘과 이를 일반화한 유리수 나눗셈 알고리즘에 대해 논의한다. 정수 나눗셈 알고리즘은 다음과 같다.

> [정수 나눗셈 알고리즘] 두 정수 m, n (n>0)에 대하여
>
> $$m=qn+r,\ 0\le r<n$$
>
> 을 만족하는 정수 q와 r가 유일하게 존재한다. (q를 몫, r를 나머지라고 한다.)

앞에서 이 알고리즘이 적용되는 경우가 포함제 상황 ①, ③과 등분제 상황 ②에서 나타났다. 여기서는 주어진 양이 이산량이거나 몫이 이산량으로, 분수 나눗셈에서 유도된 나눗셈 알고리즘이 몫(범자연수)과 나머지를 유일하게 결정하는 수학적 원리로 작용한다.

주어진 양이 이산량이 아닌 포함제의 상황 ⑦, ⑧을 보자. 여기서 구하고자 하는 해는 나눗셈 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$의 결과와 $1\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}$의 몫 3 $\frac{1}{2}$과 다르다. 적절한 해는 범자연수이고, 이 해를 구하기 위해서는 위의 식 $1\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}$을 $1\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{4}$로 변형하는 것이 필요하다. 이것이 정수 나눗셈 알고리즘을 분수(유리수) 나눗셈 알고리즘으로 확장하는 것이 필요하다는 것을 시사한다. 식 $1\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{4}$은 $1\frac{3}{4}$을 $\frac{1}{2}$로 나눈 몫이 3이고 나머지가 $\frac{1}{4}$임을 보여준다. 이처럼 몫이 정수라는 맥락에서 다음과 같이 유리수 나눗셈 알고리즘을 자연스럽게 고려할 수 있다. 이 알고리즘을 정수로 축소시키면 정수 나눗셈 알고리즘이 되므로, 정수 나눗셈 알고리즘을 유리수 나눗셈 알고리즘으로 일반화한 것이라고 할 수 있다.

> [유리수 나눗셈 알고리즘] 두 유리수 a, b (b>0)에 대하여
>
> $$a=qb+r,\ 0\le r<b$$
>
> 를 만족하는 정수 q와 유리수 r가 유일하게 존재한다. (q를 몫, r를 나머지라고 한다.)

이 유리수 나눗셈 알고리즘에서 몫 q를 정수로 제한하고 있음을 간과해서는 안 되며, 나머지 r은 0이상이고 b보다 작은 유리수이다. 이렇게 하면 김명운, 장경윤(2009)과는 달리 유리수 나눗셈 알고리즘에서 자연스러운 나머지를 생각할 수 있다. 여기서 존재성과 유일성에 관해 엄밀하게 논의하는 대신, 하나의 예를 제시하기로 하자. $a=\frac{38}{5}$, $b=\frac{6}{5}$에 대해 위의 알고리즘의 의미를 알아보자. 다음과 같이 뺄셈에 기초한 유한 과정을 거치면, 정수 q와 음이 아닌 유리수 r가 유일하게 정해짐을 알 수 있다. 이런 의미에서 알고리즘이란 용어는 적절하다.

$\frac{38}{5}-(-1)\cdot\frac{6}{5}=\frac{44}{5}$ ⇨ $\frac{38}{5}-(0)\cdot\frac{6}{5}=\frac{38}{5}$

⇨ $\frac{38}{5}-(1)\cdot\frac{6}{5}=\frac{32}{5}$ ⇨ $\frac{38}{5}-(2)\cdot\frac{6}{5}=\frac{26}{5}$

⇨ $\frac{38}{5}-(3)\cdot\frac{6}{5}=\frac{20}{5}$ ⇨ $\frac{38}{5}-(4)\cdot\frac{6}{5}=\frac{14}{5}$

⇨ $\frac{38}{5}-(5)\cdot\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$ ⇨ $\frac{38}{5}-(6)\cdot\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$

⇨ $\frac{38}{5}-(7)\cdot\frac{6}{5}=-\frac{4}{5}$

위의 과정으로부터 {$\cdots$, $\frac{44}{5}$, $\frac{38}{5}$, $\frac{32}{5}$, $\frac{26}{5}$, $\frac{20}{5}$, $\frac{14}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{2}{5}$, $-\frac{4}{5}$, $\cdots$}에서 가장 작은 음이 아닌 유리수 $\frac{2}{5}$가 나머지 r ($0\leq r<b$을 만족)이고, 이에 대응하는 몫 q는 정수 6이다.

초등학교 수학 교과서 ≪3-2≫에서 자연수 나눗셈의 몫과 나머지를 다룬다는 점에서 정수 나눗셈 알고리즘의 적용 사례를 볼 수 있다. 초등학교 수학 교과서 ≪6-1≫의 28쪽과 29쪽에서 길이가 11.5m인 실을 1.6m씩 잘라서 풍선을 묶는 데 사용할 때 1.6m의 실은 몇 개이고 남은 실은 몇 m인지를 알아보는 활동을 제시하고 있다(교육과학기술부, 2011c). 이 활동에서 11.5에서 1.6을 뺄 수 있을 때까지 빼고 남는 것은 얼마인지와 나눗셈 11.5÷1.6의 몫과 나머지가 각각 얼마인지를 알아보고 있다. 이 결과를 11.5÷1.6=7 … 0.3으로 나타내었고 곱셈과 덧셈을 사용하여 1.6×7+0.3=11.5로 검산하였다. 이 소수 나눗셈은 분수 나눗셈 $\frac{115}{10}\div\frac{16}{10}$ (혹은 $\frac{23}{2}\div\frac{8}{5}$)에서 몫을 자연수 범위로 하고 나머지를 구하는 것으로 전환된다. 이 활동은 분수(유리수) 나눗셈 알고리즘을 적용하는 한 사례로 볼 수 있다.

Ⅲ. 최대공약수와 최소공배수

자연수와 그 사칙계산은 초등학교 1학년 수학부터 4학년 수학까지 다루어지고, 이를 바탕으로 초등학교 5학년 수학과 중학교 1학년 수학에서 자연수 범위에서의 약수, 배수, 공약수, 공배수, 최대공약수, 최소공배수의 개념을 도입한다(교육과학기술부, 2008a, 2008b). 자연수 범위에서의 약수와 배수 개념은 분수의 이해와 분수의 사칙계산을 위한 기초 개념이다(최지영, 강완, 2003). 약수와 배수 개념은 ‘나눈다(나누어떨어진다)’는 개념을 동반한다. 수에 대한 제한 조건이 없다면 “2는 5를 나누는가? $\frac{1}{2}$은 $\frac{1}{3}$을 나누는가? $\frac{1}{3}$은 2를 나누는가? 0은 2의 배수인가? 0은 0의 배수인가? $\frac{1}{3}$은 $\frac{2}{3}$의 약수인가?” 답은 어떨까? 이 절에서는 이러한 질문에 답할 수 있도록 ‘나눈다’, 약수 및 배수 개념을 유리수로 확장한다. 또, 유리수 나눗셈 알고리즘에 기초한 약수와 배수 개념에 초점을 맞추어 유클리드 알고리즘을 유리수로 확장하는 것에 관해 논의한다.

1. 유리수에 대한 두 유형의 약수와 배수

약수와 배수 개념은 ‘나눈다’는 개념과 더불어 정의된다. 학교수학이나 정수론에서 다루는 ‘나눈다’ 및 약수와 배수 개념은 (정의 Ⅲ-1)에서 나온다.

> (정의 Ⅲ-1) 두 정수 m, n($n\neq0$임을 가정)에 대하여, n이 m을 ‘나눈다’는 것은 $m=nk$ 인 ‘정수’ k가 존재하는 것이다.

“2는 5를 나누는가?”에 대해 2와 5를 정수로 보고, (정의 Ⅲ-1)에 따르면 분명히 그렇지 않다. 그런데 2와 5는 유리수이기도 하므로, 유리

수로 보면 2는 5를 나눈다. 이것은 (정의 Ⅲ-2)에 따른 것이다.

> (정의 Ⅲ-2) 두 유리수 a, $b(b\neq0)$에 대하여, b가 a를 '나눈다'는 것은 $a=bx$인 '유리수' x가 존재하는 것이다.

"2가 5를 나누지 못한다."와 "2가 5를 나눈다."는 2와 5를 정수 범위에서 보느냐 유리수 범위에서 보느냐에 좌우된다. 이것은 현대대수학의 관점에 따른 것이다. 한편, 예를 들어 두 정수 2, 5에 대해 정수 2가 정수 5를 나누지 못하면, 유리수 2가 유리수 5를 나누지 못한다는 관점에 주목해 보자. 이러한 관점은 현대대수학과는 다른 의미에서 '나눈다'의 개념, 약수와 배수 개념, 그리고 맥락을 제시한다.

먼저 현대대수학에서 다루는 '나눈다'의 개념과 이에 동반하는 약수와 배수 개념을 살펴본다. 현대대수학에서는 덧셈과 곱셈이 정의된 정수의 집합 $\mathbb{Z}$를 정수환이라 하고, 정수환의 구조를 추상화하여, 단위원을 가지는 가환환(ring with unity)으로서 영인자(zero divisors)를 포함하지 않는 대수적 연산 구조를 가지는 집합 D를 정역(integral domain)이라고 한다. 정역 D에서 두 원소 a, $b(\neq0)$에 대해, b가 a를 '나눈다'는 것은 $a=bx$인 원소 x가 D에 존재하는 것으로 정의하며, 이것을 $b|a$로 나타내고 a를 b의 배수, b를 a의 약수라고 한다. 정역의 예로 정수 집합 $\mathbb{Z}$뿐만 아니라 유리수 집합 $\mathbb{Q}$와 같은 모든 체(field)를 들 수 있다. 정역 D가 체가 된다면 0(덧셈에 대한 항등원)이 아닌 모든 원소는 곱셈에 대한 역원을 가지게 된다. 그러므로 임의의 원소 a, $b(\neq0)$에 대해 $a=bx$인 $x=b^{-1}a$가 D에 존재하게 되어 $b(\neq0)$은 모든 원소를 나누게 되어 $b(\neq0)$는 D의 모든 원소의 약수가 된다(김응태, 박승안, 2005; Fraleigh, 2009).

유리수체에서 유리수 $b(\neq0)$는 항상 임의의 유리수 a를 나누어 a의 약수가 된다. 또한 0이 아닌 모든 유리수는 단원이고 0이 아닌 두 유리수는 늘 동반원(associate element)이 된다. 단원 u는 0이 아닌 단위원 1의 약수를 말하며, $d|d'$과 $d'|d$를 동시에 만족하는 두 원소 d, d'을 서로에 대한 동반원이라 한다. 또, d, d'이 동반원이면 $d'=ud$(u는 단원)로 표현된다. 따라서 현대대수학 관점에서 보면 유리수체에서 2가 5를 나누고, 또한 5가 2를 나누며, $\frac{1}{3}$은 $\frac{2}{3}$를 나누고, $\frac{2}{3}$는 또한 $\frac{1}{3}$을 나눔으로써 서로가 서로의 약수이자 배수이다. 유리수체는 정수환을 포함하는 연산 구조를 가지지만, 유리수체에서 두 자연수는 항상 서로가 서로를 나누게 되어 정수 나눗셈 알고리즘을 보존한다고 볼 수 없다.

Ⅱ-1에서 다룬 나눗셈과 관련된 상황을 고려하여 '나눈다'의 의미를 살펴보면, 유리수에 대해 '나눈다'('나누어 떨어진다'를 의미)는 관점을 현대대수학 관점(정의 Ⅲ-2)과 유리수 나눗셈 알고리즘(Ⅱ-2에 제시)에서 나머지가 0인 관점의 두 유형으로 나누어 볼 수 있다. <표 Ⅱ-1>에서 상황 ④, ⑤, ⑥, ⑨에서는 제수가 피제수를 나누고 약수가 된다. 이 네 상황에서는 '나눈다'는 개념은 피제수가 제수와 어떤 유리수의 곱으로 나타낼 수 있다는 것을 정의로 사용한 것이다. 반면에 상황 ①, ②, ③에서 5는 13을 나누지 못하고, 상황 ⑦, ⑧은 분수(유리수)를 다루지만 나눈다고 할 수 없다. 이것은 유리수체로 다루는 대수적인 개념과는 다른 또 다른 유형의 '나눈다'는 개념의 있음(있어야 함)을 시사한다.

이제, 상황 ①, ②, ③, ⑦, ⑧과 어울리는 '나눈다'는 개념을 알아보기로 한다. 이것은 Ⅱ장

에서 다루어진 정수 나눗셈 알고리즘을 유리수로 일반화한 유리수 나눗셈 알고리즘으로 얻어진다. 두 유리수 a, b에 대하여($b\neq0$임을 가정), b가 a를 '나눈다'는 것은 유리수 a, $|b|$에 적용한 나눗셈 알고리즘 $a=q|b|+r$에서 q는 '정수'이고 '나머지 r가 0'이 됨을 의미한다. 이것은 $a=bk$인 '정수' k가 존재하는 것, 즉 a가 b의 '정수배'가 되는 것을 말한다. 또한 이것은 유리수가 정수인 경우 정수에 대한 나눗셈 알고리즘이 적용된 '나눈다'의 의미를 가지고 있다. 유리수 b가 a를 나누면 $-b$도 a를 나눈다. b를 a의 약수라 하고 a를 b의 배수라 한다. 이 개념에 의하면 $\frac{1}{3}$은 $\frac{2}{3}$의 약수이고 $\frac{1}{3}$은 2의 약수이나, $\frac{2}{3}$는 $\frac{1}{3}$의 약수가 아니고 $\frac{1}{3}$은 $\frac{1}{2}$의 약수도 아니다. 본 연구에서는 편의상 음이 아닌 유리수를 사례로 다루고 있지만, 음의 유리수의 경우도 쉽게 다루어 질 수 있다. 이러한 관점에서 유리수 $\frac{4}{5}$는 무수히 많은 유리수의 약수 즉 $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, … 와 이들에 음을 취한 유리수가 모두 $\frac{4}{5}$의 약수이다. 이런 약수의 속성에서 분수 $\frac{k}{n}$가 $\frac{4}{5}$의 약수일 필요충분조건은 k가 정수로서 4의 약수이고 n은 0이 아닌 5의 배수인 것이다. $\frac{4}{5}$의 배수는 $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$, 4, …, $\frac{56}{5}$, 12, … 등과 같이 $\frac{4}{5}k$ (k는 정수)의 형태로 나타나는 유리수이다.

정수 범위에서는 6의 약수로 6, -6, 3, -3, 2, -2, 1, -1이 있지만, 유리수 범위에서는 6의 약수로 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}(=\frac{1}{2})$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$, … 과 이들의 음을 취한 수가 있다. 정수 k가 6의 약수이고 정수 n이 0이 아닌 정수이면 분수 $\frac{k}{n}$는 6의 약수가 된다. 6의 배수는 $6k$(k는 정수)로 표현 가능하고, … -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, …가 6의 배수이다.

지금까지의 논의로부터 유리수 범위에서 두 가지 유형의 '나눈다'는 개념이 있고, 이에 따라 정해지는 약수와 배수 개념도 두 가지가 있고, 나눗셈 상황에서 이 두 가지가 선택될 수 있음을 보았다.

2. 유리수에 대한 최대공약수와 최소 공배수

유리수 범위에서 최대공약수와 최소공배수에도 두 유형이 있다. 이것은 '나눈다'의 개념과 이에 따른 약수와 배수 개념에 따른 것이다. 먼저 유리수체에서 0인 아닌 유리수는 서로가 서로를 나눈다는 결과를 초래하는 현대대수학 관점의 gcd와 lcm의 형식화된 정의를 살펴보자. 정수 집합이나 유리수체를 예로 하는 정역이나 체에서 최대공약수 및 최소공배수의 정의는 다음과 같다.

> (정의 III-3) 두 조건 "(i) $d|a$, $d|b$이다."와 "(ii) $e|a$, $e|b$이면 $e|d$이다." 을 만족할 때 $d\in D$을 정역 D의 원소 a, b의 최대공약수라 한다. 또한 "(i) $a|l$, $b|l$이다."와 "(ii) $a|m$, $b|m$이면 $l|m$이다."의 두 조건을 만족할 때 $l\in D$을 D의 원소 a, b의 최소공배수라고 한다(김응태, 박승안, 2005).

이 추상화된 (정의 Ⅲ-3)에 의하면 d, d'이 a, b의 최대공약수이면 서로 동반원으로 $d'=ud$(u는 단원)로 나타내어진다. 따라서 단원 인수를 무시한다면 최대공약수는 단 하나라 할 수 있다. 정수환 $\mathbb{Z}$에서 k, $-k$가 서로 동반원이

고 1과 -1만이 단원이다. 정수환 Z에서 최대공약수와 최소공배수를 하나로 정하기 위해, 즉 동반원 중에서 양의 정수로 제한하고 있다. 이에 자연수에 대해서는 학교수학에서 다루는 최대공약수와 최소공배수와 일치한다. 유리수체에서 0이 아닌 두 유리수에 대해 0이 아닌 유리수는 이들의 최대공약수이기도 하고 최소공배수이기도 하다. 0은 이들의 최대공약수는 아니지만 최소공배수가 된다. 유리수체에서는 최대공약수와 최소공배수는 형식적인 의미만 있을 뿐이다.

자연수 집합에서 최대공약수나 최소공배수는 다음과 같이 정의하고 있다: "두 정수 a, b의 최대공약수는 a와 b를 나누는 가장 큰 정수를 말하고, 이 정수를 gcd(a,b)로 나타낸다." 최대공약수는 항상 양의 정수이다. 이 개념에 직접적으로 관련하여 학교수학에서 다루어 질 수 있는 대표적인 문제 상황으로 다음을 들 수 있다.

상황 ⑩ : 연필 48자루, 지우개 72개를 최대한 많은 학생에게 남김없이 똑 같이 나누어 주려고 한다. 몇 명에게 나누어 줄 수 있는가? (교육과학기술부, 2011b).

상황 ⑪ : 가로가 4cm이고 세로가 6cm인 직사각형 모양의 카드를 나란히 늘어놓아 가능하면 작은 정사각형을 만들고자 한다. 이 정사각형의 한 변의 길이를 몇 cm로 하면 되는가?

상황 ⑫ : 가로가 45m이고 세로가 27m인 바닥을 같은 크기의 정사각형의 타일로 덮으려 한다. 타일의 수가 최소가 되게 하려면 이 타일의 크기는 어떻게 주어져야 하는가? 또, 필요한 타일은 몇 개인가?

상황 ⑬ : 가로가 33cm이고 세로가 12cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이에서 가장 큰 정사각형을 잘라내고, 남은 종이에서 가장 큰 정사각형을 잘라낸다. 마지막 남은 종이가 정사각형이 될 때까지 반복한다면, 마지막에 잘라내는 정사각형의 한 변의 길이는 몇 cm인가? (교육과학기술부, 2011b).

상황 ⑭ : 한 퍼레이드 행진에 두 개의 밴드가 연합하여 참석한다. 24명으로 구성된 한 밴드가 앞에 서고, 이어 30명으로 구성된 다른 밴드가 뒤따르기로 하였다. 밴드가 행진할 때 열의 수는 같아야 하고, 이때 열의 수를 최대한 크게 잡고자 한다. 그 열의 수는 얼마인가? (Billstein, Libeskind & Lott, 2000).

위의 다섯 가지 상황에서 상황 ⑩과 ⑭는 자연수를 가진 이산량으로 1보다 작은 양으로 더 이상 나눌 수가 없다. 상황 ⑪~⑬은 가로와 세로가 길이로 주어져 있고 길이는 연속량이다. 이러한 이산량과 연속량의 차이는 자연수를 양의 유리수로 넓혀 문제를 제기할 수 있는가 하는 것에서 나타난다. 연속량으로 주어지는 위의 처음의 세 상황은 다음과 같이 분수(유리수)를 가지는 상황으로 일반화될 수 있다. 그러나 상황 ⑩과 ⑭는 분수의 상황으로 일반화할 수 없다.

상황 ⑮ : 가로가 6cm이고 세로가 $\frac{4}{5}$cm인 직사각형 모양의 카드를 나란히 늘어놓아 가능하면 작은 정사각형을 만들고자 한다. 이 정사각형의 한 변의 길이는 몇 cm로 하면 되는 가?

상황 ⑯ : 가로가 $\frac{14}{5}$이고 세로가 $\frac{2}{3}$인 바닥을 같은 크기의 정사각형의 타일로 덮으려 한다. 타일의 수가 최소가 되게 하려면 이 타일의 크기는 어떻게 주어지고, 필요한 타일의 수는 몇 개인가?

상황 ⑰ : 가로가 $\frac{133}{4}$cm이고 세로가 $\frac{209}{12}$cm인 직사각형모양의 종이가 있다. 이 종이에서 가장 큰 정사각형을 잘라내고, 남은 종이에서 가장 큰 정사각형을 잘라낸다. 마지막 남은 종이가 정사각형이 될 때까지 반복한다면, 마지막에 잘라내는 정사각형의 한 변의 길이는 몇 cm인가?

양의 분수로 주어지는 상황 ⑮~⑰에서 최대공약수와 최소공배수의 개념을 현대대수학의 방법으로 다룰 수 없음은 분명하다. 자연수에 대한 것처럼 '정수배'에 의해 약수와 배수가 정의된다는 것이 중요하다. 즉, 앞에서 다룬 유리수 나눗셈 알고리즘에서 몫이 정수이고 나머지가 0이 되는 것을 전제로 한다. 두 양의 분수 a, b에 대한 최대공약수와 최소공배수는 각각 gcd(a,b), lcm(a,b)로 나타내며, 이 개념을 다음과 같이 정의한다. 여기서 유리수 d가 유리수 a, b의 공약수라 함은 $a=dk$, $b=dl$을 만족하는 정수 k, l이 존재함을 의미한다.

(정의 Ⅲ-4) 두 양의 두 유리수 a, b에 대해, 최대공약수 gcd(a,b)는 a와 b를 동시에 나누는 유리수(공약수) 중 가장 큰 유리수이고, 최소공배수 lcm(a,b)는 a와 b 모두의 배수가 되는 수(공배수)중 가장 작은 양의 유리수이다.

예를 들어 상황 ⑮에서 6, $\frac{4}{5}$의 약수와 배수로부터 gcd(6,$\frac{4}{5}$)=$\frac{2}{5}$이며, lcm(6,$\frac{4}{5}$)=12임을 알 수 있다.

유리수 나눗셈 알고리즘과 정수 나눗셈 알고리즘 사이에 밀접한 관계가 있듯이, 유리수 범위에서의 최대공약수와 최소공배수는 정수 범위에서의 최대공약수와 최소공배수의 성질을 보존하며, 서로 밀접한 관계가 있다. 이것을 다음의 몇 가지의 기본 성질을 중심으로 살펴보기로 한다.

(성질 Ⅲ-1) (1) 두 유리수 $a=\frac{k}{n}$, $b=\frac{l}{n}$ (k, l, $n\in N$)에 대해, gcd(a,b)=$\frac{\gcd(k,l)}{n}$이고, lcm(a,b)=$\frac{\mathrm{lcm}(k,l)}{n}$이다.
(2) 두 유리수 $a=\frac{k}{m}$, $b=\frac{l}{n}$ (k, l, m, $n\in N$)에 대해, gcd(a,b)=$\frac{\gcd(k,l)}{\mathrm{lcm}(m,n)}$이고 lcm($a$,$b$)=$\frac{\mathrm{lcm}(k,l)}{\gcd(m,n)}$이다.

유리수 $a=\frac{k}{m}$의 약수는 $\frac{k\text{의 약수}}{m\text{의 배수}}$형을, $b=\frac{l}{n}$의 약수는 $\frac{l\text{의 약수}}{n\text{의 배수}}$형을 취하므로 a, b의 공약수는 $\frac{k\text{와 } l\text{의 공약수}}{m\text{과 } n\text{의 공배수}}$형이 되어 (성질 Ⅲ-1)의 (1)와 (2)가 유도된다.

예를 들어 $a=6=\frac{12}{2}=\frac{30}{5}$, $b=\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$와 같이 6, $\frac{4}{5}$에 대한 다양한 분수 표현에 위의 성질을 적용하여 최대공약수 gcd(a,b)를 알아보기로 하자. 약수와 배수로부터 gcd(6,$\frac{4}{5}$)=$\frac{2}{5}$이었다. 또한 gcd($\frac{12}{2}$,$\frac{4}{5}$)=$\frac{\gcd(12,4)}{\mathrm{lcm}(2,5)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, gcd($\frac{30}{5}$,$\frac{12}{15}$)=$\frac{\gcd(30,12)}{\mathrm{lcm}(5,15)}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$, gcd($\frac{30}{5}$,$\frac{4}{5}$)=$\frac{\gcd(30,\ 4)}{5}=\frac{2}{5}$임을 알 수 있다. 즉, 분수 표현에 관계없이 일정

한 값을 가진다. 분모를 어떻게 택하느냐에 따라 분자 k, l이 다르므로 gcd(k,l)이 다를 수 있고, gcd를 구하기 위해 k, l에 적용한 나눗셈 알고리즘에서 나타나는 몫이 다르게 나올 수 있다.

두 정수에 대한 서로소의 개념을 확장하여 0이 아닌 유리수 a, b에 대해 gcd(a,b)=1인 관계에 있을 때 a와 b는 서로소라고 한다. a와 b가 서로소이면 1을 약수로 가지므로, a와 b는 정수이어야 한다. 정수가 아닌 유리수가 있으면 서로소가 될 수 없다.

(성질 Ⅲ-2) 양의 유리수 a, b에 대해 gcd(a,b)=d라 하면, $\frac{a}{d}$와 $\frac{b}{d}$는 정수이고 서로소이다.

두 양의 정수 m, n에 대해 gcd(m,n)와 lcm(m,n)의 곱이 두정수의 곱과 같다는 성질은 유리수에서 대해서도 성립된다. 이 성질은 정수에 대한 성질과 (성질 Ⅲ-1), (성질 Ⅲ-2)로부터 유도된다.

(성질 Ⅲ-3) 두 양의 유리수 a, b에 대하여 ab=gcd(a,b)lcm(a,b)가 성립한다.

Ⅳ. 유클리드 알고리즘

이른바 유클리드 알고리즘은 수학사에서 기록으로 남겨진 최초의 알고리즘으로, 유클리드의 ≪원론≫ 제7권에 진술되어 있다. 유클리드 알고리즘은 소인수분해를 거치지 않고 두 정수의 최대공약수를 구하게 해 주는 편리하고 매우 빠른 방법으로, 수론의 기본적인 결과를 증명하는 데 자주 사용된다. 유클리드 알고리즘에서는 나눗셈 알고리즘을 유한 번의 시행하여 나머지를 0으로 만드는 과정을 통해 최대공약수를 구한다. 이 절에서는 정수의 유클리드 알고리즘을 분수(유리수)의 유클리드 알고리즘으로 확장하고, 정수와의 관계를 살펴보고 유리수와 무리수의 차이점을 다룬다.

1. 유리수에 대한 유클리드 알고리즘

정수 나눗셈 알고리즘과 같은 맥락에서 나머지가 0이 될 때까지 유리수 나눗셈 알고리즘을 유한 번 시행하여 최대공약수를 얻을 수 있다. 여기서는 유리수 나눗셈 알고리즘을 활용하여 구성한 약수와 배수의 정의로부터 얻어진 다음의 (성질 Ⅳ-1)와 이 성질로부터 얻게 되는 (성질 Ⅳ-2)는 중요한 기능을 한다.

(성질 Ⅳ-1) 양의 두 유리수 a, b에 대해, c가 이들의 공약수이면, c는 $ax+by$ (여기서 x와 y는 어떠한 정수라도 좋다.)를 나눈다. 따라서 gcd(a, b)는 $ax+by$을 나눈다.

(성질 Ⅳ-2) 양의 두 유리수 a, b가 $a=qb+r$ (q는 정수 $q=\left[\frac{a}{b}\right]$, $0 \le r < b$)의 관계에 있으면 gcd(a,b)=gcd(b,r)이다.

나눗셈 알고리즘을 반복 사용하여 최대공약수를 찾아가는 절차인 유클리드 알고리즘을 다음과 같이 형식화할 수 있다.

[유리수의 유클리드 알고리즘] 두 유리수 a, b가 $a \ge b > 0$을 만족한다.

(1) $a_1=a$, $b_1=b$라 두고, $a_1=q_1b_1+r_1$, q_1은 정수, $0 \le r_1 < b_1$ (a_1과 b_1에 나눗셈 알고리즘을 적용)를 만족하는 나머지 r_1을 찾는다.

(2) 만약 r_1>0이면, a_2=b_1, b_2=r_1이라 두고, a_2=q_2b_2+r_2, q_2는 정수, 0≤ r_2<b_2인 나머지 r_2를 찾는다.

(3) "a_n=q_nb_n+r_n, q_n은 정수, r_n=0"일 때까지 a_i=b_{i-1}, b_i=r_{i-1}>0에 나눗셈 알고리즘을 적용하여 나머지 r_i(유리수이다)를 찾는다.

(4) $r_{n-1}\neq 0$, r_n=0(b_n은 a_n의 약수)이면, gcd(a,b)=gcd(a_2,b_2)=$\cdots$=gcd (a_{n-1},b_{n-1})= gcd(a_n,b_n)=b_n=r_{n-1} 이다.

유클리드 알고리즘을 유리수 $a=\frac{133}{3}$와 $b=\frac{209}{12}$에 적용하여 최대공약수 gcd(a,b)를 구하는 과정을 살펴보자. 이 과정은 다음과 같은 형식으로 쓸 수 있다.

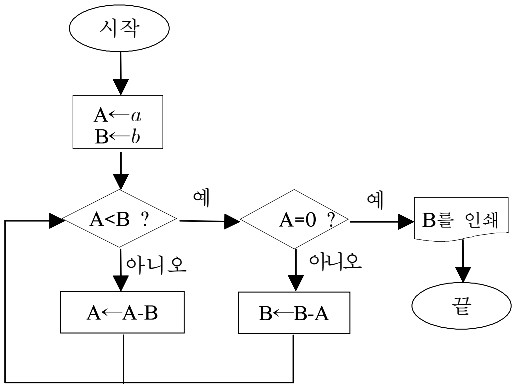
$$\frac{133}{3}=\frac{209}{12}\times 2+\frac{57}{6} \Leftrightarrow \frac{532=209\times 2+114}{12}$$
$$\frac{209}{12}=\frac{57}{6}\times 1+\frac{95}{12} \Leftrightarrow \frac{209=114\times 1+95}{12}$$
$$\frac{57}{6}=\frac{95}{12}\times 1+\frac{19}{12} \Leftrightarrow \frac{114=95\times 1+19}{12}$$
$$\frac{95}{12}=\frac{19}{12}\times 5 \Leftrightarrow \frac{95=19\times 5}{12}$$

따라서 gcd($\frac{133}{3},\frac{209}{12}$)=$\frac{19}{12}$임을 알 수 있다. a, b를 공통분모 12를 가지는 분수 $\frac{532}{12}$, $\frac{209}{12}$로 표현하여 gcd($\frac{532}{12},\frac{209}{12}$)=$\frac{1}{12}$gcd(532,209)=$\frac{19}{12}$임을 확인할 수 있다. 특히 두 분자 532와 209에 유클리드 알고리즘을 적용하면 몫이 2, 1, 1, 5로 주어져 $a=\frac{133}{3}$와 $b=\frac{209}{12}$에 유클리드 알고리즘을 적용하였을 때 나타나는 몫과 일치한다. (성질 Ⅲ-1)는 두 분수의 분모의 최소공배수를 공통분모가 되게 통분하고, 통분한 분수의 두 분자에 정수의 유클리드 알고리즘을 적용시켜 최대공약수를 구한 다음, 두 분모의 최소공배수로 나눈 분수(유리수)가 구하고자 하는 최대공약수임을 보여 주어 정수에 대한 자연스런 확장임을 보여준다.

유클리드 알고리즘은 두 양의 유리수 a, b의 최대공약수 gcd(a,b)를 얻도록 하고, 나머지에 관한 식으로 바꾸어 감으로써 gcd(a,b)를 일차결합 $am+bn$ (m와 n은 정수)으로 나타낼 수 있도록 한다. 이러한 과정은 디오판토스 방정식 $ax+by=c$의 정수해를 찾는 방법으로 유명하다.

2. 유클리드 알고리즘의 표현과 활용

유클리드 알고리즘에 사용되는 나눗셈 알고리즘은 뺄셈의 과정으로 얻어질 수 있다. 뺄셈의 과정을 적용하면 유클리드 알고리즘을 [그림 Ⅳ-1]과 같은 순서도로 나타낼 수 있다.



[그림 Ⅳ-1] 양의 유리수 a, b에 대하여 gcd(a,b)를 찾는 순서도

분수가 공통분모를 가지도록 함으로써, 분수에 적용되는 유클리드 알고리즘을 정수 유클리드 알고리즘으로 바꾸어 생각할 수 있으므로, 여기서는 양의 정수에 대해서만 다룬다. 하나의 사례로 두 양의 정수 532와 209에 대해 알아보도록 한다. 다음과 같이 유클리드 알고리즘을 적용함으로서 gcd(532, 209)=r_3=19임을 알

수 있다.

$$532=2\times209+114 \Leftrightarrow a_1=q_1b_1+r_1$$
$$209=1\times114+95 \Leftrightarrow b_1=q_2r_1+r_2$$
$$114=1\times95+19 \Leftrightarrow r_1=q_3r_2+r_3$$
$$95=5\times19+0 \Leftrightarrow r_2=q_4r_3+0$$

가. 직사각형을 정사각형으로 분할

유클리드 알고리즘은 예를 들어 [그림 Ⅳ-2]와 같이 주어진 두 양의 정수를 각각 가로와 세로로 하는 직사각형을 되도록 큰 정사각형으로 잘라내어 가는 과정을 더 이상 정사각형이 아닌 직사각형이 없어질 때까지 계속하는 방법으로 볼 수 있다. 초등학교 수학 교과서 ≪5-1≫의 16쪽에서는 이 과정을 탐구 활동으로 제시하고 있다(교육과학기술부, 2011b). 이것은 유클리드 알고리즘을 교수학적으로 변환한 한 사례이며, 일반적으로 유클리드 알고리즘을 얻게 되는 과정의 기하적인 표현이다.

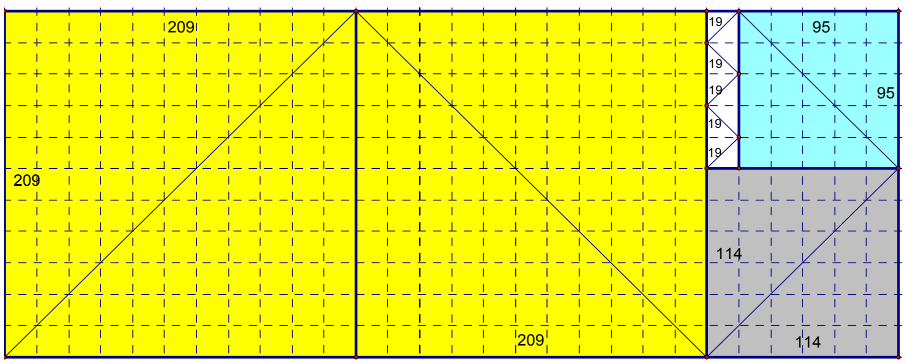
[그림 Ⅳ-2]에서 길이 532와 209의 두 선분을 등분하는 공동측도로 사용하는 선분의 최대 길이가 19임을 의미한다. 두 유리수 $\frac{133}{3}(=\frac{532}{12})$과 $\frac{209}{12}$을 각각 가로와 세로로 하는 직사각형이 한 변의 길이가 $\frac{19}{12}$인 정사각형에 의해 분할됨을 알 수 있다. 이러한 기하적인 관찰은 유클리드가 제시한 통약가능성에 관한 논의와 연결된다. 이것은 유리수와 무리수를 구별 짓는 기하적인 방법이다.

나. 최대공약수를 일차결합으로 표현

a=532, b=209에 나눗셈 알고리즘을 반복해서 적용하는 유클리드 알고리즘으로 최대공약수 gcd(532,209)를 구하였다. 이 나눗셈 알고리즘의 적용 과정을 추적함으로써 다음과 같이 gcd(a, b)=19를 a, b의 일차결합으로 표현할 수 있다.

$$19=\gcd(a,b)=r_3=r_1-q_3r_2=r_1-q_3(b-q_2r_1)$$
$$=(-q_3)b+(1+q_3q_2)r_1=(-q_3)b+(1+q_3q_2)$$
$$(a-q_1b)=(1+q_3q_2)a+(-q_3q_2q_1-q_3-q_1)b$$
$$=2a-5b$$

이와 같이 유클리드 알고리즘은 두 정수의 최대공약수를 그 두 정수의 일차결합으로 나타낼 수 있음을 보여준다. 두 유리수에 대해서도 이러한 성질이 보존되어, 예를 들어 $\frac{133}{3}(=\frac{532}{12})$과 $\frac{209}{12}$의 최대공약수 $\frac{19}{12}$는 $\frac{19}{12}=2\cdot\frac{133}{3}+(-5)\cdot\frac{209}{12}$와 같이 표현된다. 더 나아가 이 성질은 다음과 같이 유리수에 대해서도 성립하는 성질이다.



[그림 Ⅳ-2] 정사각형 분할에 의한 gcd 구하기

(성질 Ⅳ-3) 두 유리수 a, b의 최대공약수는 a, b의 일차결합 $am+bn$ (m와 n은 정수)으로 나타낼 수 있고, gcd(a,b)는 $\{ax+by|x,\ y\in\mathbb{Z}\}$에 속하는 원소의 약수이면서 가장 작은 양의 유리수이다.

다. 유클리드 알고리즘의 행렬 방법

이 방법은 주어진 두 정수 a, b에 대하여 gcd(a,b)를 구하고 $ax+by$=gcd(a,b)를 만족하는 정수 x, y를 찾게 해 준다. 예를 들어 a=532와 b=209에 대해 gcd(a,b) 및 이것을 a, b의 일차결합으로 나타내어 보자.

단계	행렬 만들기	과정설명	대응 일차식
1	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 532\\ 0 & 1 & 209\end{bmatrix}$	$a=532$ $b=209$	$\begin{cases}1\cdot a+0\cdot b=532\\ 0\cdot a+1\cdot b=209\end{cases}$
2	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 532\\ 0 & 1 & 209\\ 1 & -2 & 114\end{bmatrix}$	2행에 2를 곱하여 1행에 뺀 것을 3행으로	$\begin{cases}1\cdot a+0\cdot b=532\\ 0\cdot a+1\cdot b=209\\ 1\cdot a-2\cdot b=114\end{cases}$
3	$\begin{bmatrix}0 & 1 & 209\\ 1 & -2 & 114\\ -1 & 3 & 95\end{bmatrix}$	2행에 1을 곱하여 1행에 뺀 것을 3행으로	$\begin{cases}0\cdot a+1\cdot b=209\\ 1\cdot a-2\cdot b=114\\ -1\cdot a+3\cdot b=95\end{cases}$
4	$\begin{bmatrix}0 & 1 & 209\\ -1 & 3 & 95\\ 2 & -5 & 19\end{bmatrix}$	2행에 1을 곱하여 1행에 뺀 것을 3행으로	$\begin{cases}1\cdot a-2\cdot b=114\\ -1\cdot a+3\cdot b=95\\ 2\cdot a-5\cdot b=19\end{cases}$
5	$\begin{bmatrix}-1 & 3 & 95\\ 2 & -5 & 19\\ -11 & 28 & 0\end{bmatrix}$	2행에 5를 곱하여 1행에 뺀 것을 3행으로	$\begin{cases}-1\cdot a+2\cdot b=95\\ 2\cdot a-5\cdot b=19\\ -11\cdot a+28\cdot b=0\end{cases}$

라. 유클리드 알고리즘에서 연분수 만들기

유클리드 알고리즘에서 시행되는 나눗셈 알고리즘은 유리수(분수)를 연분수로 나타내는 방법을 제시한다. 이때 얻어지는 연분수는 유한연분수이다. 이러한 과정을 분수 $\frac{532}{209}$에 적용하여 보면, 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\frac{532}{209} &= \frac{2\times 209+114}{209} = 2+\frac{114}{209}\\
&= 2+\cfrac{1}{\cfrac{209}{114}} = 2+\cfrac{1}{\cfrac{1\times 114+95}{114}}\\
&= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{95}{114}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{114}{95}}}\\
&= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1\times 95+19}{95}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{19}{95}}}\\
&= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{95}{19}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{5\times 19}{19}}}\\
&= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{1}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{5}}}}\\
&= \langle 2,1,1,5\rangle
\end{aligned}
$$

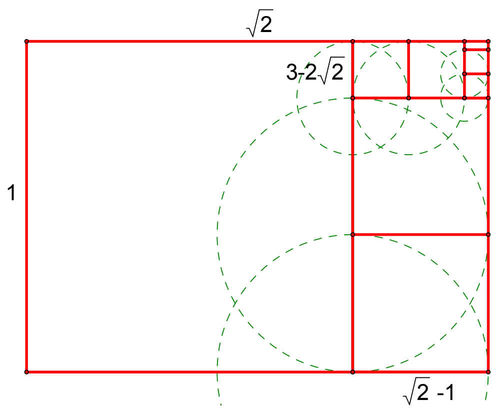
$\frac{532}{209}$을 나타내는 연분수 <2, 1, 1, 5>는 직사각형을 정사각형으로 분해하는 과정에서 잘 나타난다. 직사각형 532×209는 2개의 정사각형 209×209, 1개의 정사각형 114×114, 1개의 정사각형 95×95 와 5개의 정사각형 19×19 으로 분할되는 것에 대응한다.

3. 무리수와 유클리드 알고리즘

정수 나눗셈 알고리즘을 유리수뿐만 아니라 무리수 나눗셈에 형식적으로 적용하는 것이 가능하고, 그 알고리즘을 실수 나눗셈까지 확장할 수 있다. 즉, 두 양의 실수 a, b에 대하여 $a=qb+r,\ 0\le r<b$를 만족하는 정수 q와 실수 r가 유일하게 존재한다. 이것을 유클리드 알고리즘으로 확장시킬 수 있다. 그렇다면 이 유클리드 알고리즘은 유리수에서처럼 두 실수의 최대공약수를 찾아가는 방법이 될 수 있을까? 즉, 유한 절차에 의해 나머지를 0으로 만드는 유클리드 알고리즘을 생각할 수 있을까? 다음 상황을 고려해 보자.

상황 ⑱ : 가로가 $\sqrt{2}$이고 세로가 1인 벽을 같은 크기의 정사각형의 타일로 덮으려 한다. 타일의 수가 최소가 되게 하려면 이 타일의 크기는 어떻게 주어져야 하는가? 또, 필요한 타일의 수는 몇 개인가? 가로가 $\sqrt{2}$이고 세로가 1인 직사각형들을 나란히 늘어놓아 최소 크기의 정사각형 모양을 만드는 데 필요한 직사각형의 수를 구해 보아라.

실수 $\sqrt{2}$, 1에 나눗셈 알고리즘을 적용하여 보자. 직사각형 $\sqrt{2}\times 1$을 정사각형으로 분할해 보면 [그림 Ⅳ-3]과 같이 1개의 1×1 정사각형, 2개의 $(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}-1)$ 정사각형, 2개의 $(3-2\sqrt{2})\times(3-2\sqrt{2})$ 정사각형, … 으로 분할되고 있음을 보여준다.



[그림 Ⅳ-3] 직사각형 $\sqrt{2}\times 1$을 정사각형으로 분할

이렇게 정사각형으로 분할하는 것의 끝은 어디인가? 유한 번으로 끝이 날 수 있는가? 이 문제는 실수 $a=\sqrt{2}$, b=1에 대해 $a=mq$이고 $b=nq$가 되는 자연수 m, n 및 양의 실수 q가 존재하는가 하는 문제와 연결된다. 이것은 고전적으로 $\sqrt{2}$가 무리수임을 논증하는 기하학적 방법인 정사각형 ABCD의 한 변 AB와 대각선 AC를 공통의 단위척도로 잴 수 있는가 즉, 선분 AP가 있어 이 선분을 척도로 하여 대각선 AC와 변 AB가 모두 AP의 정수배로 표현될 수 있는가 하는 문제이다. 이것은 불가능하다는 것이 잘 알려져 있다.

정수 나눗셈 알고리즘을 일반화한 유리수 나눗셈 알고리즘은 유리수의 유클리드 알고리즘을 제공하며, 정수의 유클리드 알고리즘과 같은 맥락에서 나머지가 0이 될 때까지 유리수 나눗셈 알고리즘을 유한 번 시행하여 최대공약수를 얻게 한다. 주어진 두 양의 유리수에 대한 최대공약수의 문제는 통약 가능한 두 선분 S_1, S_2에 대한 최대길이의 단위 선분의 문제이다. 두 선분의 길이에 비로 주어진 수가 유리수인가 하는 문제는 이 두 선분이 통약가능한 선분인가 하는 문제와 동치로서 유리수와 무리수를 구분하는 기준이 된다. 이것은 정수 나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘을 기반으로 최대공약수 및 최소공배수의 개념이 유리수로 일반화되지만, 실수에 대한 개념으로는 확장시킬 수 없음을 보여준다. 그러나 나눗셈 알고리즘은 구체적 계산이 복잡하여 실용성은 없지만 무리수에 대한 연분수를 찾아가는 방법이 될 수 있다.

Ⅴ. 결론

수학교사가 갖추어야 하는 가장 중요하면서도 기본적인 자질은 충분한 수학교수법 지식뿐만 아니라 충분한 수학 교과 내용 지식을 갖추고 있는 것이다. 수학 교사는 학생들에게 실제로 가르쳐야 하는 수학 교과 내용을 넘어 그것을 둘러싼 전문적이고 총체적인 지식을 가지고

있어야 한다(임재훈, 2007). 수학 교사에게 이러한 지식이 부족하면 학생들에게 필요한 수학 교과 내용을 온전히 제공하는 데 장애가 될 수 있다(Ma, 2002). 교사가 가져야 할 전문성에는 학문수학과 학교수학과의 연계성뿐만 아니라, 학생들이 지금 배우는 내용 이전에 접하고 익혀 두어야 할 내용 및 지금 배우는 내용 이후에 접하게 될 내용을 숙지하는 것도 포함한다.

수학 교과 내용 지식을 포괄하는 학교수학은 학문수학을 정제해서 사용하는 것이 바람직하고, 학문수학은 학교수학을 포괄적으로 다루는 데 필요한 이론으로서 역할을 해야 한다. 그러나 때때로 일부 수학교사들은 학교수학과 학문수학 사이의 적절한 연결에 실패하여 특정한 개념의 취급에서 혼란을 보여주기도 한다. 분수 나눗셈에서의 몫과 나머지 개념에서 보이는 혼란도 그 한가지이다. 이러한 혼란은 이른바 교사가 되기 위해 학문수학을 배우면서 학교수학과의 단절을 겪고, 그리고 다시 교사가 되어 학교수학을 가르치면서 학문수학과의 단절을 겪게 되는 이중단절(Klein, 2004)의 한 형태이다. 본 연구에서는 분수 나눗셈에서의 이러한 혼란의 극복하기 위한 목적에서, 문장제 상황을 바탕으로 정수를 대상으로 하는 나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘을, 정수 나눗셈 알고리즘에서 강조된 몫과 나머지의 특성과 유일성을 보존하여, 유리수를 대상으로 하는 나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘으로 확장이 가능하다는 것을 보였다. 유클리드 알고리즘은 유리수의 본질을 규명하는 방법으로 교육적 의미가 크지만, 교육과정에서는 두 분수에 대한 유클리드 알고리즘이 간과되어 있고, 그것이 최대공약수나 최소공배수를 구하는 방법으로 활용되고 있지도 있다.

본 연구에서는 유리수의 표현으로 분수를 사용하였으며, 분수 나눗셈의 문장제 상황에 나타난 이산적 환경과 연속적 환경 및 등분제와 포함제에 따라 '나눈다'는 개념을 두 유형으로 분류하였다. 하나는 유리수체에서 현대대수학 관점에서 다루어지는 대수적 개념이며, 다른 하나는 몫과 나머지가 동반된 정수 나눗셈 알고리즘을 유리수 나눗셈 알고리즘으로 일반화하는 것에서 나온 개념이다. 본 연구에서는 특히 후자의 개념에 초점을 맞추어, 학교수학에서 다루어지거나 다룰 수 있는 문제 상황을 제시하며, 분수를 대상으로 하는 나눗셈 알고리즘, 최대공약수와 최소공배수, 유클리드 알고리즘에 관해 논의했다. 본 연구에서 실수 나눗셈까지 취급하고 있다는 연구 결과는 중등교사교육을 위한 것이라 할 수 있지만, 초등학교 수준에서 나눗셈이 분수 체계 안에서 논의하고 있다는 점에서 초등교사교육에도 도움이 되리라 본다. 후속 연구의 일환으로 본 연구의 내용을 예비교사 교육프로그램으로 변환하여 실제로 지도하면서 예비교사의 수학지식 향상도를 분석해 보는 것을 제안할 수 있다.

참고문헌

강영란 · 조정수 · 김진환(2012). 분수 나눗셈의 문장제에 대한 초등교사들의 전문화된 내용지식(SCK) 분석. **수학교육논문집, 26**(3). 301-316.

교육과학기술부(2008a). 초등학교 교육과정 해설서. 서울: 대한교과서주식회사.

교육과학기술부(2008b). 중학교 교육과정 해설서. 서울: 대한교과서주식회사.

교육과학기술부(2011a). 수학 3-2. 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부(2011b). 수학 5-1. 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부(2011c). 수학 6-1. 서울: 두산동아(주).

김명운 · 장경윤(2009). 맥락화를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈의 지도. **학교수학, 11**(4) 685-706.

김민경(2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석. **학교수학, 5**(2), 223-240.

김창수 · 전영배 · 노은환(2011). 유한소수에서의 나눗셈 알고리즘(Division algorithm). **수학교육, 50**(3). 309-327.

박교식 · 권석일(2012). 우리나라 초등학교 수학 교과서의 소수 나눗셈에서의 몫과 나머지 취급에서 나타나는 부적절한 관념과 그 개선에 관한 연구. **수학교육학연구, 22**(4), 445-458.

박교식 · 송상헌 · 임재훈(2004). 우리나라 예비 초등교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. **학교수학, 6**(3), 235-249.

방정숙 · Li, Y. (2008). 예비초등교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석. **수학교육, 47**(3), 257-271.

방정숙 · 이지영(2009). 사례 연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석. **학교수학, 11**(1), 71-91.

백선수(2004). 비형식적 지식을 이용한 대안적인 분수 나눗셈의 형식화 방안에 관한 연구. **초등수학교육, 8**(2). 97-113.

서관석 · 전경순(2003). 예비초등교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점. **수학교육학연구, 10**(1), 103-113.

이종욱(2005). 초등교사의 분수 지식 실태 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 44**(1), 67-85.

임재훈(2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈. 대한수학교육학회지 **<학교수학>, 9**(1), 13-28.

임재훈 · 김수미 · 박교식(2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. **학교수학, 7**(2), 103-121.

최지영 · 강완(2003). 초등학교 수학 교과서에 나타난 약수와 배수지도 방법 분석. **한국초등수학교육학회지, 7**(1), 45-64.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal, 90*(4), 449-466.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass. H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade and how can we decide? *American Educator*, 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Billstein, R., Libeskind, S. & Lott, J. W. (2000). A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers. Addison Wesley.

Fraleigh, J. B. (2009). 현대대수학(A first course in Abstract Algebra (7/e)) (강영욱 · 강병련 공역). 도서출판 Young. (영어 원작은 2003년 출판)

Gravemeijer, K., & van Galen, F. (2003). Facts and algorithms as products of students’ own mathematical activity. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 114-122). Reston, VA: NCTM.

Klein, F. (2004). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic · Algebra · Analysis.* E. R. Hedrick, C. A. Noble (trans.). New York: Dover Publications. (원작은 1924년에 출판).

Ma, L. (2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. (신현용 · 승영조 공역). 서울: 승산. (원작은 1999년 출판).

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowing and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Education Review, 57*(1), 1-22.

Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of fraction. In Litwiller, B., & Bright, G. (Eds), *Making sense of fractions, ratios and proportions*: 2002 yearbook. Reston, VA: NCTM, 247-256.

Sinicrope, R, Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios and proportions*. 2002 yearbook. Reston, VA: NCTM. 153-161.

Van de Walle, J. A. (2004). Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally. Pearson.

Yim, J. (2010). Children's strategies for division by fractions in the context of the area of rectangle. *Education Studies in Mathematics. 73*. 105-120.

A Study on Extension of Division Algorithm and Euclid Algorithm

Kim, Jin Hwan (Yeungnam University)
Park, Kyosik (Gyeongin national university of education)

The purpose of this study was to analyze the extendibility of division algorithm and Euclid algorithm for integers to algorithms for rational numbers based on word problems of fraction division. This study serviced to upgrade professional development of elementary and secondary mathematics teachers. In this paper, fractions were used as expressions of rational numbers, and they also represent rational numbers. According to discrete context and continuous context, and measurement division and partition division etc, divisibility was classified into two types; one is an abstract algebraic point of view and the other is a generalizing view which preserves division algorithms for integers. In the second view, we raised some contextual problems that can be used in school mathematics and then we discussed division algorithm, the greatest common divisor and the least common multiple, and Euclid algorithm for fractions.

Key words : division algorithm(나눗셈 알고리즘), euclid algorithm(유클리드 알고리즘), fraction division (분수 나눗셈), measurement division(포함제), partition division(등분제), quotient(몫), remainder(나머지)

논문접수 : 2013. 1. 4
논문수정 : 2013. 1. 30
심사완료 : 2013. 2. 7