한국초등수학교육학회지 17(2) 285-299. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 17(2) 285-299
2013. 08. 31 August 31. 2013.

영재학급 학생들이 What-If-Not 전략을 사용하여 만든 변형 루미큐브 게임 사례 분석[1]

이대희[2] · 송상헌[3]

영재들에게는 교과서에서 요구하는 문제 만들기 수준을 넘어 생활 주변에서 경험하는 다양한 수학적 소재들을 창의적으로 재구성해보는 경험이, 영재 지도 교사에게는 그 학생들의 사고를 이해하고 후속적인 지도를 위한 교훈과 반성이 필요하다. 본 연구는 영재학급 학생들에게 문제 만들기 전략 활용 수업의 가능성을 확인하고, What-If-Not 전략을 배우고 난 영재학생들이 루미큐브라는 보드게임을 자신이 알고 있는 수학적인 요소에 맞게 변형해 본 다양한 사례들을 분석한다. 그 결과물을 교육과정의 내용(주제)별로 제시하고 변형 루미큐브 만들기 수업의 교육적 가치와 영재들을 위한 교육적 시사점을 제안하였다.

주제어: 수학영재, 문제 만들기 수업, What-If-Not 전략, 루미큐브, 게임

Ⅰ. 서 론

NCTM(1989)은 문제해결이 수학교육과정의 주된 초점이 되어야 하고, 문제해결은 모든 수학 수업의 중요한 목적이며, 모든 수학 활동에 내재되어 있어야 한다고 하였다. 하지만 문제를 해결하는 과정에서 조건을 변경하거나 결과를 재해석해 보는 문제 만들기 활동은 단순히 문제만 푸는 활동보다 학습자의 능동적인 참여를 가능하게 하고 자기 주도적 학습 능력을 키워줄 수 있는 학습 방법 중 하나이다. 문제해결능력의 신장은 모든 수학 수업의 중요한 목적 중 하나이지만, 문제해결력은 문제 만들기 활동을 통해 강화될 수도 있다.

영재들에게는 교과서에서 요구하는 문제 만들기 수준을 넘어 생활 주변에서 경험하는 다양한 수학적 소재들을 창의적으로 재구성해보는 경험을 통해 지속적으로 변형 또는 재구성해보려는 태도가 형성되어야 할 필요가 있다. 교과서나 학습지의 수학 문제뿐만 아니라 생활 상황이나 장면에서 문제를 해결할 수 있는 능력을 갖추어야 한다. 아울러 단순히 문제를 해결하는 수동적인 자세에서 새로운 문제를 설정해보려는 능동적인 자세가 필요하다. 예를 들어, 얼마나 많은 문제를 올바르게 또는 창의적으로 해결하는지와 더불어, 그 문제에 대해 새로운 의문을 가지고 보다 나은 풀이 방법을 모색하거나 발전적인 문제로 변형해보려는 습관과 태도가 길러지는 것도 중요하다.

본 연구는 영재학급 학생들에게 창의성 신장을 위한 문제 만들기 전략 활용 수업의 가능성을 확인하고, What-If-Not 전략을 배우고 난 그들이 루미큐브라는 보드게임을 자신이

---

1) 이 글은 이대희(2013)를 요약하며 재수정한 것임.

2) [제1저자] 정지초등학교
3) [교신저자] 경인교육대학교

알고 있는 수학적인 요소에 맞게 변형해 본 다양한 사례들을 교육과정의 내용(주제)별로 분석하기 위한 것이다. 이를 위해 설정한 연구 내용은 다음과 같다.

첫째, What-If-Not 전략을 활용한 문제 만들기 수업을 통해 영재학급학생들이 만든 루미큐브 게임 변형 사례를 분석한다.

둘째, 영재학급학생들을 대상으로 What-If-Not 전략을 활용한 새로운 루미큐브 만들기 수업을 할 때 고려할 수 있는 교육적 시사점을 제안한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 문제 만들기

문제 만들기는 문제 생성(problem generation), 문제의 형식화(problem formulation), 문제 만들기(problem posing) 등의 용어로 사용되어 왔다(송상헌, 정영옥, 임재훈, 신은주, 이향훈, 2007, p.52). 임문규(1996)는 이를 문제 생성(problem generation) → 문제 만들기(problem posing) → 문제의 형식화(problem formulation)로 순차적으로 구분하여 사용하고 있으나 대개는 문제 만들기와 같은 의미로 쓰고 있다. 임문규(1996)는 수학교육에서의 문제 설정의 교수-학습의 의의를 목표 및 성취도 중심으로 (1)여러 가지 현상을 수리적으로 보는 능력과 태도에 익히기 (2)상황 및 문제에 대한 요소의 분석력을 키우기 (3)요소의 결합 및 문제의 구성력 키우기 (3)산법의 원리를 깊게 이해하기 (4)식의 기능을 이해하기, (5)수학적 용어의 의미를 깊게 이해하기에 각각 도움이 된다고 하였다. 또한 이를 통해 학생들이 적극적으로 수업에 참여하게 되며, 발표의 횟수가 많아지고 학생들에게 이미 배운 지식을 종합적으로 사용하는 기회를 줄 수 있으며 학력이 낮은 학생이라도 그 나름대로의 뭔가 의미 있는 문제를 만들 수 있게 되고 발견 및 타인에게서 인정받는 즐거움의 기회가 많아지며 자기의 능력에 맞게 누구라도 학습에 몰두하도록 격려하게 되며, 문제를 발전시키려고 하는 태도가 만들어지고 개별학습과 집단학습의 조화를 이루는 수업이 전개될 수 있으며 다양한 관점에서의 평가가 가능하게 된다고 하였다.

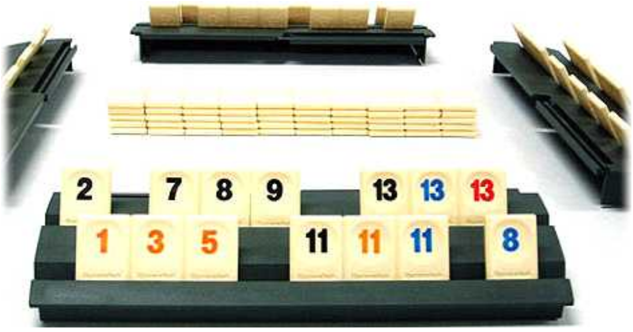
Brown & Walter(1983)는 ‘만일 그렇지 않다면 어떻게 될 것인가(What-If-Not)’라는 문제 만들기 전략을 제시하면서 문제를 해결한 시점에서 문제의 속성을 열거한 다음 ‘만일 ~이 성립하지 않으면 어떻게 될까?’ 라는 자문을 차례로 함으로써 문제를 제기한 다음 그 가운데에서 적절한 문제를 택하여 분석해 나아가는 절차로 문제를 제기한다. 그 후 새로운 문제를 만들어 봄으로써 이전과는 전혀 다른 새로운 관점에서 보고 그로부터 새로운 생각을 하게 한다는 점을 문제 만들기의 중요한 점으로 강조하고 있다. 이 전략은 주어진 것을 수용하는 것이 아니라 주어진 것에 도전함으로써 새로운 질문을 제기하는 것으로 <0단계> 출발점 선택, <1단계> 속성 열거, <2단계> 속성부정하기, <3단계> 의문제기와 문제 설정, <4단계> 문제 분석의 4단계로 나눈다.

초등학교 영재들을 대상으로 한 문제만들기 관련 선행 연구로는 Nim 게임을 활용한 문제만들기 사례 분석(송상헌, 정영옥, 임재훈, 신은주, 이향훈, 2007), 수학 영재의 문제만들기 사례 연구(백대현, 이진희, 2010), 종이접기 프로그램에서 수학영재학생들의 문제 만들기 전략 분석(임근광, 2010), 폴리오미노에 What if (not)? 전략을 적용한 영재 학급용 수학 수업 소재 발굴과 활용(구본왕, 송상헌, 2011) 등이 있다.

2. 루미큐브

루미큐브(Rummikub)는 1930년대 초반에 이스라엘의 Mr. Ephraim Hertzano에 의해 개발된 가족용 게임이다. 루미큐브의 뛰어난 가치와 즐거움은 루미큐브의 명성이 꾸준히 발생되는 결과를 가져와 오늘날 전 세계에서 세 번째로 많이 팔리는 게임이고, 숫자 게임으로는 세계 첫 번째이며, 이스라엘 에서도 가장 많이 팔리는 게임이다. 현재 3천만 개 이상의 루미큐브 게임이 세계 48개국에 24개 국어로 팔려나가고 있다. 루미큐브는 세계적으로 가장 유명한 게임인 루미, 도미노, 체스 등의 특징을 조합하여 재구성한 것으로 수 타일의 연속된 규칙을 찾아 조합을 해서 자기가 가진 타일을 먼저 내려놓으면 이기는 게임이다.

또한 3년에 한 번씩 각국의 대표들이 참가하는 세계 챔피언쉽(WRC-World Rummikub Championship)을 유럽등지에서 개최하여 챔피언을 선발하고 있다. 작게는 온 가족이 재미와 가족 간의 대화를 가져오고 크게는 세계 챔피언의 영광을 누릴 수 있는 아주 흥미롭고 교육적 효과도 뛰어난 게임이다 (출처: http://www.rummikub.co.kr/rummikub.php?html=rummikub1).



[그림 1] 루미큐브

<표 1> 루미큐브 게임방법

순서	게임 방법
준비	· 모든 타일을 뒤집어서 골고루 섞는다.
	· 게임자들은 타일을 하나씩 집고 가장 높은 숫자를 집은 사람부터 게임을 시작하며 시계방향으로 진행한다.
	· 타일을 7개씩 쌓아서 테이블에 두고 각자 14개의 타일을 나누어 받침대에 올려놓는다.
규칙	· 그룹: 3개 이상의 같은 수로 이루어진 서로 다른 색의 타일 · 연속: 3개 이상의 다른 수로 이루어진 서로 같은 색의 타일 · 
	· 그룹과 연속의 규칙을 사용하여, 처음 등록을 할 때는 반드시 숫자들의 합이 30이상이어야 한다.
	· 등록을 하면 자기 차례는 끝이 나고, 등록을 할 수 없거나 전략적으로 다음 차례에 등록을 하기로 한다면 타일을 한 개 가져가고 다음 게임자에게로 순서가 넘어간다.

	· 등록을 하고난 후 자기 차례가 되면 숫자 조합을 할 수 있다. (숫자조합은 루미큐브에서 게임을 이기기 위한 최선의 방법으로 테이블에 내려진 타일은 누구의 것도 아니며 누구든 자신의 타일을 재조합 할 수 있다.) · 등록을 한 후에도 숫자 조합을 할 수 없거나 전략적으로 다음 차례에 숫자 조합을 하기로 한다면 타일을 한 개 가져가고 다음 게임자에게 순서가 넘어간다. (숫자 조합을 하고 나면 타일을 가져갈 수 없다.)
	· 게임자는 자신의 차례에 1분의 시간이 주어지며 이 시간 내에 숫자 조합을 완료해야 한다.
종료	· 자신이 가진 타일을 모두 내려놓고 '루미큐브'라고 외치면 게임에서 이긴다.
승패 결정	· 각자 자신이 가지고 있는 타일에 있는 수들을 합하여 이긴 사람에게 주고, 승자는 그 모든 수들의 합으로 +점수를 갖고, 패자는 -점수를 가진다.(Zero Sum)

Ⅲ. 연구의 방법과 절차

1. 연구 대상자

본 연구의 대상자는 경기도 안산에 있는 J초등학교 부설 영재학급 6학년 20명의 1개 학급이다. 이들이 만든 변형 루미큐브의 사례들을 모두 유형별로 분석하고 각 모둠별로 1명씩 선정한 4명의 사례를 분석하고자 한다. 이들 학생들에게 부여한 ID의 수치는 영재학급 입학 성적순이다.

<표 2> 연구 대상자

ID	성별	입학성적 순위	개인적 특성	수학·과학 관련 수상경력
S1	남	3(최종순위) 3(영재성검사)	수학 전 영역 이해 빠름	2010. 06. 교내 수학과학경시대회 동상 2010. 12. 교내 수학과학경시대회 금상 2011. 12. 교내 수학과학경시대회 동상
S2	여	5(최종순위) 7(영재성검사)	자기 의견 말하기 좋아함	2010. 06. 교내 수학과학경시대회 동상 2011. 06. 교내 수학과학경시대회 금상 2011. 11 교내 영재 산출물 대회 우수
S3	남	7(최종순위) 2(영재성검사)	성실히 참여	수상 경력 없음. 사교육을 받지 않음.
S4	여	15(최종순위) 17(영재성검사)	과제집착력 우수	2010. 06. 교내 수학과학경시대회 동상 2010. 12. 교내 수학과학경시대회 동상 2011. 06. 교내 수학과학경시대회 금상 2011. 11 교내 영재 산출물 대회 우수

2. 변형 루미큐브 과제 분석

송상헌(2012)는 루미큐브 게임에 What-If-Not 전략을 적용하여 새로운 루미큐브를 만들기 위한 변형의 한 가지 예시를 제시하고 있는데, 이를 What-If-Not 전략에 따른 문제 만들기 단

계에 따라 〈표 3〉과 같이 제시하고 있다.

<표 3> What-If-Not 전략에 따른 문제 만들기 단계(예시)

규칙 / 단계	새로운 루미큐브 변형 규칙
〈1단계〉 속성 나열	· 준비물: 루미큐브 수 타일(1~13까지 4가지 색 2개씩 총 104개), 조커 타일(2개), 받침대(인원수만큼), 주머니 · 2~4명이 게임을 진행한다. · 각자 14개씩의 타일을 가져간다. · 가장 높은 수를 뽑은 사람부터 시작하여 오른쪽으로 돌아간다. · 3개 이상의 타일이 모여 있어야 한다. · 최초 등록할 수 있는 최소 합은 30이다. · (그룹)등록을 하려면 같은 수(다른 색) 3개 이상의 타일이 있어야 한다. · (연속)등록을 하려면 같은 색 3개의 타일이 연속이 되어야 한다. 기존의 타일 더미에 일렬로 붙이거나 재배열 할 수 있다. · 자기 턴에서 등록하지 못하면 더미에서 타일을 하나씩 가져간다. · 숫자 1은 항상 가장 낮은 숫자이고 숫자 13뒤에 붙일 수 없다. · 자신의 타일을 모두 가장 빨리 내려놓는 사람이 승리하며, 진 사람의 타일의 수를 모두 더한 값을 승자에게 준다(Zero Sum 게임).
〈2단계〉 속성부정을 통한 의문제기	· 타일의 개수를 줄이거나 늘리면 안될까? · 낮은 수를 뽑은 사람부터 시작해도 되나? · 최초 등록할 수 있는 최소 합이 30이상으로 커야만 하나? · 남은 타일의 수에서 단순 합이 아니라 계산을 이용한 다른 방법을 써도 될까? · 타일을 꼭 일렬로만 배열해야 할까? · 자기 턴에서 등록하지 못하면 더미에서 타일을 여러 개 가져가도 되나? · (포커처럼) 숫자 1을 A로 생각하여 숫자 13뒤에도 붙일 수는 없을까?
〈3단계〉 속성재배열을 통한 새로운 게임 만들기	· 1∼13까지의 숫자 타일 중 12까지만 숫자 타일로 사용하고 13은 같은 색 타일의 조커로만 사용한다. 원래의 조커는 색에 상관없이 사용할 수 있다. · 등록: 3개 이상의 타일이 붙어 있어야 하며, 등록은 20이상이어야 한다. · 그룹: 다른 색으로 같은 수 3개 이상이어야 한다. · 연속: 같은 색으로 일정한 간격이 되는 3개 이상이어야 한다. · 가로와 세로(크로스) 방향으로도 배열할 수 있고 가장 큰 수 뒤에 1을 놓을 수도 있다(순환가능). · 조커를 사용하지 않고 이기면 남긴 조커의 개수(n)만큼 득점은 n배. · 자기 턴에서 등록하지 못하거나 1개 이상 내려놓지 못하면 주머니에서 타일을 3개씩 가져가야 한다.

여기서 Brown & Walter(1983)의 〈0단계〉와 〈1단계〉를 통합하여 ‘속성 나열’로, 〈2단계〉와 〈3단계〉를 통합하여 ‘속성 부정을 통한 의문 제기’로 명명하고, 〈4단계〉를 〈3단계〉 ‘속성재배열을 통한 새로운 게임 만들기’로 변경하였다.

3. 수업 절차

이 연구에 적용한 변형 루미큐브 게임 만들기 수업 절차는 다음과 같다.

<표 4> 수업 절차

<table>
<tr><th>차시</th><th>학습 단계</th><th>교수 학습 활동</th><th>시간</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1 차시</td><td>1. 동기유발 및 목표 설정하기</td><td>· 동기 유발: 숫자 변형 게임
· 학습 목표: 보드게임의 변형 및 수학적인 요소 찾아내기</td><td>10 분</td></tr>
<tr><td>2. 오리지널 루미큐브 해보기</td><td>· 루미큐브 게임 이해하기 속성(수, 조건 등)파악하기
· 루미큐브 게임의 구조 확인하기
· 루미큐브 게임 직접 해보기
· 루미큐브 게임 전략 탐색하기
· 루미큐브 게임 속의 수학적 요소 찾아보기</td><td>30 분</td></tr>
<tr><td>2 차시</td><td>3. 속성 바꾸기 전략에 따른 변형 루미큐브 만들기</td><td>· ‘~를 바꾸면 어떻게 될까?’ 라는 의문을 가지고 변형 류미큐브 게임 만들기
· 각 모둠별로 만든 변형 루미큐브로 체험하기</td><td>40 분</td></tr>
<tr><td>3 차시</td><td>4. 만든 보드게임의 수정 및 발전</td><td>· 모둠별로 만든 보드게임 수정하기(1차)
· 조건을 강화/약화하여 발전적인 게임 만들기(2차)</td><td>40 분</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4 차시</td><td>5. 만든 보드게임 발표 및 생각 나누기</td><td>· 만든 보드게임 발표하기
· 변경된 속성과 수학적 성질 찾기
· 보드게임 만들기에 관한 생각 나누기</td><td>35 분</td></tr>
<tr><td>6. 정리하기</td><td>· 수업 내용 정리하기</td><td>5분</td></tr>
</table>

Ⅳ. 연구 결과 분석 및 논의

본 연구를 위해 제시한 과제로부터 영재학급 학생들이 변형해낸 25개의 결과를 수학의 내용 영역(주제)별로 분석해보았다. 두 가지 요소가 모두 나타날 경우에는 핵심적인 요소로 분류했다. 다음 결과는 학생들에게서 나타나는 반응을 분류하여 제시한 것이다.

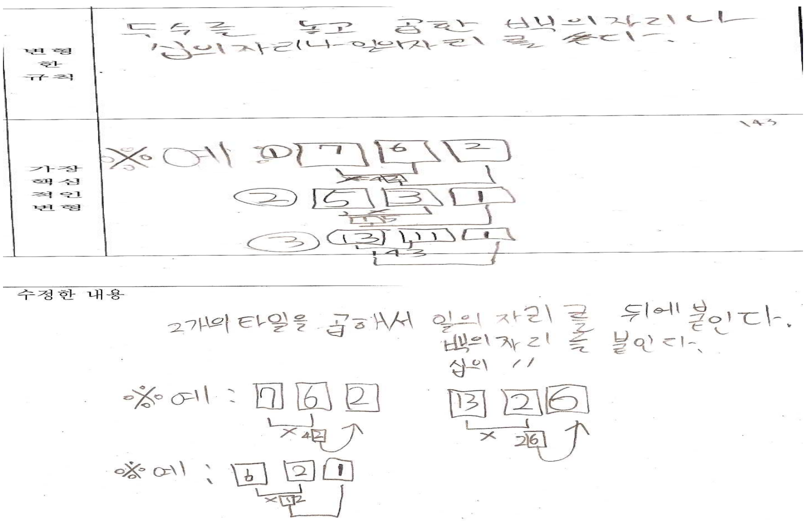
<표 5> 변형 루미큐브의 내용 영역(주제)별 사례 수 (중복 응답 허용)

내용영역	주제별	누계
수와 연산	덧셈(2), 뺄셈(3), 곱셈(1), 사칙계산(1), 홀짝(1), 약수(1), 배수(4), 분수(1), 소수(1)	15
도형	대칭(2)	2
기타	크로스(1), 대각선(1), L자(2), 기타(4)	8

각 학생들이 만든 변형 루미큐브의 1단계 <속성나열>은 거의 동일하므로 생략하고 2단계와 3단계의 사례들만 표로 요약하여 소개한다.

1. 곱셈 루미큐브

<표 6> 곱셈 루미큐브

단계	곱셈 루미큐브(수와 연산)
〈2단계〉 속성부정을 통한 의문 제기	· 더하기만 하지 말고 다른 연산으로 확장해 볼 수는 없는가? · 색상이 달라도 가능한 조합을 통해 좀 더 다양한 배열이 가능하도록 할 수는 없는가? · 타일을 새로 만들지 않고 조커의 수를 늘릴 수는 없는가? · 수학적인 요소(곱셈구구)를 강화한다. · 루미큐브 타일 같은 색은 왜 꼭 수가 연속이 되도록 놓아야 하는가? · 11과 13은 9단까지의 구구단에서 나오지 않는 수이므로 이 두 수는 빼거나 조커로 활용하여 구구단이라는 제약의 어려움을 덜어줄 수 있다.
〈3단계〉 속성재배열을 통한 새로운 게임 만들기	· 등록: 곱셈식에 나오는 수의 합이 30이상(연산부호와 등호는 생략). · 같은 색 : 같은 색의 타일 3개 이상으로 만든 곱셈식이어야 함. · 다른 색 : 곱하는 수가 서로 다른 색일 때는 계산 값도 다른 색이어야 함. (단, 십의 자리와 일의자리는 같은 색이어야 함.) · 자기 턴에서 등록하거나 배열하지 못하면 주머니에서 타일을 3개씩 가져감. · 자신의 타일을 모두 가장 빨리 내려놓는 사람이 승리하며, 진 사람이 가지고 있는 타일 중 가장 큰 수와 타일의 개수를 곱한 값을 승자에게 줌.
학생(S3)의 변형 사례	

<사례 1>

T : 루미큐브를 어떻게 변형한거야?

S3: 꼭 연속되는 자연수가 아니라 곱셈을 할 수 있는 루미큐브로 만들었어요.

T : 자세히 설명해볼래?

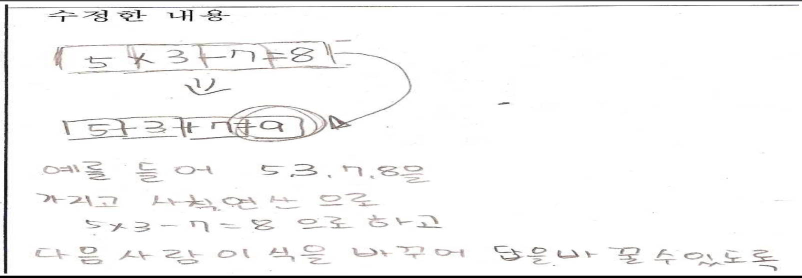
S3: 어, 예를 들어 2×4=8 이니까 타일이 $\boxed{2}\boxed{4}\boxed{8}$ 이렇게 와야 해요.
T : 아~ 그렇구나! 그런데 만약 7×6처럼 답이 두 자리가 되면 어떻게 하지?
S3: 음.. 그런 경우에는.. 음.. 아! 한 자리의 숫자만 쓸 수 있게 하는 거예요~
7×6 = 42가 되니까 이 중에 일의 자리 숫자인 2만 놓아요. $\boxed{7}\boxed{6}\boxed{2}$ 이렇게요~
T : 다른 방법이 또 있을까?
S3: 아~ 또 십의 자리 숫자만 놓을 수도 있어요. 6×2=12인 경우에는 십의 자리 숫자만 놓아서 $\boxed{6}\boxed{2}\boxed{1}$ 이렇게 놓을 수 있어요~
T : 자~
S3: 앗! 또 있어요~ 답이 크게 나오면 13×11=143처럼 이때는 백의 자리만 하면 되요.
T : 그럼 이제 루미큐브 타일로 모든 곱셈을 배열할 수 있겠구나~

연구자는 곱셈 루미큐브로 2학년 수학 교육과정에 있는 구구단 루미큐브를 예상했는데 연구 대상자였던 6학년 학생들은 저학년의 수학 내용을 떠올리기보다는 최근에 배웠던 내용을 위주로 고학년에서 주로 배웠던 내용들을 떠올려 변형을 했다. 위 S3학생은 (한 자리 수)×(한 자리 수)라는 구구단보다 더 발전적인 방법으로 자리 수에 관계없는 곱셈 변형 루미큐브를 만들었다. 하지만 자리값을 다루어본 경험이 많거나 지적으로 우수한 학생들이 사용하는 방법으로, 곱셈을 하고 난 후 답이 커지는 상황에서 답의 각 자리의 숫자를 계속 더하여 나온 값(7×6=42라면 4+2=6이므로 타일 배열은 $\boxed{7}\boxed{6}\boxed{6}$)은 떠올리지 못하고 답으로 나온 수에서 일의 자리 혹은 십의 자리나 백의 자리 등 한 자리의 값만 답으로 이용하는 방식으로 변형하였다. 학생 S3의 변형은 비교적 단순한 편인데, 그는 영재성검사에서는 탁월한 성적을 거둔 것에 비해 교과 성적에서는 크게 두각을 나타내지 않았던 점을 회상해 보면서 수학의 내용적인 수준이나 정교성이 떨어지는 것을 이해하게 되었다.

2. 사칙연산 루미큐브

<표 7> 사칙연산 루미큐브

단계	사칙연산 루미큐브(수와 연산)
〈2단계〉 속성 부정을 통한 의문 제기	· 연속된 수가 아닌 연산하는 규칙을 추가하여 확장해 볼 수는 없는가? · 색상이 달라도 가능한 조합을 통해 좀 더 다양한 배열이 가능하도록 할 수 없는가? · 타일을 새로 만들지 않고 조커의 수를 늘릴 수는 없는가? · 수학적인 요소(사칙연산)를 강화한다. · 같은 색끼리는 왜 꼭 수가 연속이 되도록 놓아야 하는가? · 가로뿐만 아니라 세로로도 놓을 수 없는가?
〈3단계〉 속성 재배열을 통한 새로운 게임 만들기	· 등록: 사칙연산 식에 나오는 수의 합이 30이상(연산부호와 등호는 생략). · 같은 색 : 같은 색의 타일 3개 이상으로 만든 사칙연산 식이어야 함. · 다른 색 : 사칙연산식의 타일이 서로 다른 색일 때는 계산 값도 다른 색이어야 함. · 식만들기에서 빼온 타일은 조커로 사용할 수 있음. · 식에서는 1∼13까지의 모든 타일을 다 사용할 수 있으나 답에서는 숫자 타일을 1∼9까지만 사용하여 놓는 위치에 따라 자리 값도 나타냄. 즉, 십의 자

<table>
<tr><td></td><td>리와 일의자리는 같은 색이어야 함.)
· 크로스 배열도 허용함.
· 자기 턴에서 등록하거나 배열하지 못하면 주머니에서 타일을 3개씩 가져감.</td></tr>
<tr><td>학생(S4)의
변형 사례</td><td>
</td></tr>
</table>

<사례 2>

T : 어떤 방법으로 변형했는지 설명해줄래?

S4: 어. 저는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 다 이용할 수 있어요. 우선 내가 낼 때는 어떤 식에 맞는 답으로 타일을 내고 그 다음 사람부터는 내 답을 바꿀 수가 있어요. 예를 들어, 각각 다른 색으로 5×3−7=8 이라고 이야기하면서 타일을 $\boxed{5}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{8}$이라고 내려놓으면 (8과 같은 색의 9를 가지고 있으면) 5−3+7=9라는 새로운 식을 만들고 그 자리에 9를 놓아서 $\boxed{5}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{9}$라고 바꿀 수 있어요.

T : 그럼 가져간 8은 어떻게 하는 거야?

S4: 그건 자기가 필요하게 써야죠. 조커로요.

T : 아~ 그렇구나. 그럼 숫자를 바꿀 수 있는 부분은 정해져 있는 거야?

S4: 네~ 아무렇게나 막 바꾸는 게 아니라, 앞의 식에 있는 수는 바꾸면 안되고 답만 바꿀 수 있어요. 사칙연산식의 타일이 (모두 같으면 답도 같은 색을 사용할 수 있지만) 서로 다른 색일 때는 계산 값도 다른 색이어야 해요.

이 변형은 연구자도 생각하지 못했던 변형으로 단순히 사칙연산 규칙에 의해서 루미큐브 배열을 늘어놓는 것이 아니라 등호가 있다고 생각하여 답 부분을 바꿀 수 있는 변형이다(루미큐브에서 붙였다 떼었다 하는 것처럼). 또한 답을 나타내는 타일을 내가 필요한 상황에서 가져가 쓸 수 있다는 점이 단순히 루미큐브 규칙 속 수학 교육과정만 변형한 것이 아니라 게임의 승패를 좌우할 수 있는 조커 사용 방법과 관련 있다는 점이 흥미롭다.

학생S4는 혼합계산이 있을 경우 계산하는 순서와 같은 여러 가지를 규칙에 반영하여 수학적인 요소를 강화하였다. 하지만 복잡한 계산 때문에 많은 타일을 내려놓지 못하는 상황이 발생할 수 있으므로 크로스를 적용하여 계산의 복잡성으로 인해 게임의 진행 속도가 느려지지 않도록 하였다. 더욱이 이 변형 루미큐브 속에서도 동일한 수 배열을 가지고 연산만 다르게 하여 새로운 답을 이끌어내는 What-If-Not 방법을 적용해냈다. 다만, 단순히 타일 중 하나를 조커로 변형하는 것이 아니라 조커의 장점과 역할을 제대로 알고 이 조커를 활용하기 위해서는 다른 사람의 타일이 내려놓은 혼합계산 식을 내가 새롭게 바꾸어 나에게 불필요한 타일은 없애고 필요한 타일은 가져올 수 있는 고도의 전략을 이용할 수 있도록 게임을 변형하였다. 그러나 수학의 내용적인 확장에 비해 계산하는 방법이나 조커를 사용하는 규칙의 확장에 더 초점이 맞춰진 것을 볼 수 있다.

3. 분수 루미큐브

<표 8> 분수 루미큐브

단계	분수 루미큐브(수와 연산)
<2단계> 속성부정을 통한 의문제기	· 연산을 하는 것이 아니라 수에 대한 개념으로 확장해 볼 수는 없는가? · 색상이 달라도 가능한 조합을 통해 좀 더 다양한 배열이 가능하도록 할 수는 없는가? · 루미큐브는 왜 한 줄만 놓아야 하는가? · 수학적인 요소(분수의 개념 및 약분과 통분)를 강화하면 어떨까? · 루미큐브 타일 같은 색은 왜 꼭 수가 연속이 되도록 놓아야 하는가? · 7, 11, 13을 분모로 분수를 만들면 통분하거나 크기를 갖게 하는 경우의 수가 줄어들기 때문에 이 수들은 조커로 활용할 수 있을까?
<3단계> 속성재배열을 통한 새로운 게임 만들기	· 등록: 크기가 같은 분수 두 쌍 이상. · 그룹 : 같은 크기의 분수를 만들어야 함. · 연속 : 분자의 수가 연속되어야 함. · 동치 분수 또는 식의 값이 같은 분수를 만들어야 함. · 자기 턴에서 등록하거나 배열하지 못하면 주머니에서 타일을 2개씩 가져감. · 자신의 타일을 모두 가장 빨리 내려놓는 사람이 승리함.
학생(S1)의 변형 사례	수정한 내용 색깔이나 수는 상관 없음. 대신 앞으로 내는 수를 자연수÷분수로 한다. 하지만 계산한 수가 자연수가 되도록 한다 그리고 대분수로 할때 분수를 가분수로 하는 대신 자연수가되도록한다 예1) $11\div\frac{2}{4}=11\times\frac{4}{2}=\frac{44}{2}=22$ $2\div\frac{2}{6}=2\times\frac{6}{2}=\frac{12}{2}=6$ 예2) $11\frac{4}{2}=\frac{26}{2}=13$ $2\frac{6}{2}=\frac{10}{2}=5$

<사례 3>

T : 타일을 새로운 모양으로 만들었네~ 이건 무슨 변형 루미큐브이지?

S1: 저는 대분수로 만들어봤어요. 루미큐브를 일자로만 배열하는 것은 너무 간단한 것 같아서 분수에서 볼 수 있는 분자 분모를 이용했어요. 우선 첫 번째는 이건 그냥 분수가 아니라 업그레이드 된 분수로 자연수와 분수의 나눗셈을 이용해서 답이 자연수가 나와야 해요.

T : 아~ 그럼 루미큐브 타일을 배열할 때는 어떤 걸 내려 놓아야하지?

S1: 타일을 내려놓을 때에는 자연수 ÷ 분수로만 타일을 내려놓아요.

T : 그렇구나~ 그럼 오른쪽(예 2)은 무슨 루미큐브지? 왼쪽(예1)과는 다른 규칙 같은데..

S1: 대분수값이 자연수가 되어야 해요.

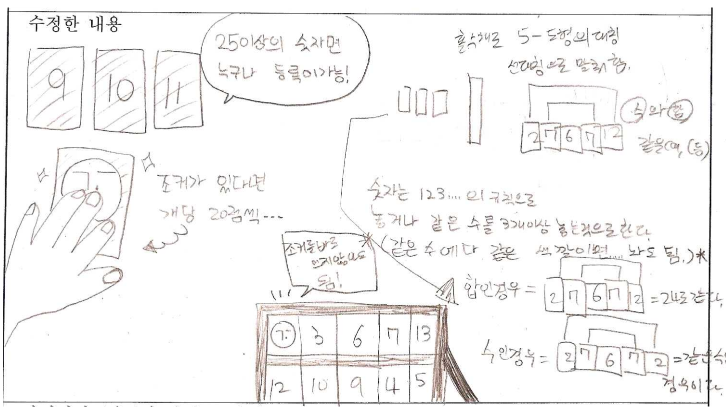
T : 좀 더 자세히 말해보면?

S1: 어, 그러니까 대분수 중에서 자연수는 어차피 자연수니까 분수 부분이 약분되어서 분모가 1이 되어야 해요!

S1은 루미큐브를 분수 루미큐브로 변형하였다. 특히 문제만들기의 2단계 의문제기와 문제 설정에 집중하여 일렬로만 놓는 루미큐브 배열 규칙에 의문을 가지고 일렬이나 크로스만 배열로도 변형하였는데, 그보다는 수학적인 요소도 함께 변형할 수 있는 것을 찾다가 분수라는 수학적인 요소를 변형 루미큐브 규칙으로 사용하였다. 분수에서는 분모와 분자를 구분할 수 있으므로 배열 방법도 달라지고 새로운 수학적인 요소도 강화할 수 있도록 변형하여 규칙을 새롭게 만들었다. 관찰자가 예상했던 분수 변형 루미큐브는 단순히 약분 통분의 개념으로 크기가 같은 분수를 찾는 활동만을 생각했었는데, S1학생은 분수의 나눗셈 및 자연수가 되는 분수로 루미큐브를 변형하였다. 영재성 검사 성적이 최상위 수준의 학생답게 특이한 변형이었다.

4. 대칭 루미큐브

<표 9> 대칭 루미큐브

단계	대칭 루미큐브(도형)
<2단계> 속성 부정을 통한 의문 제기	· 수나 연산이 아닌 다른 개념으로 확장해 볼 수는 없는가? · 색상이 달라도 가능한 조합을 통해 좀 더 다양한 배열이 가능하도록 할 수는 없는가? · 수학적인 요소(도형의 대칭-선대칭)를 강화하면 어떨까? · 필요한 타일이 나오지 않는 경우 이미 나와 있는 타일을 여러 번 사용할 수는 없는가? · 대칭축을 중심으로 양옆에 있는 타일의 합이 같아야 하므로 다른 배열을 가지고 같은 합을 만들 수 있는 다양한 경우를 생각할 수 있다.
<3단계> 속성 재배열을 통한 새로운 게임 만들기	· 등록: 곱셈식에 나오는 수의 합이 25이상. · 타일은 무조건 홀수로 놓아야 하며 가운데 타일이 대칭축이 되어야 함. · 대칭축을 중심으로 양옆의 타일 합이 같아야 하며 색 또한 같아야 함. · 자기 턴에서 등록하거나 배열하지 못하면 주머니에서 타일을 3개씩 가져감. · 자신의 타일을 모두 가장 빨리 내려놓는 사람이 승리함.
학생(S2)의 변형 사례	

<사례 4>

T : 어떤 규칙으로 루미큐브를 변형한 거야?

S2: 음, 저는 선생님하고 배웠던 5학년 때 도형의 대칭을 생각해 봤어요~

T : 아하~ 도형의 대칭에서 구체적으로 어떤 규칙을 사용했어?

S2: 우선 선대칭 도형에는 대칭축이 있고 이 대칭축을 중심으로 대칭을 이루잖아요. 그래서 일단 대칭축이 되는 타일이 있고 양 옆으로 타일들이 대칭을 이루는 거예요.

T : 그럼 어떤 대칭을 이루는 건데?

S2: 두 가지 방법이 있는데 첫 번째는 타일들의 합이 같아야 해요. 타일의 수는 물론 같고요. 이렇게 가운데 대칭축 타일 6을 중심으로 대칭축 바로 옆에 있는 타일 두 개의 합이 7+7=14니까 대칭축 두 번째 옆에 있는 타일들의 합도 2+12=14로 같아야 해요. 그리고 두 번째는 타일들이 무조건 다 똑같아야 해요. 대칭축 6을 중심으로 $\boxed{2}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{2}$ 이런 순서로 놓아야 해요.

T : 아~ 그렇구나. 도형의 대칭 시간에는 선대칭 말고도 다른 대칭도 배웠었는데..

S2: 아, 점대칭도 있는데 그건 너무 어려워서... 뭔가 복잡해질 거 같아서..
도형 배울 때도 점대칭이 더 복잡했잖아요. 쉬웠던 선대칭으로만 변형 해 봤어요.

T : 그렇구나. 그럼 가운데 대칭축을 이루는 타일과 함께 양 옆으로 배열한 루미큐브 타일 모두가 하나의 도형이라고 생각하고 이 도형이 선대칭 도형이 되는 거야?

S2: 네. 선대칭 도형이죠. 아!!!! 숫자 모양까지 생각하면요?? 뭐 그렇게 생각하면 선대칭 도형이 아닐 수도 있겠네요. 왼쪽 $\boxed{7}$의 대칭은 오른쪽에서  이런 모양이 되어야 완벽한 대칭이 된다는 거죠?

T : 그렇지~

S2: 음.. 그럼 그렇게 숫자까지 뒤집어져야 대칭이 되는 거예요? 저는 그냥 숫자의 모양이 대응을 이뤄서 대칭이 된다는 게 아니라 그 숫자의 값이 대칭이 된다고 생각했어요.

대부분의 학생들이 수와 연산 영역에만 집중한 반면 S2 학생은 도형의 대칭성을 이용하였다. 물론 정확한 도형의 대칭은 타일의 숫자 역시 대칭이 되어야 하고 선대칭도형이라기보다는 선대칭의 위치에 있는 수의 대칭성이라는 점에서 일부 오류가 있으며 점대칭까지 고려하지 못한 점은 학생이 도형의 대칭에 대한 개념을 정확히 적용하지 못한 제한점도 있다. 하지만 수와 연산 영역의 한계를 벗어나 도형(선대칭) 영역의 소재를 활용하려고 했다는 점이 흥미롭다.

Ⅴ. 마무리

본 연구는 What-If-Not 전략을 활용한 문제 만들기 수업을 통해 영재학급학생들이 변형하여 만든 루미큐브 게임의 사례를 분석하고, 이를 통해 영재학급학생들을 위한 새로운 루미큐브 만들기 수업을 할 때 고려할 수 있는 교육적 시사점을 제안하는 것이었다. 학생들이 직접 만든 변형 루미큐브의 내용 영역별 사례는 앞 장에 제시하였는데, 이를 통해 다음과 같은 교육적 시사점을 얻을 수 있었다.

첫째, 속성 나열, 속성 부정을 통한 의문 제기, 속성재배열을 통한 새로운 게임 만들기의 3단계로 축약한 What-If-Not 전략을 활용하여 초등 수학 영재 수업에서 교육적으로 의

미 있는 여러 가지 유형의 변형 루미큐브를 직접 만들어 내는 것이 가능함을 확인하였다.

둘째, 변형 루미큐브 만들기 수업에서 처음에 학생들은 주로 재미위주의 게임을 만들려고 하거나 형식적인 변형을 시도하므로, 교사는 수학적으로 의미있는 내용이나 개념이 반드시 포함되도록 강조할 필요가 있다.

셋째, 학생들이 만든 변형 루미큐브 중에서 수학적인 요소가 포함된 사례들로는 가장 기본적인 덧셈, 뺄셈에 대한 변형을 넘어, 약수와 배수, 소수, 분수의 계산, 규칙의 배열, 대칭성 등과 관련된 다양한 요소들이 포함될 수 있다.

넷째, 영재들의 창의성은 수업자가 사전에 예상한 것보다 더 기발하고 다양한 사례들을 생산해 내곤 한다. 예를 들어, 식은 가만히 두고 답만 변형하는 사칙연산 루미큐브, 분수의 나눗셈식이나 동치를 이용한 분수 루미큐브 등 다양한 변형이 나타나 수학 규칙을 응용할 수 있으며, 변형 루미큐브의 이름을 만드는 것도 창의적인 학습이 될 수 있다.

다섯째, 루미큐브는 수를 기본으로 하는 보드게임이지만 교사의 안내 발문에 따라서는 도형의 대칭성이나 규칙성이라는 수학적인 요소를 추가하여 새로운 보드게임을 만들 수도 있다. 루미큐브라는 보드게임 자체가 수와 연산을 기본적으로 사용하는 보드게임이라서 수와 연산이 아닌 다른 영역의 완벽한 개념을 규칙에 넣기는 쉽지 않으므로 교사의 확산적 발문이 필요하다.

여섯째, 하나의 보드게임 안에 수학의 여러 가지 내용 영역이나 두 가지 이상의 수학적인 요소가 포함된 보드게임으로 변형하는 것도 가능하므로 앞으로 더 많은 변형이 일어날 수 있음을 기대할 수 있다.

이를 바탕으로 What-If-Not 전략을 활용한 새로운 루미큐브 만들기 수업의 교육적 효과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 수의 다양한 조합이나 합산으로 인한 수리력이 향상된다.

둘째, 타일의 논리적 배열로 인한 논리적 사고력을 향상시켜 준다.

셋째, 다양한 수의 배열을 탐구하면서 문제 해결능력 증진에 도움이 된다.

넷째, 주어진 조건의 고정된 게임에서 탈피하여 조건을 직접 변경하고 새로운 게임을 만들어 봄으로써 창의력 신장에 도움이 된다.

다섯째, 수의 규칙성 외에도 사칙계산이나 대칭성과 같은 내용으로 활용이 가능하다.

여섯째, 다른 사람들과 함께 즐길 수 있는 게임으로 사회성이 발달된다.

이제 본 연구와 관련된 제한점을 보완하고 신뢰성 있는 후속 연구를 위한 제언은 다음과 같다.

영재학생들이라 할지라도 처음에 변형한 루미큐브는 재미 위주의 형식이나 수학 내용 요소로도 대부분이 수와 연산 분야에만 한정되어 있는 것을 확인할 수 있었다. 루미큐브라는 보드게임 자체가 수와 관련된 게임이다 보니 변형해서도 그 제한점을 벗어나지 않는 것이라고 할 수 있다. 그러나 교사의 간단한 “~라면 어떨까? ~가 아니라면 어떨까?”라는 질문만으로도 일부 학생들은 루미큐브의 배열 방향을 가로 뿐만 아니라 가로-세로의 양 방향으로도 바꾸거나 수의 대칭성을 활용하는 사례가 생겨났다. 따라서 “수나 계산에만 집착하지 말고 수 이외의 다른 것(예를 들어, 배치 방법이나 규칙성에 주목해 보면 어떨까? 등)을 추가 질문으로 던질 필요가 있다. 변형 루미큐브의 경우에도 Freudenthal의 안내된 재발명법에 따른 교재와 수업의 재구성이 가능할 것이며, 이를 위한 교사의 적절한 안내가 필요함을 암시한다. 그러나 한편, 게임이라는 소재에 흥미와 호기심을 가지고 적극적으로 참여하는 학생들의 특성을 넘어, 수학영재들을 위해 수학 내용과 관련된 게임을 활용하고 변형할 수 있는 보드게임을 발굴하고 이들을 영재의 수준으로 좀 더 심도있게 연구할 필요가 있다. 영재 수업은 지식의 소비자가 아닌 지식의 생산자가 되도록 하는 것이다.

참 고 문 헌

구본왕, 송상헌 (2011). 폴리오미노에 What if (not)? 전략을 적용한 영재 학급용 수학 수업 소재 발굴과 활용. **대한수학교육학회지 <학교수학>, 13**(1), 175-187.

백대현, 이진희 (2010). 수학 영재의 문제만들기: 사례 연구. **대한수학교육학회지 <학교수학>, 12**(3), 259-271.

송상헌 (2012). 트랜스 루미큐브(Trans Rummikub). **2012 겨울 경인교육대학교 수학영재캠프(Recreation 활동을 통한 Re-Creation Mathematics!)교재(교사용),** 84-95.

송상헌, 정영옥, 임재훈, 신은주, 이향훈 (2007). 수학영재들이 NIM 게임 과제에서 만든 문제 만들기 사례 분석. **대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 17**(1), 51-66.

이대희 (2013). **영재학급 학생들이 What-If-Not 전략을 사용하여 만든 루미큐브의 변형 사례 분석**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

임근광 (2010). 종이접기 프로그램에서 수학영재학생들의 문제 만들기 전략 분석. **한국영재학회지 <영재교육연구>, 20**(2), 461-486.

임문규 (1996). 문제 설정에서 사고 활동의 조사 분석. **한국수학교육학회지 <수학교육>, 35**(1), 1-13.

Brown, S. I & Walter, M. I. (1983). *The Art of Problem Posing*. Philadelphia, PA:Franklin Institute Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. The Univ. of Chicago Press.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

루미큐브 at http://www.rummikub.co.kr/rummikub.php?html=rummikub1

<Abstract>

The case analysis of Rummikub game redeveloped by gifted class using What-If-Not strategy

Lee, Dae Hee[4]; & Song, Sang Hun[5]

Problem posing activity of which a learner reinterprets an original problem via a new problem suggested, is a learning method which encourages an active participation and approves self-directed learning ability of the learner. Especially gifted students need to get used to a creative attitude to modify or reinterpret various mathematical materials found in everyday usual lives creatively in steady manner via such empirical experience beyond the question making level of the textbook. This paper verifies the possibility of lesson on question making strategy utilization for creativity development of gifted class, and analyzes various cases of students' trials to modify the rules of a board game called Rummikub in application of their own mathematics after learning What-If-Not strategy.

Key words: mathematically gifted students, Problem posing, What-If-Not strategy, Rummikub, game

논문접수: 2013. 07. 09
논문심사: 2013. 07. 26
게재확정: 2013. 08. 20

4) eday4933@hanmail.net
5) song2343@hanmail.net