East Asian Mathematical Journal
Vol. 29 (2013), No. 2, pp. 207-239
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2013.014

서술형 평가를 통한 학생들의 도형에 대한 이해 고찰

A Study on Students' Understanding of Figures through Descriptive Assessments

최 수 임 · 김 성 준[1)]

Abstract. This research is a study on student's understanding fundamental concepts of mathematical curriculum, especially in geometry domain. The goal of researching is to analyze student's concepts about that domain and get the mathematical teaching methods. We developed various questions of descriptive assessment. Then we set up the term, procedure of research for the understanding student's knowledge of geometric figures. And we analyze the student's understanding extent through investigating questions of descriptive assessment. In this research, we concluded that most of students are having difficulty with defining the fundamental concepts of mathematics, especially in geometry. Almost all the students defined the fundamental conceptions of mathematics obscurely and sometimes even missed indispensable properties. And they can't distinguish between concept definition and concept image. Prior to this study, we couldn't identify this problem. Here are some suggestions. First, take time to reflect on your previous mathematics method. And then compile some well-selected questions of descriptive assessment that tell us more about student's understanding in geometric concepts.

Ⅰ. 서론

교육을 한 마디로 정의한다는 것은 매우 어려운 일이지만 기본적으로 교육은 '무엇을' 그리고 '어떻게' 가르쳐야 하는가에 대한 문제의식에서 출발한다. 여기서 '무엇'에 대한 내용은 교육과정의 내용이고, '어떻게'와 관련된 내용은 교수 학습 방법을 의미한다. 다양한 교수 학습 자료의 개발과 보급 그리고 현장 교사들을 위한 연

---

1) 교신저자
2013년 1월 21일 투고, 2013년 2월 23일 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: MSC 97C30, 97D50.
Key words: Defining, naming, geometric figures, descriptive assessment, concept definition, concept image.

수에서 보편적으로 초점은 교수 학습 방법에 맞추어져 있다. 하지만 교사에게 교육에 대한 책무성이 높아지면서 '무엇을 어떻게 가르쳐야 할 것인지'에 대한 논의는 있어 왔지만, '잘 가르쳤는지' 곧, 평가에 대해서는 교육과정이나 교수 학습 방법에 비해 지속적인 논의가 이루어지지 않았다. 교육과정을 이루는 5가지의 하위 요소들(성격, 목표, 내용, 교수 학습 방법, 평가) 중에서 교육과정 내용과 교수 학습 방법 및 평가의 3가지 영역이 서로 밀접한 관계를 이루며 균형을 이루어야만 제대로 된 교육이 이루어질 수 있는데, 지금까지는 평가에 대한 논의보다 교수 학습 방법에만 그 무게를 두었던 것이 사실이다(김수환 외 7인, 2009).

기존의 수학과 평가의 문제점을 바로 잡을 수 있고, 학습자가 학습한 내용을 올바로 이해했는지 보다 구체적으로 확인할 수 있으며, 평가의 결과를 통해 교사에게는 교수 학습 방법 개선에 대한 보다 실제적인 자료를 제공할 수 있는 방법 중의 하나가 '서술형 평가'이다. 서술형 평가란 객관식 보기 중에서 하나의 답을 선택하는 것이 아니라 학습자가 직접 자신의 생각과 풀이 과정에 근거해서 자신의 수학적 생각이나 이미지에 따라 설명해 보이는 것을 말한다. 이를 통해 교사는 기존의 객관식 평가에서는 나타나지 않았던 학습자의 사고 과정이나 비형식적 지식에 대한 정보를 얻을 수 있으며, 더불어 학습자들이 문제 해결과정에서 사용하는 학습자의 사고 전략을 파악할 수 있게 된다.

초등수학의 여러 영역 중 수업을 하다 보면 학생들의 흥미도가 가장 높은 영역 중 하나가 바로 도형 영역이다. 일단 복잡한 계산을 할 필요도 없고 그리고 시각적으로도 눈에 잘 들어오기 때문이다. 그 이유는 아무래도 도형을 지도하고 학습하는 과정에서 탱그램이나 패턴블록 또는 지오보드 등과 같은 다양한 교구를 많이 사용하고, 또 직접 그려보고 오려보는 등의 구체적인 조작 활동이 많아서 학생들의 흥미가 높게 나타나기 때문이다(김성준, 2006). 하지만 이러한 선호도와 이해도는 다르게 나타난다. 실제로 도형의 기본 개념이나 성질에 대해 질문을 해 보면 알고는 있지만 제대로 설명을 하지 못하는 경우를 종종 볼 수 있으며, 도형의 기본 개념에 대한 동일한 용어가 학생의 이해 수준에 따라 서로 다르게 사용되는 경우를 자주 발견하게 된다. 따라서 도형 영역의 학습 후 서술형 평가를 실시한다면 학생들이 도형의 기본 개념과 성질에 대해 바르게 이해했는지 알아보는데 도움이 될 수 있을 것이다. 이해한 내용을 자신의 언어로 풀어서 설명하고 답안을 작성하도록 해 보면 잘못 이해하고 있는 개념은 없는지, 도형의 어떤 요소에 초점을 맞추고 있는지, 개념이미지와 개념정의 사이의 차이는 어떤 역할을 하는지에 대한 정보를 얻을 수 있고 이를 바탕으로 수업에 필요한 정보를 이끌어낼 수 있을 것이다.

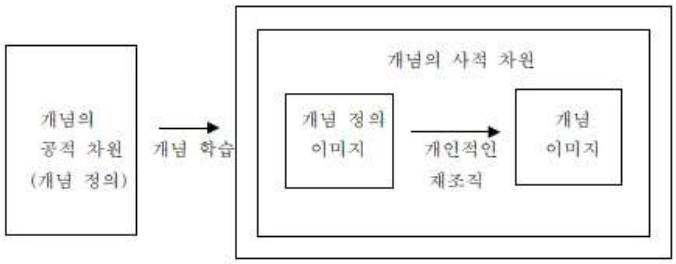
이에 본 연구에서는 초등학교 4학년 학생들을 대상으로 두 가지 유형의 서술형 평가를 실시한다. 먼저 '정의하기' 서술형 평가에서 도형 영역의 기본 개념[2] 이해와 성질을 기술하게 함으로써 도형의 기본적인 개념과 성질에 대한 지식 및 이해의 정

도를 파악하고자 한다. 더불어 학생들은 도형의 어떠한 특성에 초점을 맞추어 '이름 짓기' 활동을 서술형 평가를 통해 실시함으로써 이를 통해 도형 영역 지도에서 얻을 수 있는 시사점, 이를테면 학생들의 비형식적인 개념이미지를 통해 학생들이 도형을 파악하고 이해하는데 초점을 두고 있는 부분이 어디에 있는지 이 역시 정의하기 서술형 평가와 함께 분석함으로써 평가를 통해 그 내용과 교수 학습 방법에 적절한 피드백을 제공하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 개념이미지와 개념정의

개념이란 인간이 지각하고 경험한 개개의 사상에서 특수성은 버리고, 공통적인 속성(혹은 특성)을 기초로 하여 독특한 이름이나 기호로서 불리어질 수 있도록 한 덩어리로 뭉칠 수 있는 총체를 말한다(박성택, 1994). 즉 수학에서 개념이란, 다각형, 함수 또는 좌표값 등과 같은 하나의 아이디어이다. 도형 영역에서 개념은 주로 기하학적인 용어의 정의를 의미한다. 학생들은 기하 개념을 배워야하며, 그들은 점, 선, 면, 평행 그리고 수직과 같은 개념들을 통해 기하를 학습하게 된다. 이와 함께 대상들 사이의 유사점과 차이점을 인식할 수 있어야 한다(전지훈, 2009).



<그림1> 개념정의와 개념이미지 관계(신성희, 2011)[3)]
<Fig.1> The relation between concept definition and concept image

학생들이 수학적 개념의 공식적인 정의를 배우기 전에 이미 여러 형태로 그 개념

2) 본 연구에서 사용하는 '수학적 개념'은 초등학교 수학과 교육과정의 내용 체계표에 제시된 내용 가운데 교과서의 '약속'하기에서 규정한 용어를 말한다.
3) 이 그림에서 화살표는 교과서 또는 수업활동의 제시방법을 의미한다. 반면 화살표를 반대로 해석하면 학생들이 수학 수업에서 이해한 개념을 문제해결이나 탐구학습에서 발현하는 과정으로 볼 수 있을 것이다.

과 접한 적이 있고 그에 따라 형성된 복잡한 인지 구조가 학생들의 마음속에 들어와 있다가 그 개념을 상기해서 다루게 되면 그와 함께 불러내어져 의식적으로나 무의식적으로 개념의 의미와 사용법에 영향을 주게 된다. 개념의 심상 외에도 각 개인의 마음속에는 그 개념과 관련된 성질들의 집합이 있을 수 있다. Vinner는 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이뤄진 인지구조를 '개념이미지'(concept image)라고 정의하는데 개념이미지는 사람에 따라 다르며 오랜 경험을 통해 형성되며 개인이 새로운 자극을 만나거나 성장함에 따라 변화된다. 그리고 비순화적인 방법으로 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의를 '개념정의'(concept definition)라고 보았다(노영아, 2007, 재인용).

2. 이름짓기(naming)

학교수학에서 학생들은 수학적인 엄밀한 정의를 통해서가 아니라 보통 정례와 반례를 통한 예시적(외연적)인 방법으로 도형 개념을 학습한다. 일련의 예를 경험하고 그 성질을 논의함으로써 도형의 어떤 성질이 도형을 정의하는지 학습하게 된다(강문봉 외 18인, 2003). 그러나 이 과정에서 도형의 이름은 절대적이고 수동적으로 학생들에게 주어지고, 그들은 이름을 받아들이고 외우는 데에만 집중하는 것이 일반적이다. 그러나 이름짓기(naming)는 이러한 틀을 대신하여 학생들의 능동적인 참여를 통해 스스로 발견한 도형의 특징을 보여줄 수 있는 하나의 방법이 될 수 있다(Wall, 2003). 특히 본 연구에서 이름짓기는 도형 영역에서 학습한 개념들이 비형식적인 지식 수준에서 어떤 요소들과 어떤 형태로 결합되어 있는지를 가늠하기 위해 사용되고 있다. 곧, 이름짓기를 통해 학생들은 각각의 도형에서 어떤 부분에 더 많이 집중하고 있는지, 어떤 맥락과 관계에서 도형에 의미를 부여하고 있는지를 파악할 수 있으며, 이를 통해 다양한 오개념과의 관련성 및 도형 학습지도를 위한 시사점을 찾아볼 수 있을 것이다.

3. 선행연구 고찰

초등학교 수학에서 도형 개념과 관련해서 특히 개념정의와 개념이미지와 관련해서 다양한 연구가 진행되어왔다. 최근에 이루어진 몇몇 연구를 살펴보면, 임승현(2011)은 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 도형의 높이 개념에 대한 연구를 통해 높이에 대한 개념이미지를 통해 비형식적 지식을 다루고 있으며, 서은영(2009)은 초등학교 4학년 학생들을 대상으로 van Hiele 이론에 따르는 도형개념의 이해수준을 분석한 바 있다. 또한 도형 영역에서의 오류와 관련해서 배수진(2011)은 도형의 대칭 영역에서 나타나는 오류를 초등학교 6학년 학생들에게서 찾아보았으며, 노영아

(2007)는 초등학교 4학년 학생들이 도형 영역에서 갖는 오류와 그 원인에 대한 분석하였으며, 장영은(2003)은 도형영역에서의 문제해결에서 나타나는 오류를 5-6학년 학생들에게서 찾고 그 원인에 대해 논의하였다. 이와 같은 연구들은 초등학교 수학에서 도형 영역의 학습과 지도를 개선하기 위해 이루어졌으며, 같은 맥락에서 이길섭(2004)은 초등학교 기하학습 향상을 위한 지도방안을 개발하고 그 적용에 관한 연구를 실시한 바 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

본 연구는 연구자가 근무하는 부산광역시 소재 G초등학교 4학년 3반 학생 25명을 대상으로 이루어졌다. 4학년 2학기 수학 교과서 도형 영역에서 제시된 약속하기의 개념을 물어보는 '정의하기' 서술형 평가와 이러한 개념을 배운 뒤 각각의 도형을 어떤 이미지에서 바라보고 있는지를 살펴보는 '이름짓기' 서술형 평가를 구안하였다. 이러한 두 가지 서술형 평가를 통해 초등학교 4학년 학생들의 도형 영역에서 제시된 기본 개념의 이해 정도를 파악하고, 그리고 이름짓기 활동을 통해 학생들의 도형을 학습한 뒤에 도형의 어떤 요소에 초점을 맞추고 있는지 그들의 개념이미지는 어떻게 구성되어 있는지를 알아봄으로써 도형을 가르치고 학습하는 과정에서 유의미한 시사점을 찾고자 하였다. 즉, '정의하기'에서 드러난 오답과의 관련성을 '이름짓기'에서 찾아보고자 하였다.

먼저 본 연구는 학생들이 4학년 2학기에서 배우고 있는 도형의 기본 요소 및 개념에 대한 이해의 정도를 파악하기 위해, 3단원 '수직과 평행', 4단원 '사각형과 다각형'에서 등장하는 교과서 약속하기를 중심으로 다음과 같이 서술형 평가 문항을 개발하였다.

자료번호	4학년-2학기 -3단원	재미있는 수학공부		4학년 반	
				이름	
단원	3. 수직과 평행	내용	약속하기 활동		

◈ <약속하기>의 뜻을 설명해봅시다.
그림을 그려서 함께 설명하면 더 좋습니다.

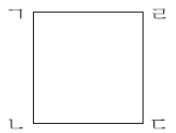
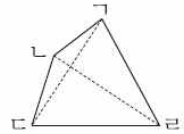
1	수직	
2	수선	

위와 같은 서술형 평가 문항에서는 3단원에서 수직, 수선, 평행, 평행선, 평행선 사이의 거리 등 모두 5가지 기본 개념을 제시하였으며, 이에 대한 설명을 그림 또는 언어로 자유롭게 표현하도록 하였다. 마찬가지로 4단원에서는 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 다각형, 정다각형, 대각선 등 6가지 기본 개념을 제시하고 이에 대한 학생들의 이해를 답안을 통해 분석하였다. 각 단원의 서술형 평가는 학습 이후 시간 간격을 둠으로써 학생들의 개념 이해가 어떻게 전개되는지 살펴보기 위해, '수직과 평행'은 5단원 학습 이후에, 그리고 '사각형과 다각형'은 6단원 이후에 각각 한 차례씩 이루어졌다.

이처럼 교과서에 제시되어 있는 약속하기 수준의 기본 개념을 묻는 서술형 평가 이후에는 이들 각각의 도형에 대해 새로운 이름을 짓고 그에 대한 이유를 적는 '이름짓기' 서술형 평가가 이루어졌다. 이름짓기의 경우 학생들의 도형에 대한 개념이미지를 파악하기 위한 것으로, 3단원과 4단원 학습 이후 약 1개월 정도 시간 간격을 두었으며, 3단원에서 다루었던 '수직과 평행'의 경우 7단원 학습 이후에 한 차례, 그리고 4단원에서 다루었던 '사각형과 다각형'은 8단원 이후에 두 차례에 나누어 이름짓기를 실시하였다.

자료번호	4학년-2학기 -4단원	재미있는 수학공부		4학년 반 / 이름	
단원	4.사각형과 다각형	내용	이름짓기 활동		

◈ 다음 주어진 도형의 '약속'하기 이름을 아래에 씁니다.
그런 다음 자신만의 이름을 붙이고 그 이유를 설명해봅시다.

2	 ( )	▶내가 지어준 이름 - ▶이유 -
3	 ( )	▶내가 지어준 이름 - ▶이유 -

본 연구는 4학년 2학기 3단원 '수직과 평행', 4단원 '사각형과 다각형' 학습 이후에

5~8단원을 마치는 시점에 각각 '정의하기' 서술형 평가와 '이름짓기' 서술형 평가를 순차적이면서도 교대로 실시하는 방법을 취하고 있다. 이를 통해 학생들의 도형에서 제시된 기본 개념의 이해를 일차적으로 살펴보고 이 과정에서 드러나는 오답을 살펴보았으며, 특히 특징적인 오답 및 반복되는 오답을 분석 및 정리하여 교수 학습 방법의 시사점을 도출하였다. 또한 이러한 오답과 관련해서 학생들의 개념이미지를 파악하기 위해 이름짓기에서 학생들이 주목하는 도형의 시각적인 측면(외연), 성질(내포), 그리고 학생들의 감정적인 측면 등을 분석하였다. 곧, 학생들 자신만의 이름짓기 활동을 할 때 어떠한 수학적 측면(외연과 내포) 또는 비수학적인 측면(감정이나 일상)들을 사용하는지 분석함으로써 도형 지도 학습을 위한 시사점을 이끌어내고자 하였다.

Ⅳ. 연구결과

본 연구에서는 학생들이 갖고 있는 도형에 대한 비형식적 개념을 알아보기 위해 이름짓기 서술형 평가를 중심으로 살펴보는 것을 목적으로 하였으나, 그 이전에 먼저 도형의 기본 개념에 대한 이해 정도를 분석함으로써 학생들이 도형에 대한 기본 개념을 정확하게 이해하고 있는지, 비형식적인 개념과 독립적으로 인식하고 있는지, 그리고 개념이미지는 비형식적 개념과 어떻게 관련되어 있는지를 살펴보고자 하였다. 다음 <표1>은 4학년 2학기 도형 영역에서 등장하는 기본 개념들에 대한 이해 정도를 '정의하기' 서술형 평가를 통해 살펴본 것이다.

<표1> 4학년 2학기 도형 영역의 기본 개념 이해(N=25)[4)]
<Table1> Understanding on basic concepts of figures in the 4th grade 2nd semester

문항 번호	내용	정답	오답	오답특징
1	수직	15	10	수직은 90도인 것으로 받아들임. 두 직선 사이의 위치관계로 파악하지 못함.
2	수선	12	13	수직과 수선을 동일한 것으로 이해하고 있음.
3	평행, 평행선	16	9	평행과 평행선을 모두 끝없이 이어도 만나지 않는 것으로만 이해하고 있음.
4	평행선 사이의 거리	7	18	질문 그대로 평행선 사이의 거리로만 답하고 이에 대한 설명을 하지 못함.
5	사다리꼴	23	2	한 쌍의 변의 길이가 평행하다거나 한 쌍이 평행하다라고만 함.

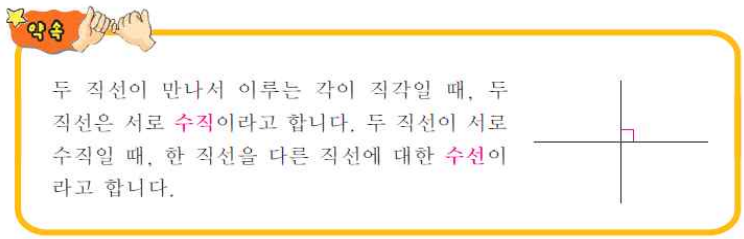
4) <표1>에서 정답은 올바른 개념정의에 따라 답을 한 학생으로, 그리고 오답은 잘못된 개념이미지 또는 오개념에서 비롯된 답을 말한 경우로 볼 수 있을 것이다.

6	평행사변형	20	5	두 변의 길이가 평행하다고 하거나 변의 위치가 아닌 길이로 평행을 이해함.
7	마름모	18	7	네 변이 서로 직각이거나 네 쌍의 변의 길이가 같다고 이해함.
8	다각형	5	20	각으로만 둘러싸인 도형 또는 각이 많은 도형으로 이해함.
9	정다각형	4	21	정다각형을 설명할 때 정사각형만을 그림으로 제시하는 경우가 많음.
10	대각선	6	19	사각형에서만 주로 대각선을 생각하고 있으며 꼭짓점과 꼭짓점을 연결한 것으로 이해함.

다음은 각 도형에 대한 기본 개념의 이해 정도를 알아보기 위해 도형의 기본 개념을 서술해보는 것과 동시에 도형의 이름짓기 활동을 서술형 평가를 통해 살펴봄으로써, 4학년 2학기에서 다루는 각각의 도형 개념에 대해 학생들이 보이는 오답의 특징과 함께 비형식적인 개념이 어떤 요인에서부터 비롯되는지를 생각해보기 위한 것이다. 또한 이 둘 사이의 관련성으로부터 오답 또는 오개념의 원인을 찾아봄으로써 도형 학습을 개선하기 위한 방안을 찾아본다.

1. 수직, 수선

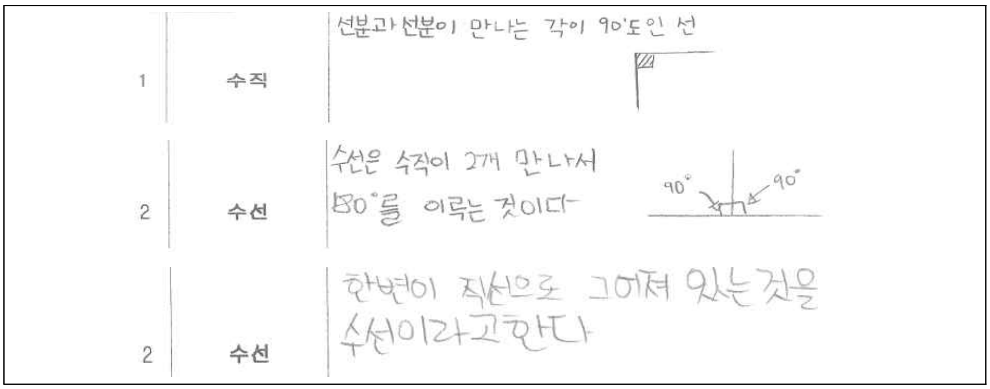
4학년 2학기 3단원 '수직과 평행'에서 다루고 있는 약속하기에 따르면 수직과 수선은 <그림2>와 같이 정의되고 있다.



<그림2> 수직, 수선의 약속하기
<Fig.2> Definition of perpendicularity and perpendicular line

교과서 약속하기는 수직을 '두 직선'으로 시작해서 두 직선이 만나는 상황 가운데 특수한 경우 곧, 두 직선이 만나서 이루는 각이 직각이 될 때 그 때 두 직선은 서로 수직이라고 정의하고 있다. 교과서는 교육과정에 제시된 용어인 '수직'만을 붉은 글씨로 강조하고 있지만 사실 중요한 대목은 '서로 수직'이라는 부분이며 덧붙이면 두 직선의 위치관계 가운데 하나로 수직을 파악하는 부분이다. 수선은 수직이 정의

된 상태에서 수직을 이루는 두 직선에서 비롯되며 하나가 다른 하나의 곧, 한 직선이 다른 직선의 수선이 된다는 것을 이해할 수 있어야 한다. 이처럼 수직과 수선은 만남과 직각을 전제로 하는 두 직선의 위치관계, 그리고 서로에 대한 각각의 직선으로 정의되고 있으나 학생들은 이것과 다른 양상으로 이해하고 있음을 <그림3>에서 알 수 있다.

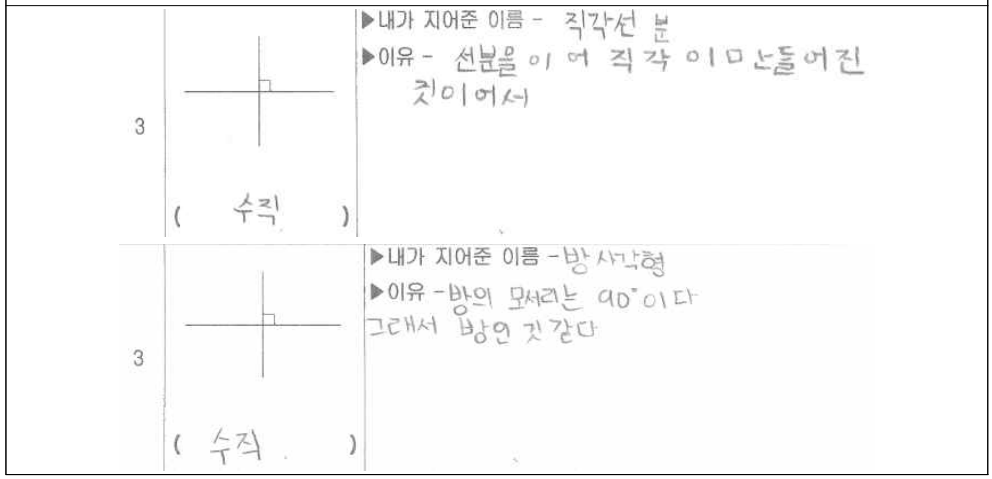


<그림3> 수직, 수선에 대한 학생들의 답안 예시
<Fig.3> Examples of response about perpendicularity and perpendicular line

두 직선이 서로 만나서 이루는 각이 직각일 때 두 직선은 서로 수직이라고 말한다. 그러나 학생들 대부분은 수직과 직각을 같은 개념선상에서 이해하고 있으며 수직을 90도인 것이나 각이 90도인 선 또는 선분이 만나 직각이 될 때 그 직각을 수직으로 이해하고 있다. 수선의 개념 역시 두 직선이 서로 수직이 될 때 한 직선이 다른 직선의 수선이 된다는 개념을 바르게 이해하지 못하고 수직(이때 학생은 직각의 의미로 수직을 사용했다)이 2개 만나서 이루는 것, 직각을 이루는 두 선분 또는 직선 2개가 서로 만나서 각을 이등분하는 것 등으로 설명했는데, 이때 가장 많이 그리고 중요하게 등장하는 용어는 직각이며, 수직과 마찬가지로 수선도 직각에 주로 초점이 맞추어져 있다.

수직과 수선은 두 개의 직선을 전제로 하는 개념이다. 따라서 두 직선이 90도로 만나는 상태 즉 직각이 되는 상황에서 직각만을 강조할 것이 아니라 이 때 두 직선이 서로 수직으로 만난다는 상황을 강조할 수 있어야 한다. 덧붙이면 수직은 하나의 대상(여기서는 하나의 직선)을 또는 하나의 개념(여기서는 직각)을 각각 독립적으로 나누어 보는 것이 아니라 두 대상의 관계(두 직선이 직각을 이룬다)를 파악할 것을 요구한다. 수선 역시 두 직선이 서로 수직일 때 하나의 직선이 다른 직선의 수선이 됨을 서로 관계적으로 이해할 수 있어야 한다. 이를 위해서는 개념을 개념이미지 상태로 두는 것보다는(이 경우 직각만이 남을 수 있기에) 직선의 위치 관계

를 다양한 상황과 함께 제시하여 두 직선의 다양한 상황을 보면서 그 관계를 언어로 설명하는 연습이 필요하다. 그리하여 수직과 수선이 두 직선 사이에서 비롯되는 개념이고 그리고 서로 연결되어 있는 개념이라는 사실을 볼 수 있어야 한다. 두 직선이 만나는 다양한 상황들 가운데 한 가지 경우로 수직을 이해하고 그 상황에서 각각의 직선을 수선이라는 이름으로 약속한다는 것을 학생들은 제시된 그림과 함께 설명할 수 있어야 하며, 이를 통해 수직과 수선에 대한 개념을 각의 크기 곧 각도라는 측정의 맥락과 구분해서 형성할 수 있어야 한다. 한편 이러한 현상은 <그림 4>와 같이 수직에 대한 학생들의 이름짓기 활동에서도 찾아볼 수 있다. 학생들 대부분은 수직을 90도, 직각의 형태로 그 이름을 짓고 있으며, 특히 90도를 중간, 적당한 것으로 표현한 대목에서 수직의 표현이 항상 + 와 같은 형태로만 주어지기에 학생들은 이것을 평각(180도)에 대한 중간 상태 또는 적당한 상태의 개념이미지를 갖게 된다는 것을 알 수 있다.

중간(180도의 중간이라서), 90도의 만남, 적당한 것(90도가 넘지도 않고 작지도 않고 적당해서), 네 직각 수직, 직각선분, 만나서 직각선, 90도 합, 방사각형(방의 모서리는 90도라서) 등


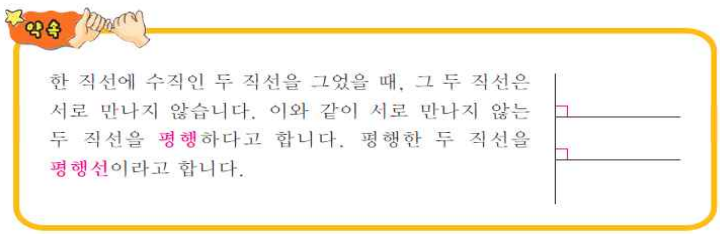
<그림4> 수직에 대한 학생들의 이름짓기 예시
<Fig.4> Example of naming about perpendicularity

또 다른 한편에서 수직은 두 개의 직선이 만난다는 것을 전제로 하고 직각이 덧붙여지는데, 이름짓기에서 이 두 전제 가운데 만남에 주목하는 이름들 곧, 90도로 두 직선이 만난다는 성질을 활용하여 90도의 만남, 직각선분 등의 이름이 제시되기도 하였다. 그러나 이들 이름에서 두 선분의 위치관계를 명시적으로 보여주는 이름은 거의 찾아볼 수 없었으며, 이는 수직에 대한 이해가 두 대상(두 직선) 사이의 관

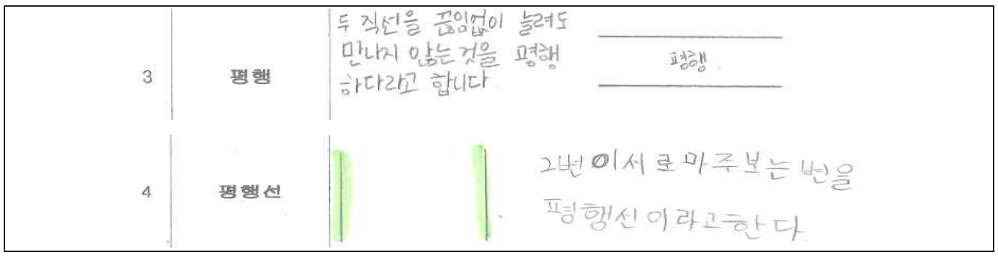
계(직각)를 토대로 하고 있지 않음을 보여주는 대목이다.

2. 평행, 평행선

평행과 평행선 역시 수직과 수선처럼 교과서 약속하기를 보면, 두 직선의 위치관계와 그 위치관계를 이루는 두 직선으로 정의되고 있다. 다만 차이가 나는 것은 수직이 두 개의 직선만으로 표현되고 설명되는데 비해 평행은 초등수학 수준에서 수직을 이용해서 정의하고 있는데 이를 위해 먼저 기준이 되는 한 직선을 정해놓는다는 것이 그래서 약속하기 그림에는 모두 세 직선이 등장하는 부분이다. 또한 약속하기를 보면, 한 직선에 수직인 두 직선이라는 설명보다는 서로 만나지 않는다는 부분을 두 번 강조하고 있는데 이로 인해 교사들도 자연스럽게 만나지 않는다는 부분을 강조하게 되며 학생들 역시 <그림6>처럼 평행은 만나지 않는다는 개념이미지를 보다 강하게 형성하고 있음을 알 수 있다. 이러한 개념이미지는 평행선을 이해하는 데에서도 나타나는데 굳이 두 개 이상의 직선을 대상으로 하지 않고도 만나지 않으면 그것이 하나의 직선이어도 평행선이라는 생각을 갖게 된다.



<그림5> 평행, 평행선의 약속하기
<Fig.5> Definition of parallel and parallel lines

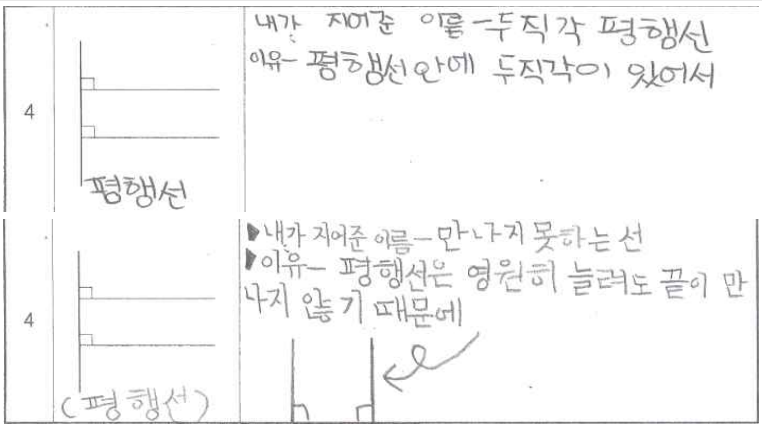


<그림6> 평행, 평행선에 대한 학생들의 답안 예시
<Fig.6> Examples of response about parallel and parallel lines

한 직선에 수직인 두 직선을 그으면 그 두 직선은 서로 평행이 된다. 여기서 방

점은 ‘그 두 직선’과 ‘서로’에 찍어져야 한다. 하지만 교과서의 약속하기와 같이 평행의 개념을 정의한 학생은 한명도 없었는데 그 이유는 본 수업 시 교사가 사용한 교수 용어에서 찾아볼 수 있다. 한 예로 <그림6>과 같이 두 직선을 아무리 늘려도 서로 만나지 않는 것이라고 평행을 설명하는 것처럼, 많은 학생들은 평행을 영원히 만나지 않는 두 직선, 절대 만나지 않는 두 직선, 끝까지 한 없이 이어지는 두 직선, 아무리 늘려도 만나지 않는 것 등 교사가 수업시간에 사용하는 교수 용어를 그대로 반복하고 있었다. 이것은 평행을 두 직선을 전제로 하는 위치관계로 파악한다고 볼 수 있으나, 한편으론 수직의 경우 수학적으로 두 직선이 이루는 각이 직각이라는 설명에 근거하고 있는데 비해 평행은 수학적으로 어떻게 성립될 수 있는지에 대한 설명이 빠진 상태에서 평행에 대한 개념이미지만을 굳히는데 근거가 된다. 그리고 평행선의 경우에는 평행인 두 직선으로 학생들이 주로 대답하였으나 마주보는 두 변을 평행선이라고 설명한 학생들도 3명 있었는데, 이는 평행선을 두 직선의 위치관계에서 이해하는 것이 아니라 평행사변형과 같은 도형의 맥락에서 주로 다루고 있기 때문으로 보인다. 일반적으로 초등수학에서 학생들은 선분과 직선, 그리고 도형에서의 변을 혼동해서 사용하고 있는데, 특히 학교수학에서 삼각형과 사각형, 다각형과 같은 평면도형의 학습 이후에는 선분과 직선의 개념은 곧잘 지워지고 변으로 통합되는 현상이 나타난다. 수학 수업에서 학습하는 개념들은 보다 정확하고 분명한 용어를 이용해서 지도되어야 한다. 학생들을 쉽게 이해시키기 위해 쉬운 단어로 풀어서 설명하는 것은 오히려 메타-인지적 이동을 가져올 수 있으며 오개념을 형성하는 원인이 되기도 한다. 수학적 개념은 쉬운 교수 용어를 사용해서 설명할 수 있겠지만 개념에 대한 약속하기 곧 정의는 교과서에 나와 있는 정선된 표현을 사용하면서 이에 대한 반복적인 연습을 통한 개념 익히기가 요구되는 것은 이러한 이유에서이다.

다음으로 평행선의 이름짓기 활동 결과를 정리하고 학생들이 사용한 개념이미지를 분석해보면, 학생들은 평행선이 만나지 않는다는 개념이미지에서부터 시각적으로 보이는 이미지로 기찻길, 굿바이선, 만나지 않는 선 등의 이름을 가장 많이 지었으며 불행, 평온 등과 같이 감정적인 표현이 비롯되는가 하면, ‘끝이 없다’라는 개념이미지가 함께 형성되고 있음을 알 수 있다. 이 가운데에는 수선 커플, 두 직각 평행선과 같이 평행선이 만들어지는 과정을 표현한 경우도 있었는데, 이는 정의하기에서는 나타나지 않은 대목으로 이름짓기에서 보다 풍부한 맥락이 등장한다는 것을 보여주는 대목이다. 하지만 못 만나는 사각형, 두변 마주보는 사각형이라는 이름도 있었는데 이는 앞서 두 변으로 평행선을 설명한 것과 같이 도형의 맥락에서만 평행선을 이해했기 때문이다. 사각형은 4개의 선분으로 둘러싸인 도형이라는 것을 명확히 인식하고 두 직선의 위치관계로서의 평행선과 닫힌 다각형으로서의 사각형의 차이점을 알 수 있도록 지도가 필요한 부분이다.

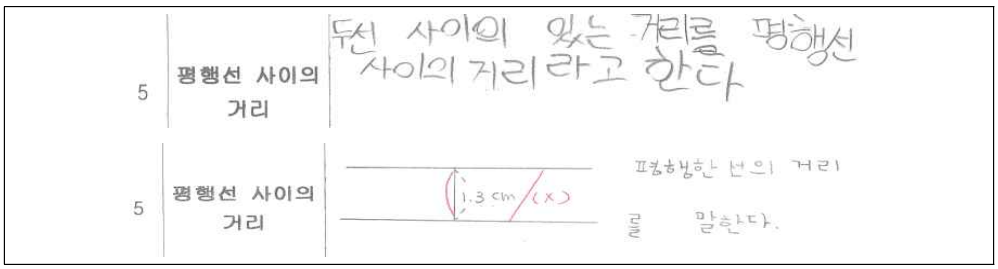
만나지 않는 선, 수선 커플(수선이 커플로 나란히 있어서), 불행한 선(절대 만나지 못해서), 한쌍 평행 선분, 오늘 싸웠다(싸워서 만나지 않으므로), 두 직각 평행선, 쌍둥이선(둘이 마주보며 평행하게 있어서), 평온선(만나지 않아 싸우는 일 없이 평화로워서), 끝없는 선분, 굿바이 선, 기찻길(철도는 끝까지 가도 만나지 않기 때문에) 등


<그림7> 평행선에 대한 학생들의 이름짓기 예시
<Fig.7> Examples of naming about parallel lines

한편 평행선에서는 거리 개념을 함께 다루고 있는데, 평행선 사이의 거리를 교과서 약속하기에서 다루고 있다. 평행선 사이의 거리에는 '수직과 평행'에서 다루는 모든 개념들이 한꺼번에 등장하는데, 약속하기에서 다루는 용어는 <그림8>처럼 평행선, 수선이지만 직선들의 위치 관계는 수직과 평행이 동시에 등장하기에 앞서 다루었던 수직, 수선, 평행, 평행선 등의 모든 개념을 총체적으로 확인할 수 있는 대목이다. 그러나 <그림9>와 같이 학생들의 반응을 보면 이처럼 수직이나 수선에 대한 개념이 평행선 사이의 거리에서 함께 나타나지 않고 있다.

<그림8> 평행선 사이의 거리 약속하기
<Fig.8> Definition of a distance between parallel lines

평행선 사이의 거리를 묻는 질문에 대부분의 학생들은 <그림9>의 첫 번째 답변처럼 단순히 두 선 사이의 거리라고 답했는데, 물음을 그대로 반복하는 식이었다. 이처럼 질문을 그대로 답변한 경우가 제일 많았는데 그 중에는 평행선이 아닌 그냥 두 선 사이의 있는 거리를 평행선이라고 대답한 학생들도 있었다. 설명이 어려운 경우에는 <그림9>의 두 번째 답변처럼 평행선을 그려놓고 실제 평행선 사이의 거리를 직접 자로 재어 적어놓은 학생도 있었는데, 이 경우에도 수선을 의미하는 수직을 표현하지는 않고 있다. 이처럼 약속(정의)에서 다루는 용어 자체가 길어지는 경우 학생들은 그 용어를 그대로 반복하거나 동일한 의미의 단어를 풀어 쓰는 것을 볼 수 있는데, 그러다보니 언어로 설명하기가 어려워 평행선을 직접 그리고 평행선 사이의 거리가 되는 선을 그어놓고 길이를 재는 학생들이 많았다.



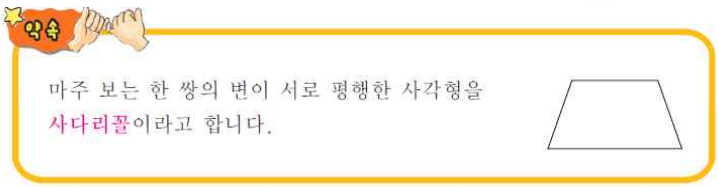
<그림9> 평행선 사이의 거리에 대한 학생들의 답안 예시
<Fig.9> Examples of response about a distance between parallel lines

수학 수업에서 개념을 이해하고 그림으로 나타낼 수 있지만 이것을 설명하는 것은 또 다른 문제가 된다. 특히 하나의 개념이 완성되지 않은 상태에서 앞서 학습했던 개념들이 함께 등장하게 될 때 이러한 문제는 더욱 커지게 된다. 평행선 사이의 거리는 복합적인 개념이다. 수선과 평행선이 동시에 등장하고, 평행이라는 위치관계에서 수직이라는 위치관계를 결합해서 표현할 수 있어야 한다. 이를 위해 학생들은 다시 한 번 수직과 평행을 그리고 수선과 평행선을 확인할 수 있어야 하며, 자신의 사고 과정을 그림과 함께 언어로 풀어서 설명해보는 기회를 가질 수 있어야 한다. 이를 위해 교사는 약속하기에 제시된 정의를 수직적 수학화의 맥락에서 다시 한 번 정리하는 기회를 고려해야 하며, 학생들과 이러한 개념들을 종합할 수 있어야 한다.

3. 사다리꼴

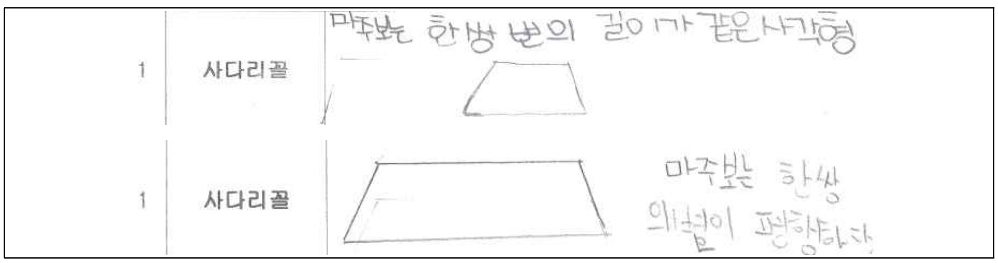
4학년 2학기 4단원 '사각형과 다각형'에서 첫 번째 차시가 '사다리꼴을 알 수 있어요'이다. 교과서에 제시된 사다리꼴의 약속하기는 '마주 보는 한 쌍의 변이 서로

평행인 사각형'이며, 여기서 '마주 보는', '한 쌍'과 같은 표현은 학생들이 사다리꼴을 구성하는데 결정적인 역할을 한다.



<그림10> 사다리꼴의 약속하기
<Fig.10> Definition of trapezoid

<그림11>을 <그림10>과 비교해서 살펴보면 사다리꼴의 경우 학생들은 비교적 그 의미를 잘 설명하고 있음을 알 수 있다. 대부분의 학생들이 마주보는 한 쌍의 변이 서로 평행한 사각형을 사다리꼴이라고 바르게 설명하고 있었다. 하지만 <그림11>의 위와 같이 마주 보는 한 쌍의 변의 길이가 같다거나 또는 마주 보는 한 쌍의 변의 길이가 평행하다고 한 학생들이 있었는데, 여기서 학생들은 변과 변의 길이를 혼동하거나 길이가 평행한 것으로 잘못 생각하고 있다는 것을 알 수 있다. 결국 변과 변의 길이에 대한 정확한 이해가 그리고 서로 평행할 때 그 대상은 선분(또는 직선)이 된다는 것을 분명하게 제시할 필요가 있다.

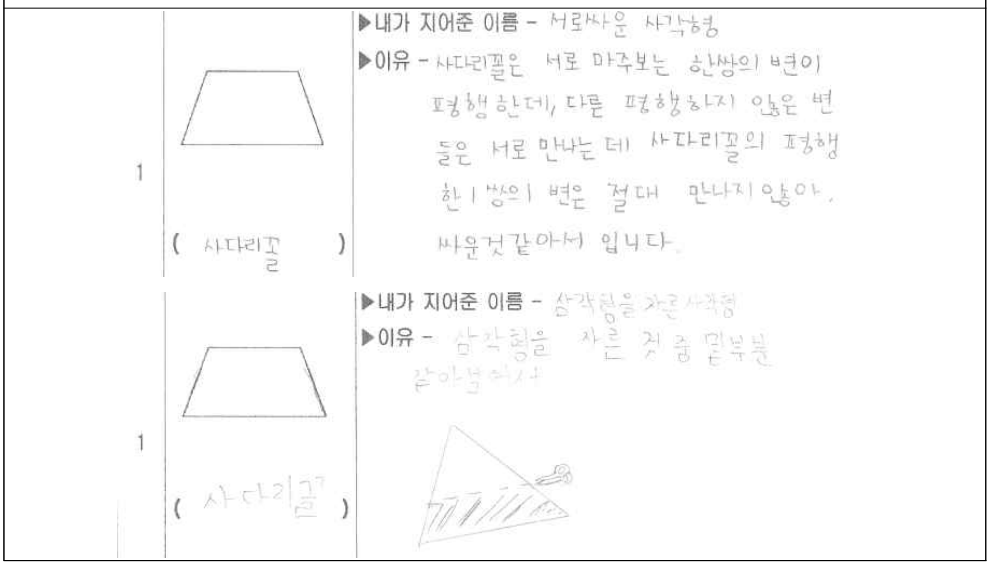


<그림11> 사다리꼴에 대한 학생들의 답안 예시
<Fig.11> Examples of response about trapezoid

사다리꼴은 초등수학에 제시된 여러 가지 사각형 중에서 가장 먼저 배우게 되는 사각형이다.[5] 일단 사다리꼴부터 시작하여 여러 가지 사각형이 모두 사각형 집합에 포함되는 개념임을 알게 하고 그 성질들을 구체적 조작을 통해 학생 스스로 파악해야 한다. 이를테면, 변의 길이가 같다는 학생에게는 모눈종이에 직접 사다리꼴을 그

5) 물론 3학년에서 직각과 함께 직사각형, 정사각형을 배우지만, 4학년에서 사각형의 체계적인 계열을 학습하면서 가장 먼저 등장하는 것이 바로 사다리꼴이다.

려보고 자로 길이를 재어보게 하거나, 만약 등변사다리꼴에서 평행이 아닌 한 쌍의 변의 길이가 같다고 생각한다면[6] 사다리꼴의 정의를 만족하는 다양한 형태를 동시에 그려보게 함으로써 변의 길이가 같다 또는 변의 길이가 평행하다와 같은 개념이미지를 수정할 수 있을 것이다.

한 쌍 평행 사각형, 사다리사각형(사다리 모양이라서), 두 변 평행 사각형, 한 평행 사각형, 서로 싸운 사각형, 삼각형을 자른 사각형, 지붕사각형 등


<그림12> 사다리꼴에 대한 학생들의 이름짓기 예시
<Fig.12> Examples of naming about trapezoid

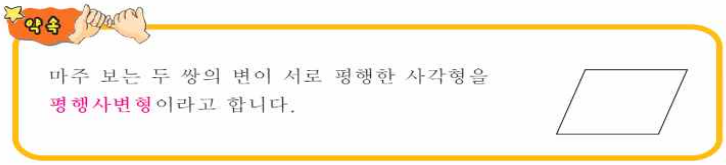
개념에 대한 정의하기에서 드러난 개념이미지는 사다리꼴의 이름짓기 활동에서 보다 분명하게 살펴볼 수 있는데, 우선 눈에 띄는 것은 시각적인 측면에서 제시된 사다리꼴의 모양과 그 이름에 착안해서 사다리와 관련해서 이름을 짓는다거나 지붕모양에 착안해서 이름을 지은 학생이 많다는 점이다. 그 다음으로 마주보는 한 쌍의 변이 서로 평행하다는 성질을 활용하여 한 쌍 평행 사각형, 두 변 평행 사각형, 한 평행 사각형과 같은 이름이 등장한다. 특이한 이름으로는 아래 <그림12>의 위와 같이 평행한 한 쌍의 변과 평행하지 않은 한 쌍의 변을 비교하면서 서로 싸운 사각형으로 이름을 붙이거나 또는 아래와 같이 삼각형에서 윗부분을 잘라냈다고 해

6) 교과서 약속하기를 비롯하여 활동1과 같이 사다리꼴을 정의하는 부분에서 등장하는 사다리꼴은 대부분 등변사다리꼴이기에 이처럼 평행이 아닌 마주 보는 한 쌍의 변의 길이가 같다는 오개념이 생겨날 수도 있음에 유의해야 한다.

서 삼각형을 자른 사각형이라고 이름을 짓는 경우도 있었다. 대체적으로 사다리꼴의 경우 일차적인 개념이미지는 모양과 이름에서 비롯되는 사다리와 관련된 것이었으며, 그 이미지는 사다리꼴의 약속하기와 부합되어 있기에 한 쌍의 변이 평행하다는 개념으로 연결될 수 있었다. 하지만 등변사다리꼴에 국한되어 형성된 개념이미지는 한 쌍의 변의 길이가 같다는 식의 오개념과 연결될 수 있기에 사다리꼴의 개념 지도에서 수학적 다양성의 원리가 요구된다는 것을 교사는 유의해야 한다.

4. 평행사변형

평행사변형은 사다리꼴 다음 차시에서 다루어지고 있는데 이로 인해 사다리꼴과 대비해서 그 차이점을 찾는 활동을 <그림14>에서 볼 수 있다. 학생들은 자연스럽게 사다리꼴에서의 한 쌍의 변과 평행사변형에서의 두 쌍의 변에 그리고 그 위치관계에 초점을 맞추게 된다.

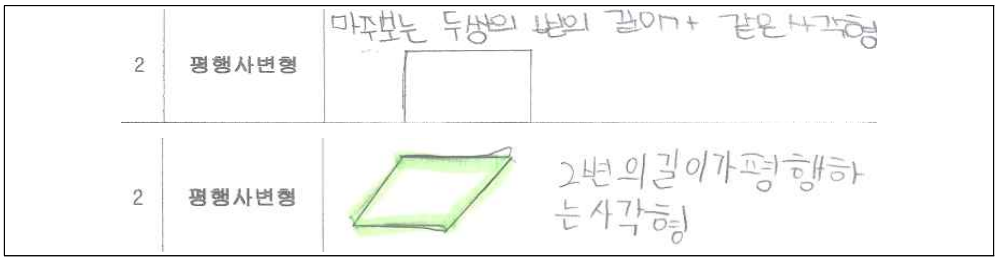


<그림13> 평행사변형의 약속하기
<Fig.13> Definition of parallelogram

평행사변형은 사각형 집합에서 다루어진다. 따라서 그 정의는 사각형의 범주에서 이루어져야 한다. 곧, 마주보는 두 쌍의 변이 서로 평행한 사각형이라고 정의되어야 하지만 마주보는 두 쌍의 변이 서로 평행하다라고만 적어놓은 학생이 있었다. 물론 암묵적으로 사각형을 전제로 한다고 하더라도 정의의 대상이 되는 도형을 보다 분명하게 제시할 필요가 있다.

또한 앞서 사다리꼴과 마찬가지로 변과 변의 길이, 평행을 길이에서 파악하고 있는 답변으로 두 쌍의 변의 길이가 같다고 대답하거나 두 변의 길이가 평행한 사각형이 평행사변형이라고 설명한 학생들도 있었다. 그러나 평행사변형은 사다리꼴과 달리 이러한 설명이 곧바로 교과서 <활동2>(4-2, 55쪽)에서 평행사변형의 성질로 다루어지고 있기에 개념 정의와 그 성질이 혼동될 여지가 충분하다. 곧, 마주 보는 두 변의 길이가 같은 사각형을 평행사변형이라고 쓴 학생들이 많은 반면 <활동2>에서 똑같이 다루어지는 마주 보는 각의 크기가 같은 성질에 대해서는 언급되지 않고 있다. 여기서 알 수 있는 사실은 학생들이 정의와 성질을 혼동하는 것보다는 변과 변의 길이, 평행을 직선의 위치관계가 아닌 길이의 맥락에서 이해하고 있다는 것으로,

일단 평행사변형의 정의는 두 쌍의 변의 위치관계에 초점을 맞출 수 있도록 지도되어야 한다는 점이다.



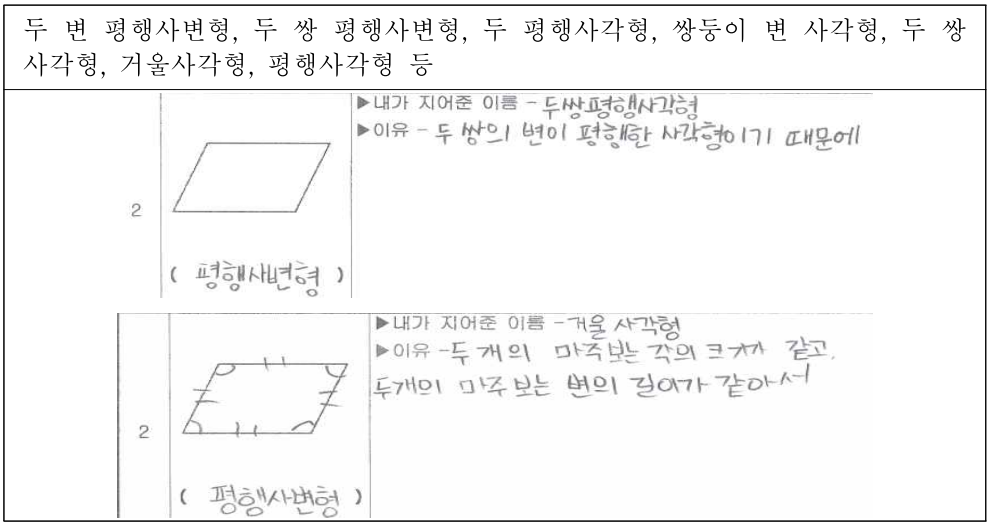
<그림14> 평행사변형에 대한 학생들의 답안 예시
<Fig.14> Examples of response about parallelogram

다음으로 평행사변형의 이름짓기 활동 내용을 정리하고 학생들이 사용한 개념이미지를 분석해보면, 평행사변형은 일차적으로 '2개'와 '평행'이라는 이미지가 겹쳐져 있음을 알 수 있다. 대부분의 학생들은 두 변, 두 쌍, 두 평행을 이름짓기에서 사용했으며 그래서 닮았다는 이미지를 형성해서 쌍둥이 변 사각형, 거울사각형과 같은 이름도 등장하고 있다. 특이한 점은 평행사변형의 이름을 짓는 활동에서 다른 사각형과 달리 평행사변형이 뒤에 붙은 경우가 많았는데, 이를테면 두 변 평행사변형, 두 쌍 평행사변형 등이 있다. 또한 학생들은 평행사변형에서 사용하는 '사변형'에 대해 사각형의 이름으로 예외적이라는 것을 인식하고 이름짓기에서 사변형을 대신하여 사각형을 사용하고 있는데, 그 예로는 두 평행 사각형, 쌍둥이 변 사각형, 두 쌍 사각형 등이 있었다. 이에 대한 설명은 학생들이 제시한 이유에서도 분명하게 드러나는데 주어진 도형이 사각형이기 때문에 자연스럽게 사각형을 포함한 이름을 떠올리고 있음을 알 수 있다.[7)]

한편 평행사변형에서 마주 보는 변의 길이가 같고 마주보는 각의 크기가 같다는 성질을 이용하여 이름을 지은 경우는 거의 없었고 대부분이 두 쌍의 변이 서로 평행하다는 정의에 초점을 두고 있다는 점에서 정의하기에서 나타난 답변과 차이를 보인다. 곧, 연구대상이었던 학생들 모두가 평행사변형을 마주보는 두 쌍의 변이 서로 평행하다는 정의에 초점을 두고 그에 따른 이름짓기를 하였다. 평행사변형이 가지고 있는 다른 성질 즉 예를 들면 마주 보는 변의 길이가 같고 마주보는 각의 크기가 같다는 성질을 이용하여 이름을 지은 경우는 찾아볼 수 없었는데, 이로부터

7) 사각형의 이름에 대한 논의는 박경미·임재훈(1998)을 참고하기 바란다. 직사각형과 정사각형의 경우 사각형이라는 용어가 그대로 등장하는 반면, 사다리꼴은 개략적인 모양에서 그리고 평행사변형은 마주보는 변의 위치관계에서 비롯된 이름으로 각각 다른 요소에 주목한다는 점은 학습지도상의 문제점으로 지적되고 있다.

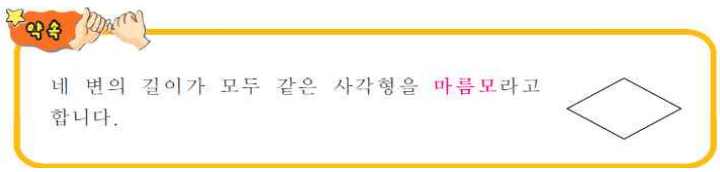
학생들은 주어진 도형을 보고 숨어있는 속성을 더 찾아내기 보다는 시각적으로 들어오는 모양이나 알고 있는 개념을 우선 사용하여 이름을 짓는다는 사실을 알 수 있다.



<그림15> 사다리꼴에 대한 학생들의 이름짓기 예시
<Fig.15> Examples of naming about parallelogram

5. 마름모

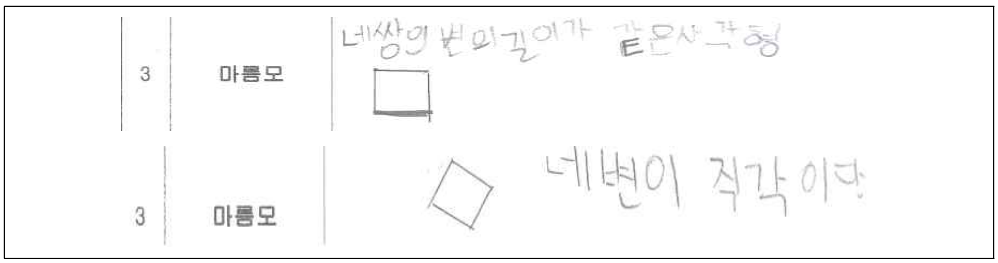
마름모는 사다리꼴이나 평행사변형과 정의되는 속성 자체가 다르다. 앞서 두 사각형이 변의 위치관계에서 약속이 이루어진 반면 마름모는 변의 길이에서부터 정의된다. 이를 순차적으로 보면, 사다리꼴은 변의 위치관계만 다루어질 뿐 변의 길이는 고려의 대상이 아니다. 평행사변형은 변의 위치관계에서 정의하고 출발하지만 그 성질로 변의 길이가 다루어지고 있다. 그리고 마름모에서는 변의 길이만을 사용해서 마름모를 정의한다. 학생들이 앞서 두 사각형에서 변이 아닌 변의 길이에 주목하고 있는 것은 이러한 흐름과도 관련해서 생각해볼 수 있다.



<그림16> 마름모의 약속하기
<Fig.16> Definition of rhombus

마름모를 정의하는 질문에서 학생들의 정답율은 사다리꼴이나 평행사변형보다 상대적으로 낮게 나타났다(<표1>). 마름모를 그냥 네 변의 길이가 같은 것이라고만 설명한 학생들이 있는 반면, 네 각의 크기가 같은 사각형 또는 네 쌍의 변의 길이가 같은 사각형이라고 답변한 학생도 있었다. 여기서 학생들은 사다리꼴의 한 쌍의 변, 평행사변형의 두 쌍의 변에서 사용했던 쌍의 개념을 그대로 가져와서 네 개의 변과 네 쌍의 변을 혼동해서 사용하기도 하였다.

또한 변은 길이로 각은 크기로 설명할 수 있도록 교수 용어 사용에 세심한 주의가 필요하다. 질문에 대한 답변들을 살펴보면 학생들은 네 변이 크기가 같은 사각형이라든지, 네 변이 직각인 사각형이라든지 개념은 어렴풋이 알고 있지만 주어에 맞는 서술어를 잘못 선택해 답을 하는 경우가 많았다. 특히 마름모에서 많은 학생들은 네 변의 길이가 같다는 성질은 알고는 있으나 그것을 주술 관계에 맞게 바른 용어로 풀어쓰지 못했다. 이는 수업시간에 교사들이 사용하는 교수 용어와 밀접하게 관련되어 있는데, 학생들을 지도하면서 사용하는 변, 변의 길이, 각의 크기 등에 있어서 주어와 서술어 표현 하나하나에 관심을 가질 필요가 있다.



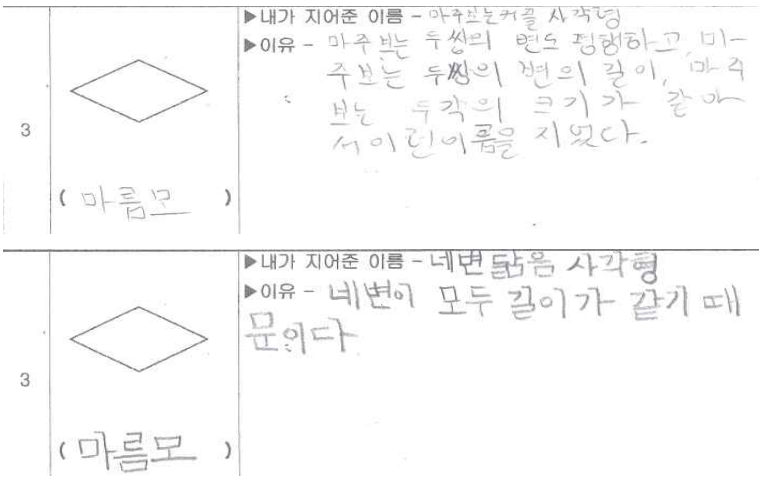
<그림17> 마름모에 대한 학생들의 답안 예시
<Fig.17> Examples of response about rhombus

다음 <그림18>은 마름모의 이름짓기 활동 내용을 정리하고 그 예를 나타낸 것이다. 마름모 이름짓기에서도 가장 큰 특징은 사각형으로 그 이름을 붙이는 부분이다.[8] 이를테면, '네 변'과 '길이'에 주목하여 네 변 똑같은 사각형, 네 변 닮은 사각형, 길이 같은 사각형, 네 변 쌍둥이와 같은 이름을, 시각적인 측면에서 그 모양에 주목하여 아름다운 사각형, 다이아몬드 사각형과 같은 이름을 지었다.

특이한 예로, <그림18>에서 마주보는 커플사각형의 경우 그 이유를 마주보는 두 쌍의 변이 평행이고, 마주보는 두 쌍의 변의 길이, 마주보는 두 각의 크기가 같다고 해서 이름 자체에 '마주보는'을 넣고 '쌍'을 강조하여 마주보는 커플사각형으로 이름

8) 이러한 방식의 이름짓기는 사다리꼴, 평행사변형에서도 볼 수 있었던 특징으로, 사각형이라는 카테고리 안에서 이러한 평면도형이 다루어지기 때문이다.

을 붙였다. 또 다른 예로는 두평네길이사각형이 있는데, 두평은 마주보는 두 쌍의 변이 평행하다는 성질에서 그리고 네길이는 네 변의 길이가 같다는데서 이름을 붙인 것으로 마름모의 경우 내포된 다양한 성질들이 이름짓기에서 제시되고 있음을 알 수 있다. 이는 사다리꼴이나 평행사변형과는 다른 양상이며, 마름모 지도에서부터 특히 사각형의 성질이 강조되고 있다는 것에서 그 이유를 생각해볼 수 있는데, 그 양상은 직사각형과 정사각형으로 갈수록 더 많이 발견할 수 있다. 또한 <그림 18>의 네변닮음사각형의 경우, 닮음의 개념은 5학년에서 배우는 반면 여기서 사용한 개념은 그 이유에서 제시한 같다는 표현을 봐서 일상적인 의미로 이름을 붙인 것으로 보인다.

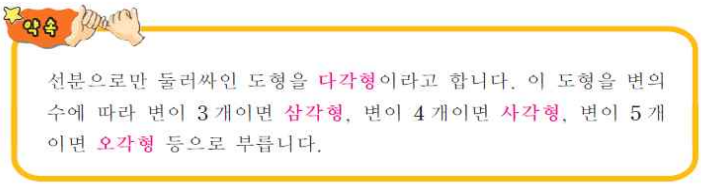
길이 같은 사각형, 네 변 쌍둥이, 아름다운 사각형(다이아몬드같이 생겨서), 네 변 똑같은 사각형, 네 변 닮음 사각형, 두평네길이사각형(마주보는 두 쌍의 변이 평행하고, 네 변의 길이가 모두 같아서), 마주보는 커플사각형 등


<그림18> 마름모에 대한 학생들의 이름짓기 예시
<Fig.18> Examples of naming about rhombus

6. 다각형과 직사각형

다음에서는 다각형에 대한 학생들의 정의와 직사각형에 대한 이름짓기 활동을 각각 살펴본다. 앞서 <표1>에서 보듯이 사다리꼴, 평행사변형, 마름모에 비해 다각형에 대한 정의하기는 정답율이 낮게 나타나는데, 이는 다각형이 이들 사각형들을 묶는 보다 포괄적인 개념으로 그래서 더 어려운 개념으로 인식되기 때문이다. 먼저 교과서에 제시된 다각형의 약속하기는 2학년에서 배운 삼각형과 사각형의 연장선상

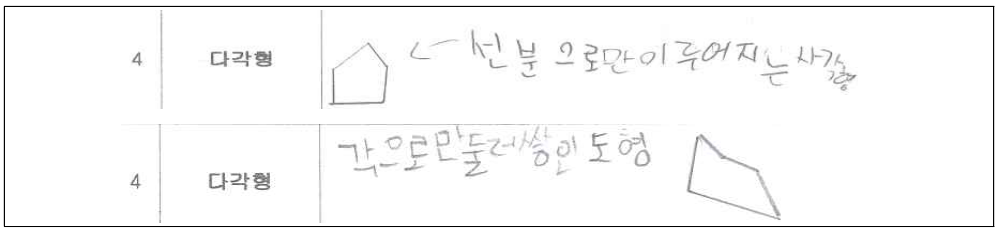
에서 다루어지고 있다. 선분으로만 둘러싸인 도형을 다각형으로 정의하면서, 선분 곧, 변의 개수에 따라 삼각형, 사각형, 오각형을 정의한다.



<그림19> 다각형의 약속하기
<Fig.19> Definition of polygon

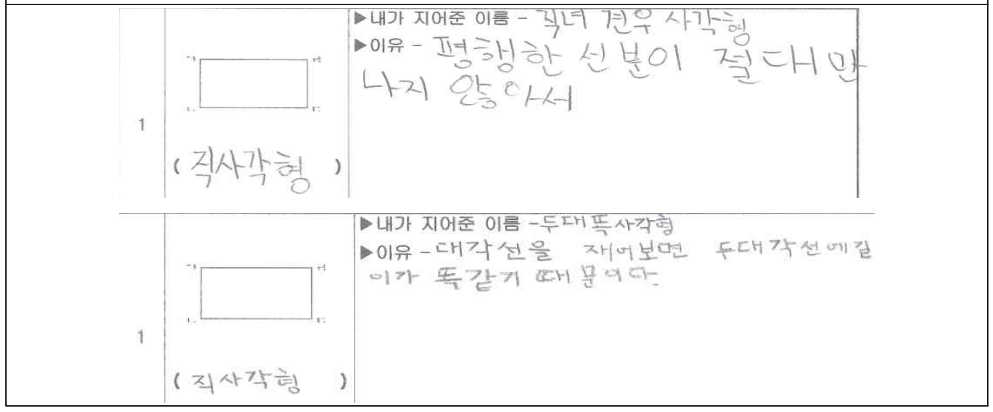
그러나 <그림20>에서 보듯이 다각형을 '선분으로만 둘러싸인 도형'이라고 설명한 학생은 20%였는데, 나머지 80%의 학생은 변으로만 둘러싸인 사각형으로 다각형의 범위를 사각형으로 제한하면서 동시에 변이라는 용어를 정의에서 사용하거나 또는 각이 있는 도형 내지는 각이 많은 도형, 각으로만 둘러싸인 도형으로 다각형을 이해하고 있었다.

선분으로만 둘러싸인 도형을 다각형이라고 배웠음에도 불구하고 많은 학생들이 각이 있는 도형, 각이 많은 도형으로 다각형을 이해하고 있는 것은 다각형이라는 이름에서 비롯된 것으로 보인다. 교과서 <활동1>(4-2, 58쪽)에서는 각이 있지만 다각형이 아닌 도형(부채꼴)을 하나 제시하고 있지만 실제 수업시간에 다루는 선분으로만 둘러싸인 대부분의 도형은 각이 있는 도형과 동일시되고 있다는 점을 무시할 수 없다. 또한 사각형을 학습한 이후에 다각형의 개념으로 확장한다는 점에서 다각형 개념이 사각형 범주에 머물러 있는 학생들이 있을 수 있는 만큼 오각형, 육각형에 대한 설명이 부가적으로 주어질 필요가 있다. 곧, 다각형에는 사각형만 있는 것이 아니며, 다각형이 각으로 정의되는 도형이 아니라는 사실을 학생들이 알 수 있도록 여러 가지 모양의 도형을 놓고 다각형과 다각형이 아닌 것을 구별하면서 다각형의 특징과 개념을 명확히 할 수 있도록 지도해야 한다.



<그림20> 다각형에 대한 학생들의 답안 예시
<Fig.20> Examples of response about polygon

한편 직사각형의 이름짓기 활동 내용을 정리하고 학생들이 사용한 직사각형에 대한 개념이미지를 분석해보면 다음 <그림21>과 같다. 마름모 이후 학습하는 사각형의 특징들은 변의 길이, 각의 크기, 대각선 등에서 다양한 성질을 함께 다룬다는데 있다. 이름짓기에서 사다리꼴이나 평행사변형과 같이 시각적인 측면은 거의 나타나지 않고 있다. 앞서 마름모의 이름짓기에서처럼 이미 이러한 성질에 근거한 이름짓기의 양상이 나타났듯이, 직사각형에서도 마주보는 두 쌍의 변이 서로 평행하다, 마주보는 두 쌍의 변의 길이가 서로 같다, 네 각이 모두 직각이다와 같이 직사각형의 다양한 성질들이 이름짓기에서 활용되고 있음을 알 수 있다.

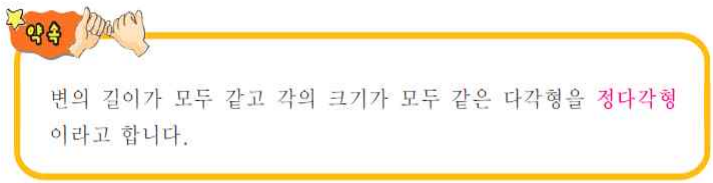
뻣뻣한 사각형, 마주보는 두변 사각형(마주보는 변의 길이가 같아서), 두 쌍의 변이 같은 사각형, 네모난사각형(네각이 모두 네모난 직각이어서), 직각사각형, 두 대똑사각형(두 대각선의 길이가 같아서), 직각4개사각형, 직녀견우사각형(평행한 두 선분이 절대 만나지 않아서), 짝지사각형(마주보는 두 각의크기, 두 변의 길이가 같아서), 90도 사각형, 직각평행사각형 등


<그림21> 직사각형에 대한 학생들의 이름짓기 예시
<Fig.21> Examples of naming about rectangular

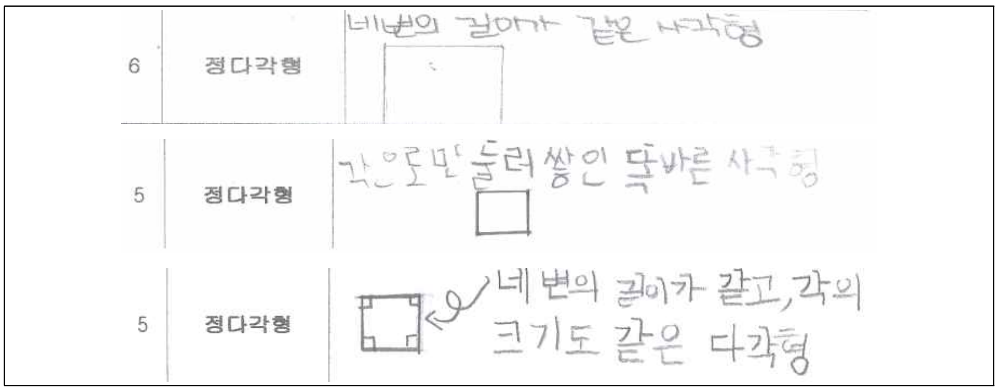
학생들이 직사각형의 이름짓기를 한 것을 보면 마주보는 변의 길이가 같거나 두 쌍의 변이 서로 평행하다는 성질을 활용하여 마주보는 두 변 사각형, 두 쌍의 변이 같은 사각형, 마주보는 두 변 사각형 등의 이름을 지었다. 그리고 네 각이 모두 직각이라는 것을 이용해 직각4개사각형, 90도 사각형 등의 이름을 지은 학생도 여러 명 있었다. 특이한 경우로는 마주보는 두 쌍의 변이 서로 평행하여 아무리 늘려도 그 평행선들은 각각 서로 만나지 않기 때문에 직녀견우사각형, 서로 2개씩 같다고 해서 짝지사각형 등의 이름이 있었으며, 두 대각선의 길이가 같다는 성질을 활용해 두대(각선)똑(같은)사각형이라고 이름을 지은 학생도 있었다.

7. 정다각형과 정사각형

정다각형은 다각형과 함께 다루어지면서 특별한 조건들 곧, 변의 길이가 모두 같고 각의 크기가 모두 같은 다각형으로 정의된다. 그래서 정다각형은 다각형의 부분집합으로 다루어져야 하지만, 사실은 정다각형에 앞서 정사각형을 학습했다는 이유로 인해 정다각형은 정사각형으로 규정되곤 한다. <그림23>에서 학생들이 정다각형으로 그려 놓은 그림은 모두 정사각형이며, 그 설명 역시 맨 아래 설명을 제외하면 사각형에 국한되고 있음을 알 수 있다.



<그림22> 정다각형의 약속하기
<Fig.22> Definition of regular polygon

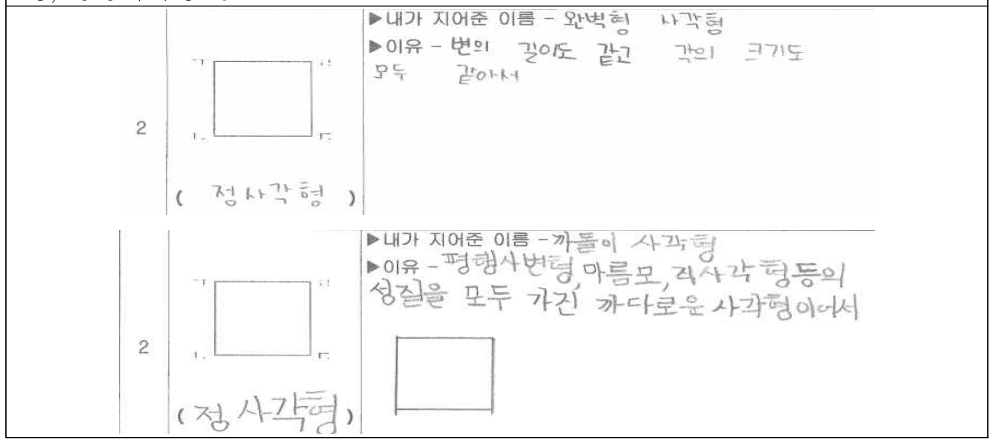


<그림23> 정다각형에 대한 학생들의 답안 예시
<Fig.23> Examples of response about regular polygon

이처럼 학생들은 네 변의 길이가 같고 네 각의 크기가 같은 사각형 즉 정사각형을 정다각형과 동일한 개념으로 이해하고 있었다. 정다각형을 정사각형의 개념으로 생각한 학생들은 거의 절반 정도였다. 또 네 변의 길이가 같은 사각형이 정다각형이라고 설명한 학생도 있었으며 모든 변의 길이가 같은 도형, 각으로만 둘러싸인 도형, 길이와 각의 크기가 확실한 도형 등이라고 대답한 학생도 있었다. 이를 바로

잡기 위해서는 먼저 다각형에 대한 분명한 개념 정의가 필요하며, 다각형에서 오각형, 육각형 등을 다루면서 사각형의 범위를 벗어날 필요가 있다. 그런 다음에 정사각형의 개념적 측면을 다각형과 함께 확장하면서 정다각형을 다룰 수 있어야 하는데, 이때 정다각형에 포함되는 정삼각형, 정사각형을 비롯하여 정오각형, 정육각형 등을 예로 들어 정다각형이란 이러한 도형들의 공통된 속성을 지칭하는 개념임을 인식할 수 있도록 지도해야한다.

한편 정사각형의 이름짓기 활동 내용을 정리하고 학생들이 사용한 개념이미지를 살펴보면 <그림24>와 같다. 여기서 정사각형의 주된 개념이미지는 '네 개', '같다', '까다롭다', '완벽하다'와 관련되어 있음을 알 수 있다. 먼저 학생들은 정사각형의 성질들 곧, 마주보는 두 쌍의 변이 서로 평행하다, 네 변의 길이가 모두 같다, 네 각이 모두 직각이다, 두 대각선은 서로를 수직이등분한다 등과 같은 성질들을 활용하여 다양한 이름을 정사각형에 부여하였다. 이를테면, 똑같은 사각형, 네 변 네 직각 사각형 등은 이러한 성질을 모두 묶어서 표현한 것들이다. 다음으로 많은 학생들은 정사각형을 아주 까다로운 조건의 사각형 또는 완벽한 조건의 사각형으로 인식하고 있었다. 그 결과 이름짓기에서도 완벽한사각형, 까칠한 사각형, 까돌이사각형 등의 이름이 붙여지기도 했다. 이는 정사각형이 되기 위해서는 많은 조건이 필요하고 그로 인해 완벽한 성질을 가진 사각형을 정사각형으로 인식하고 있음을 보여 준다.

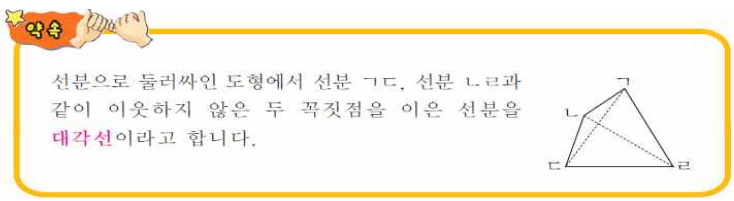
똑같은 사각형(네 변의 길이도 같고 네 각의 크기도 같아서), 네 변 네 직각 사각형, 올백사각형(완벽하다는 의미), 까돌이사각형(모든 사각형의 성질을 가진 까다로운 사각형이라서), 까칠한사각형, 한가족사각형(한가족은 닮은 점이 있는데 정사각형도 서로 닮은 점이 많아서), 4쌍둥이사각형, 네변사각형, 완벽한사각형, 쌍쌍사각형 등


<그림24> 정사각형에 대한 학생들의 이름짓기 예시
<Fig.24> Examples of naming about square

이처럼 학생들의 이름짓기에서 알 수 있듯이 정사각형은 여러 가지 사각형에서 모든 성질 또는 조건을 만족하는 사각형으로 받아들여지며, 가장 많은 내포를 가졌기에 그 외연적인 측면에서 보면 가장 작은 집합에 해당한다. 그러나 현실은 이와 달리 사다리꼴과 평행사변형과 같이 성질이 작은 사각형이 더 찾아보기 힘들어서 내포와 외연이 모두 부족해 보이는 반면, 정사각형의 경우 주변에서 쉽게 접할 수 있는 사각형으로 내포 못지않게 외연도 큰 집합으로 보이곤 한다. 이는 자칫 학생들에게 또 다른 오개념을 일으킬 수 있는 부분인데, 교사는 여러 가지 사각형을 다루면서 이러한 내포와 외연 사이의 관계를 분명하게 인식하고 있어야 하고 동시에 정사각형의 개념을 명확하게 지도하기 위해서는 학생들의 정사각형에 대한 개념이미지를 이해하는 것이 중요하다.

8. 대각선

대각선은 '사각형과 다각형' 단원에서 가장 마지막에 다루어지는 개념이다. 교과서에서 대각선은 다각형 곧, 선분으로 둘러싸인 도형에서 <그림25>와 같이 정의된다. 그 정의는 다른 것과 달리 까다로운 조건을 갖고 있는데 이때 등장하는 조건이 '이웃하지 않은'이다. 학생들이 대각선을 말할 때 두 꼭짓점을 잇는다에만 주목하는 반면 이 조건을 함께 설명하는 경우는 드물게 나타난다.

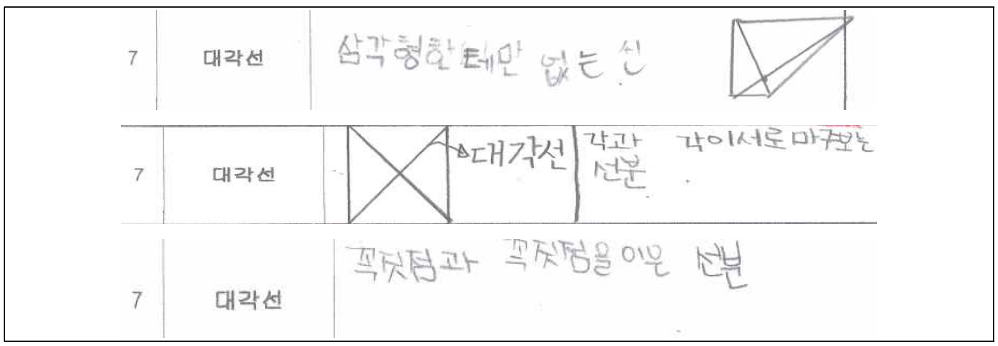


<그림25> 대각선의 약속하기
<Fig.25> Definition of diagonal

학생들에게 대각선은 그릴 수 있는 개념이지만 그것을 언어로 설명하기는 어려운 개념이다. 꼭짓점과 각의 개념을 혼동하는 학생은 서로 이웃하지 않는 두 각을 이은 것을 대각선이라고 답하기도 한다. 서로 마주보는 각을 연결한 선 또는 서로 이웃하지 않는 선이라는 답변 또한 많이 나왔다.

대각선에 대해 설명을 할 때 많은 학생들이 사각형을 그려놓고 사각형 안에서 마주보는 두 꼭짓점을 연결한 선분을 대각선이라고 설명하였다(<그림26>). 이는 교과서 <활동1>(4-2, 60쪽)에서는 오각형, 육각형을 함께 제시하고 있으나, 약속하기와

<활동2>(4-2, 61쪽)에서는 주로 사각형에서만 대각선을 다루고 있기 때문으로 보인다. 물론 그 목적이 사각형에서 대각선의 성질을 파악하기 위한 것이라고 하더라도 대각선은 사각형 안에서만 생각할 수 있는 개념이 아니라는 것을 지도하기 위해서는 오각형, 육각형 등의 보다 다양한 다각형에서 대각선을 그어보는 활동을 할 수 있어야 한다. 또한 이웃하지 않은 두 꼭짓점을 연결할 수 있도록 세심한 지도가 필요하다. 많은 학생들이 대각선을 꼭짓점을 연결한 선분으로 답변하는데 꼭짓점을 연결한 선분 중에서 대각선이 될 수 없는 선분도 있다는 사실을 확인할 수 있게 함으로써 '이웃하지 않은'이라는 조건이 중요하다는 것을 이해할 수 있도록 지도해야 한다.



<그림26> 대각선에 대한 학생들의 답안 예시
<Fig.26> Examples of response about diagonal

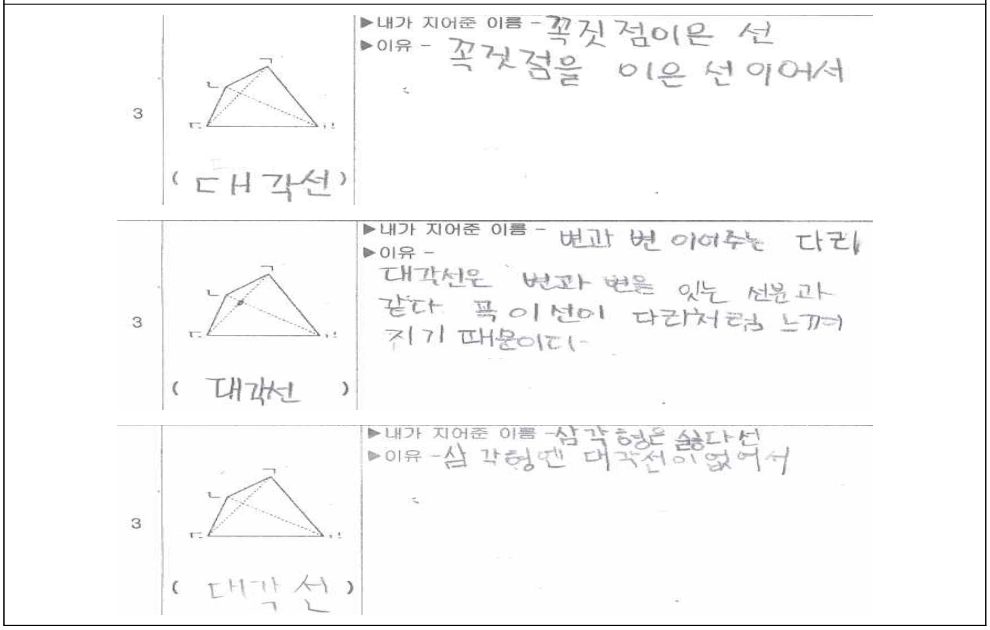
대각선에 대한 이름짓기 활동을 정리하고 학생들이 대각선에 대해 갖고 있는 개념이미지를 살펴보면 <그림27>과 같다. 학생들이 대각선을 통해 갖고 있는 개념이미지는 '잇다', '연결하다'가 많았으며, '이웃'에 대한 개념이미지 또한 많이 갖고 있음을 알 수 있다.

먼저 학생들은 꼭짓점과 꼭짓점을 이은 선분을 대각선이라고 잘못 이해하고 있기에 이름짓기에서도 꼭짓점과 꼭짓점, 꼭짓점 이은선, 꼭지선 등의 이름을 지었다. 또한 변과 변 이어주는 다리에서 알 수 있듯이 변이 계속 연결되어 있다는 오개념이 나타나기도 한다. 다각형이 있는 상태에서 대각선을 생각할 수 있어야 하지만 이 경우에는 다각형에서의 변과 대각선을 구분하지 않고 있기에 가능한 이름으로 보인다. 대각선에 대한 정확한 개념 지도를 통해 변과 대각선의 차이를 알도록 지도가 필요한 부분이다.

다음으로 학생들은 개념을 정의하고 설명하는 것과는 달리 이름짓기에서는 '이웃하지 않은'에 주목하고 있음을 알 수 있다. 그래서 이웃하지 않는 선, 이웃을 싫어하는 선, 저리가 선 등과 같은 이름들이 붙여지기도 했다. 또한 예시된 도형이 사각

형이다 보니 마주보는 두 꼭짓점을 이은 것을 대각선이라고 생각하는 경향이 많았다. 대각선에 대한 약속하기에서 사각형이 제시되었다 하더라도 오각형이나 육각형과 함께 대각선을 보여줌으로써 '마주보는'에서 비롯되는 오개념은 수정되어야 한다. 가장 특이한 이름으로는 삼각형은 싫다선이었는데, <그림27>의 맨 아래에서 보듯이 삼각형에는 대각선이 없다는 것 또한 학생들에겐 대각선을 학습할 때 인상적으로 남는 부분으로 보인다.

이웃하지 않는 선(서로 이웃하지 않는 곳을 선으로 긋기 때문에), 이웃을 싫어하는 선, 가로질러선(도형을 가로지르며 만든 선이라서), 삼각형은 싫다선(삼각형엔 대각선이 없어서), 이웃싫어선, 연결선, 저리가 선(서로 이웃하기를 싫어해서), 꼭지선, 변과 변 이어주는 다리, 꼭짓점이은선, 꼭짓점과 꼭짓점, 마주보는 선분(마주보는 꼭짓점끼리 이은 선분이기 때문에)



<그림27> 대각선에 대한 학생들의 이름짓기 예시
<Fig.27> Examples of naming about diagonal

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구의 목적은 서술형 평가를 통해 초등학교 수학과 교육과정 중 도형 영역에 제시되어 있는 약속하기 형태의 기본 개념에 대해 초등학교 4학년 학생들의 이해 정도를 알아보고 그들이 가지고 있는 오답의 사례 분석과 이름짓기에서 드러난 개

념이미지를 관련해서 생각해봄으로써 도형 지도를 위한 유의점을 찾는데 있다.
이러한 연구 목적을 위해 먼저 초등학교 4학년 2학기에 제시되어 있는 도형 영역의 기본 개념을 분석하고 교과서 약속하기 수준의 기본 개념에 대한 서술형 평가('정의하기')를 실시하였다. 또 학생들이 도형을 접하면서 떠올리게 되는 개념에 대한 이미지를 분석하기 위해 도형에 대한 이름을 짓는 서술형 평가('이름짓기')를 실시하였다. 그리고 두 자료의 분석을 통해 먼저 도형의 기본 개념에 대한 이해의 정도를 파악하였고, 특징적이며 반복적인 오답인 경우 그 원인을 분석하여 적절한 교수 학습 방안을 생각해보았다. 또한 학생들이 도형의 이름짓기 활동을 할 때 어떤 수학적 특성이나 비수학적 측면에 초점을 맞추는가를 분석하여 학생들이 찾지 못하거나 빈도가 낮게 분석된 수학적 성질이나 개념에 대해 알아봄으로써 도형 영역 수업에서 활용할 수 있는 시사점을 살펴보았다.

먼저 도형 영역의 기본 개념에 대한 이해의 정도를 분석한 결과는 다음과 같다.
첫째, 단원과 내용에 따라 그 차이는 있지만 도형 영역의 기본 개념에 대한 이해도는 (엄밀한 기준으로 볼 때) 비교적 낮게 나타났다. 학습자가 이해한 수학적 개념은 간결하고 명료하게 진술되지 못하고 그 내용이 불분명하거나 애매한 진술이 많았다. 둘째, 상위개념과 하위개념이 바람직하게 연결되지 못한 경우가 많았다. 특히 사각형의 개념에 대해 물어보는 문항에 단순히 '~한 것'이라는 정의가 많았다. 예를 들어 마름모의 정의를 물어보는 질문에 '마름모란 네 변의 길이가 같은 사각형'이라고 설명해야 하지만 많은 학생들은 '네 변의 길이가 같다', '네 변의 길이가 같은 것'이라고 상위개념과 하위개념을 이해하지 못한 채 단순히 성질만을 나열한 답변이 많았다. 셋째, 선분, 직선, 각, 변, 꼭짓점, 길이 등과 같이 기초적인 용어에 대한 명확한 이해가 부족하여 '길이가 평행하다', '변이 직각이다' 등과 같은 용어 사용이 많았다. 또한 직각과 수직 및 수선, 평행과 평행선 등의 유사한 개념 사이의 관계를 혼동하는 경우가 많았다. 특히 수직과 평행은 두 직선 사이의 관계를 나타내는 개념이고, 수선은 수직 관계에 있을 때 한 직선에 대한 다른 직선을 의미하고, 평행선은 평행 관계에 있을 때의 두 직선을 의미하는 것이다. 하지만 이러한 관계를 완전히 이해하지 못한 채 단편적으로 각각의 대상을 학습하다보니 두 개념을 혼동하는 오답이 많이 발견되었다.

다음으로 도형의 이름짓기 활동의 분석을 통해서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.
첫째, 학생들이 도형을 접하면서 떠올리는 개념에 대한 이미지는 약속하기의 정의와는 많이 다르며 교사들이 학생들이 가지고 있기를 기대하는 정의보다는 개인의 개념이미지로 도형을 받아들인다는 사실이다. 둘째, 이름짓기를 할 때 수학적 용어가 아닌 생활 용어의 사용이 많았다. 예를 들어 평행선을 견우와 직녀선(절대 만나지 않는다는 의미)으로 나타낸 경우이다. 셋째, 학생들은 시각적 측면에서 개념이미

지를 주로 형성한다. 사다리꼴은 사다리모양과 닮아 사다리사각형으로, 대각선은 서로 가로지르는 모양을 보고 가로질러선으로 이름을 짓듯이 학생들은 도형의 이름짓기를 할 때 처음 떠올리게 되는 시각적 대상에 의해 이름을 결정한다. 이는 van Hieles의 시각적 수준에서 기술적 수준으로의 이행이 쉽지 않음을 보여주는 연구(김분영, 2006)와도 일치한다. 넷째, 마름모에서부터 직사각형, 정사각형으로 오면서 도형이 가지고 있는 수학적 성질을 이용해서 이름짓기를 하는 빈도가 커지고 있음을 알 수 있다.

이처럼 '정의하기'와 '이름짓기' 서술형 평가를 통해 도형 수업을 위한 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 선분과 직선, 변과 꼭짓점 등과 같은 도형의 기초적인 개념과 용어에 대한 이해를 명확하게 하는 것이 중요하다. 3학년에서 배운 도형의 기초적인 학습 내용에 대한 분석과 그에 따른 후속 조치가 함께 있을 때 4학년에서 배우게 되는 여러 가지 평면도형에 대한 개념도 명확히 형성될 수 있을 것이다. 아울러 '마주보는', '쌍', '이웃하는' 등의 용어는 도형에 대한 개념 수업을 할 때 교사가 예를 들어 정확하게 설명할 필요가 있으며 학생들이 이러한 개념에 익숙해질 수 있도록 배려해야한다. 둘째, 교사의 교수 용어가 명확해야 한다. 특히 이름짓기 활동에서 학생들의 답변을 보면 교사가 수업 시간에 사용하는 교수 용어가 그대로 반영되는 것을 볼 수 있다. 교사는 수업 시간에 학습자가 이해할 수 있도록 동시에 쉽고 재미있게 설명하기 위해 일상용어를 쓸 수도 있겠지만 그로 인해 학습자들은 도형의 기본 개념에 대한 자기만의 이미지를 만들어버리고 그것은 곧 오개념으로 연결될 수 있기 때문에 이 경우에도 교과서에 제시된 명확하고 정확한 수학적 표현으로 정리할 필요가 있다. 셋째, 자신이 이해하고 있는 것을 여러 가지 방법으로 표현하고 정리해 볼 수 있는 기회를 제공해야 한다. 서술형 평가를 통해서 기존의 객관식 지필평가를 통해서는 알 수 없었던 학습자의 기본 개념에 대한 이해 정도 및 도형에 대한 인식과 개념이미지에 대한 정보를 얻을 수 있었다. 학생들은 도형에 대해 막연한 이해는 하고 있지만 그것을 자신들의 언어로 표현해 볼 수 있는 기회를 가지지 못한 상태에서 도형을 학습하고 있다. 따라서 언어로 자신이 이해하고 있는 개념을 표현해 볼 수 있는 기회를 제공하고 단 이것이 시험이라는 무거운 방법이 아니라 발표나 수학노트 정리 등과 같이 학습자의 입장에서는 부담 없이 받아들일 수 있는 방법으로 시행하고 교사는 그에 따른 즉각적인 피드백을 통해 개념 형성을 도울 수 있어야 할 것이다. 마지막으로, 수학책과 수학익힘책에 제시되어 있는 도형은 정형화되어 있고 제한적인 것이 많기에 교사는 수업 시간에 다양한 위치 및 길이의 도형을 제시하여 개념이 고착화되는 것을 막아야 한다. 개념 지도에서 정례와 반례의 비율을 적절하게 조정하여 기본 개념은 확실하게 하되 일단 기본 개념이 명확해지고 내면화가 이루어지면 교과서에 제시되지 않는 다양한 도형을 통해 보다 유연한 사고를 할 수

있도록 세심한 수업 준비가 필요하다.

본 연구는 초등학교 4학년 2학기 도형 영역에서 기본 개념과 함께 학생들의 개념 이미지를 살펴보기 위해 '정의하기'와 '이름짓기' 서술형 평가를 실시하고 이를 통해 도형 지도를 위한 시사점을 이끌어낸 것이다. 이러한 결과들은 객관식 지필평가를 통해서는 얻기 힘든 결과들로, 교사의 교수 학습 방법에 대한 소중한 반성적 자료가 될 것이다. 후속 연구에서 서술형 평가 문항을 통해 드러난 내용을 토대로 체계적인 면담을 병행한다면 좀 더 정확한 오류 분석 및 개념 이해의 정도를 파악할 수 있을 것이며, 이에 대한 연구가 진행되기를 기대한다.

참 고 문 헌

[1] 교육과학기술부(2010), 수학 4-2 교사용 지도서, 두산동아(주).
MEST(2010), Elementary Mathematics 4-2 Teaching Guidebooks, Doosan DongA.

[2] 교육과학기술부(2010), 수학 4-2 익힘책, 두산동아(주).
MEST(2010), Elementary Mathematics 4-2 Practice books, Doosan DongA.

[3] 교육과학기술부(2010), 수학 4-2, 두산동아(주).
MEST(2010), Elementary Mathematics 4-2 Textbooks, Doosan DongA.

[4] 김분영(2006), 초등수학 도형 영역의 지도 내용 계열 분석, 서울교육대학교 석사학위논문.
Kim, Bun Young(2006), *Analysis on the instructional sequences of geometry in elementary mathematics*, SNUE Master Thesis.

[5] 김성준(2006), 예비초등교사를 대상으로 한 놀이수학 수업의 실행, 한국학교수학회논문집 제9권 제4호, 575-595.
Kim, Sung Joon(2006), *Future Elementary School Teacher's Carrying Out Mathematics Classes Using Play-Action Programs*, KSMS Journal vol.**9(4)**, 575-595.

[6] 김수환 외 7인(2009), 초등학교 수학교육론, 동명사.
Kim, Soo Hwan etc.(2009), Theory of Elementary Mathematics Education, DongMyongSa.

[7] 노영아(2007), 도형 영역의 오류 유형과 원인 분석에 관한 연구-초등학교 4학년을 중심으로, 광주교육대학교 석사학위 논문.
Roh, Young Ah(2007), *Analysis on error of fourth grade student in geometric domain*, GNUE Master Thesis.

[8] 박경미, 임재훈(1998), 학교수학 기하용어의 의미론적 탐색: 기하용어의 역사적 변천 및 국제 비교를 중심으로, 수학교육학연구 제8권 제2호, 565-586.
Park, Kyong Mee & Yim, Jae Hoon(1998), *A Semantic Investigation of Geometric Terminology In School Mathematics*, KSESM Journal vol.8(2), 565-586.

[9] 박성택(1994), 수학교육, 동명사.
Park, Sung Taek(1994), Mathematics Education, DongMyongSa.

[10] 배수진(2011), 도형의 대칭 영역에서 나타나는 초등학교 학생들의 오류 사례 조사, 청주교육대학교 석사학위논문.
Bae, Su Jin(2011), *Case study on errors appeared in the symmetric area of the shape bt elementary school students*, CJNUE Master Thesis.

[11] 서은영(2009), Van Hiele 이론에 근거한 기하적 사고 수준 분석과 도형 지도에 관한 연구: 초등학교 4학년을 대상으로, 진주교육대학교 석사학위논문.
Seo, Eun Young(2009), *A study on geometrical thinking levels and teaching figures based on van Hiele's theory*, CNUE Master Thesis.

[12] 신성희(2011), 분수와 나눗셈에 대한 초등학교 수학의 개념이미지 분석, 제주대학교 석사학위논문.
Shin, Seong Hee(2011), *Analyzing 'Concept Image' about fractions and divisions in Elementary school mathematics*, Jeju National Univ. Master Thesis.

[13] 임승현(2011), 초등학교 6학년 학생들의 도형의 높이 개념 이해에 대한 연구, 청주교육대학교 석사학위논문.
Im, Seong Hyun(2011), *A Study on the Understanding of Height Concept of Figures of Sixth Grade Students of Elementary School*, CJNUE Master Thesis.

[14] 장영은(2003), 도형과 관련된 문제해결과정에서 초등학생의 오류 유형과 원인 분석 연구, 전주교육대학교 석사학위논문.
Jang, Young Eun(2003), *Analysis on errors of elementary school students in geometric problem solving process*, JNUE Master Thesis.

[15] 전지훈(2009), 중학교 3학년 학생들의 도형 영역에서의 수학적 언어 수준 비교 연구, 이화여자대학교 석사학위 논문.
Jeon, Ji Hoon(2009), *A Comparative Study on the Level of Mathematical Language of Ninth-Grade Middle Schoolers in the Area of Figure*, EHwa Womans Univ. Master Thesis.

[16] Robert E. Reys., Marilyn N. Suydam, Mary M. Lindquist & Nancy L.

Smith(1998), *Helping Children Leran Mathematics(5th Ed.)*, 강문봉 외 18인 역(2003), 초등 수학 학습지도의 이해, 양서원.

[17] Wall, Edward Stanley, *Making Sense: Listening, remembering, and facilitating in the elementary mathematics classroom*, University of Michigan.

Su Im Choi:
Toseong Elementary School
Busan 602-052, Korea
Email address: bboddo9@hanmail.net

Sung Joon Kim:
Busan National Univ. of Education
Busan 611-736, Korea
Email address: joonysk@bnue.ac.kr