East Asian Mathematical Journal
Vol. 29 (2013), No. 2, pp. 189-205
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2013.013

가법성에 대한 예비 초등교사의 반응 연구

A Study on the Pre-service Elementary Teachers' Reaction for the Additive Property

정 영 우 · 김 부 윤[1)]

ABSTRACT. Addition problems can be divided into the 'problem of quantity' which does not have the concept of object or unit, and the 'problem of number' which have the concept of object or unit. 'Additive property' is the factor which has to be considered in the former case. On the other hand, 'additive property' is not considered and meaningless in the latter case. However, this additive property is not emphasized in the elementary curriculum that mostly deals with quantitative problems, so related errors are occurred in actual life.

In this study, we will investigate to the pre-service elementary teachers through the problems of deciding the additive property. The result shows that the pre-service elementary teachers' cognition of additive problems is insufficient. This study will provide focal points in the teacher education and the elementary education, and the clues for the operating programs through the information about the tendency of errors.

I. 연구의 필요성 및 의의

덧셈은 초등학교 1학년에서 구체적 대상과 단위를 포함한 구체적 상황으로 도입된다(교육인적자원부, 2007a). 2007 개정교육과정 해설(교육과학기술부, 2008)에서도 덧셈은 「생활 장면에서 덧셈과 뺄셈이 이루어지는 경우를 알아보고, 구체적인 상황을 제시하여 덧셈과 뺄셈의 의미를 이해하게 한다.」고 구체적인 상황 속에서 구체적 조

---

1) 교신저자
2013년 1월 31일 투고, 2013년 2월 23일 심사완료.
Mathematics Subject Classification 2000: 97C70
Key words: Additive Property(가법성), Teacher's Professionalism(교사전문성)
* 이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

작활동을 통하여 덧셈의 의미를 지도하도록 하고 있다. 그러나 2학년에서 이미 구체적 상황과 함께 이것을 '수 모형'으로 나타내고, 수치식으로 표현하여 맥락을 없애고 덧셈하는 방법을 다루고 있으며(교육인적자원부, 2007b), 이것은 3, 4학년까지 동일한 형태로 확장되고 심화된다(교육인적자원부, 2007c, 2007d). 이후 분수의 덧셈과 소수의 덧셈 등이 다루어지며, 이러한 과정에서 구체적 상황을 이상화하여 수만을 알고리즘적으로 계산한 후 단위를 붙이는 방법으로 문제해결과정이 변화되어 간다. 그리고 양의 개념이 수의 개념으로 확장되게 된다.

그러나 이처럼 맥락적 상황을 다룰 때조차 수적 계산방법이 문제해결의 수단으로 강조되면서 교육과정이나 교과서에서 가법성과 관련한 내용이 언급되지 않고 있어 가법성에 관한 내용은 예비교사교육에서도 소홀히 다루어지고 있다.

하지만 교육과정 해설에서 밝히고 있는 생활 장면, 구체적인 상황은 양을 다루는 것이며, 양의 덧셈에 있어 근원적인 문제는 더한다는 구체적인 조작활동이 아니라 더하는 두 양의 '가법성(加法性)'이다. 가법성이란 주어진 두 양이 더함의 대상이 되는지 구하는 결과로 통합될 수 있는지를 나타내는 개념으로, 실생활의 맥락문제를 구성하고 조작함에 있어 기본이 되는 개념이다.

덧셈의 가법성은 같은 종류, 같은 성질, 같은 단위 — 즉, 통합 가능한 범주의 대상과 단위 — 에 대해 구하는 무엇 — 즉, 구하는 대상과 단위 — 을 정확히 알고 있을 때 정해진다(日本数学教育協議会 · 銀林 浩, 2011). 따라서 문제에서 대상과 단위를 고려하고 동질적인 것으로 통합할 수 있어야 문제를 조작하고 해결할 수 있다.

그런데 이와 같은 교과서의 흐름은 같은 종류 같은 단위를 갖는 대상을 포함하는 구체적 상황에서 답을 구할 때는 문제가 없으나, 문제 속의 대상이 다른 종류나 다른 단위를 갖지만 이들을 하나의 개념으로 통합할 수 있는 간접적 상황이나 통합될 수 없는 상황에서는 오류가 드러나게 된다.

따라서 양에 대한 다양한 문제 상황을 통해 가법성을 강조하고, 덧셈 여부를 알아보는 활동이 선행되어야 함을 인식하게 하여야 한다. 이것은 교사의 가법성에 대한 이해에서 출발하게 된다.

이러한 가법성에의 지식은 실생활 장면의 문제를 유연하게 인식하고 해결하기 위한 수학의 실용성이란 관점에서 필요하다. 더욱이 이것은 교사의 교과전문성 측면에서 덧셈의 본질적 이해를 위해 강조되어야 할 내용이기도 하다.

이러한 문제의식에서, 본 연구는 초등수학에서 다루고 있는 자연수의 덧셈문제에 기초하여 덧셈의 본질적 · 근원적 요소인 가법성을 고려한 문제를 통해 예비 초등교사의 지식실태를 조사하고 분석하여 교사교육 프로그램과 초등교육의 주안점에 대한 기초를 제공하고자 한다.

덧셈과 관련한 선행연구로는 다음과 같은 것이 있다. 이론적 연구로 덧셈 문장제의 요소를 대상의 동질성과 상황의 다양성으로 보고, 이에 대한 이론적 내용을 소개하

고 교과서 문제를 분류한 장혜원(2002)의 연구, 그리고 양의 계산 지도가 부족함을 지적하며, 양의 개념과 양의 연산에 대한 이론과 예시를 제시한 정은실(2010)의 연구가 있다. 또한 실험적 연구로 자연수의 사칙연산, 자연수와 분수의 사칙연산에서 덧셈이 이루어지는 상황 — 비교, 병합, 첨가와 같은 — 에 대한 학생반응을 연구한 황우형・김경미(2008), 김경미・황우형(2012)의 연구가 있다. 그리고 교과서에 나오는 덧셈과 뺄셈 문장제를 분류하고 학생들의 반응을 분석한 이대현(2009)의 연구가 있으며, 학교수학에서 다루는 인위적인 문장제를 비판하며, 일본과 벨기에에서 연구된 현실적인 문장제를 한국에서 실시하여 학생반응을 비교 분석한 김민경(2004)의 연구가 있다. 또한 덧셈의 오류유형 또는 학생들의 오개념을 분석한 최진숙・유현주(2006)의 연구와 덧셈에 대한 예비 초등교사의 교과전문성에 대한 이종욱(2003)의 연구도 있다.

이처럼 다양한 연구가 이루어지고 있지만, 대부분은 교과서와 동일한 전형적인 유형의 문제들을 대상으로 하고 있다. 또한 관심의 대상이 학생들에게 맞추어져 있어, 교수학적 의도를 가지고 그러한 문제를 선정하고 구성하는 주체인 교사나 예비교사의 실태에 관한 연구는 거의 없다. 이종욱(2003)은 예비교사의 교과지식에 대해 조사하였지만, 역시 교과서의 문제를 소재로 하고 있으며, 첨가나 합병과 같은 덧셈하는 상황에 초점을 두고 연구하였다. 이러한 연구에서는 이미 가법성이 보장되는 문제를 다루고 있어 실제 더할 수 없는 문제나 불완전한 문제를 알고리즘적으로 계산해 버리는 오류의 경우는 파악할 수 없다. 또한 가법성과 관련한 장혜원(2002)의 연구에서는 문장제 출제 시, 의도된 수학적 지식을 표현한 상황이나 그 상황에 포함된 대상의 선택과 관련하여 충분한 검토가 선행되었는지 고려되어야 한다고 하면서 더하는 대상과 더하는 상황에 대한 중요성을 강조하고 있지만, 구하는 결과에 대한 고려가 간과되어 있다. 그러나 가법성은 이 요소들 외에도 구하는 결과의 대상과 단위에 의해 결정되기도 한다.

이처럼 가법성은 이러한 요소 모두를 고려해야 하는 덧셈문제의 가장 근원적이고 기본적인 요소이며, 학교교육에서 그리고 교사교육에서 강조되어야 할 내용이다.

II. 이론적 배경

초등학교에서 다루어지는 덧셈문제의 소재는 생활의 구체적인 장면이며, 이때 더하는 대상이나 구하는 대상은 양이다. 양은 이산적인 수와 연속적인 크기로 분류된다. 현대수학적 대상으로 수와 양을 구별하여 말할 때 양은 세거나 측정할 수 있는 대상의 특성을 말하며, 그 값을 수와 단위로 표현한 것이다(Smith, S.Z. & Smith, M.E., 2006; 정은실, 2010 재인용).

또한 양이란 대소의 비교가 가능한 대상을 가진 것으로 사물의 개수, 길이, 무게,

시간, 넓이, 부피, 속도 등이 있다. 이러한 양의 성질로 양의 비교성, 양의 측정성 이외에도 양의 가법성이 있다(日本数学教育学会, 2007).
양의 크기를 측정값으로 나타낼 경우, 단순히 수만이 아니라 양의 종류를 나타내는 단위를 붙여 표현할 필요가 있다(中原忠男, 2000). 같은 단위끼리는 더할 수 있으며, 다른 단위로의 변환이 가능하기도 하다. 정은실(2010)은 양의 덧셈을 다음과 같이 설명하고 있다.

> 두 물체를 합쳐 같은 종류의 양이 결정될 수 있을 때, 두 양을 합치는 것을 양의 합병이라 한다. 양의 합병은 물체의 화학적 변화는 고려하지 않고, 또 합병결과는 임의적으로 결정된다. 같은 종류의 두 양에 대하여 합병에 해당하는 양이 가능할 때, 두 양은 덧셈가능하다고 하며, 그 양을 가법적인 양이라 한다. 결국, 양의 가법적 조작은 두 물체의 합병결과의 일의성을 전제하고, 양의 조작활동이 수의 연산으로 대치됨으로써 수학적으로 형식화 되는 것이다.

그러나 이것은 덧셈의 장면 중에서도 합병에만 초점을 맞춘 설명이다. 한편, 장혜원(2002)은 가법성의 요소로 '대상의 동질성'과 '문제 상황의 다양성'을 들고 있다. 그리고 '아동에게 불필요한 수학적·논리적 오개념이 생길 수 있는 위험을 방지하고자 덧셈 문장제에 등장하는 대상의 동질성과 관련한 적절성에 초점을 맞추어 이질적 대상에 행해지는 수학적으로 부자연스러운 덧셈이 야기하는 문제에 대한 논의가 필요하다.'고 주장하였다. 그리고 '대상의 동질성으로 합의 개념이 포함되어 있는 상황을 구성하여야 하나 중학교 이상만 되어도 재언이 불필요한 자명의 원리가 된다.'고 하였다. 그는 다음과 같은 예를 들었다.

> 중학생들은 $5x+7y$에서 $5x$와 $7y$는 동류항이 아니기 때문에 더 이상 더할 수 없음을 배우고 연습을 반복한다. 엄밀히 말하면, 수학에서의 덧셈은 동질적인 대상에 대하여 가능한 연산이므로 이질적인 대상의 합은 의미 없는 것이다. 그럼에도 불구하고 초등수학의 덧셈 문장제에서는 대상의 동질성을 간과하는 오류가 종종 발견된다.

그러나 수의 조작에서는 이미 대상의 동질성이 보장되고 있어 이질적 대상의 합이 의미가 없지만, 초등수학에서는 이질적이라고 무조건 계산이 의미 없는 것은 아니다. 양을 다루는 또는 맥락적인 문제를 다루는 초등에서는 이질적인 두 대상이라도 구하는 결과에서 이들을 통합할 수 있는 대상으로 질문한다면 계산 가능하기 때문이다. 이것이 가법성이 전제된 수의 연산과 달리 초등수학에서는 가법성을 고려해야 하는 이유이기도 하다.
본 연구에서는 선행연구들을 고려하여, 덧셈문제의 구성요소로 더하는 두 양, 더하

는 상황, 구하는 양의 세 가지를 선정하였다.
구체적 상황을 포함한 문제가 주어지면 이 세 요소가 통합 내지 동일시될 수 있는가의 여부에 따라 문제해결이 이루어지게 된다. 즉, 주어지는 두 대상과 그 대상에 대한 단위가 더하는 상황에서 구하는 대상과 단위로 통합될 수 있는가가 바로 가법성이다. 이처럼 덧셈이 가능하기 위해서는 구하는 양과 더하는 양의 성질이 같아야 하며, 더하는 과정에서 양이 보존되어야 한다.
따라서 본 연구에서는 더하는 두 양과 구하는 양, 그리고 더하는 상황을 덧셈문제의 구성요소로 보고, 초등 예비교사들을 대상으로 이들 요소를 어떻게 인식하고 문제를 해결하는지를 알아보았다. 그리고 문제 분석과 오류 분석을 통하여 가법성 지도의 시사점을 유추하였다.
이 과정에서 더하는 두 양(대상과 단위)을 '초기상황', 합의 개념을 포함한 단어 및 문장을 '더하는 상황', 구하는 결과로 규정한 양(대상과 단위)을 '결과상황'이라 정의한다. 따라서 '가법성'은 초기상황과 더하는 상황, 그리고 결과상황의 유기적 통합가능성이라 할 수 있다.

Ⅲ. 연구내용

1. 연구대상

2011년과 2012년 ○○교육대학교 2학년에 재학 중인 예비 초등교사 150명(2011년 76명, 2012년 74명)을 대상으로 서술형 10문항의 테스트를 2011년에는 기말시험으로, 2012년에는 수업 중 퀴즈로 실시하였다. 이들은 모두 강의를 통해 단위, 덧셈과 관련한 개념 및 지도법에 대한 일반론을 학습하였다. 그러나 연구 주제인 가법성에 대한 별도의 학습은 없었으며, 초등교과서 1, 2학년에서 다루는 덧셈문제는 학생의 과제발표에서 예시로 다루어진 적이 있다.

2. 평가문항

평가문항은 日本数学教育協議会・銀林 浩(1996)의 「算数・数学なっとく事典」에 소개된 문제를 활용하였다. 이 문제들은 추출된 가법성의 구성요소를 다양하게 적용하고 있으며, 현행 초등교과서에서 다루고 있는 유형을 포함하고 있다. 또한 덧셈문제의 요소 중 하나인 더하는 상황에 대한 이해를 묻는 문제도 포함하고 있다. 이 문항들은 수학교육전문가에게 그 적절성에 대해 자문을 받았다.
제시된 문항과 문항 유형 및 답은 다음과 같다.

<평가문항>

* 다음 각 문제들에 대해 더할 수 있는 것과 없는 것을 판단하고 그 이유를 적으시오.

문 제	답
1. 강아지 5마리와 고양이 2마리를 더하면 몇 마리입니까?	
2. 바나나 3개와 연필 2개를 더하면 몇 개입니까?	
3. 금붕어 2마리와 고등어 2마리를 더하면 몇 마리입니까?	
4. 100원과 500원을 더하면 얼마입니까?	
5. 5미터인 끈과 2미터인 끈을 연결하면 몇 미터입니까?	
6. 쇠 파이프 3개와 알루미늄 파이프 5개가 있습니다. 파이프는 모두 몇 개입니까?	
7. 3리터 물과 0.2리터 물을 합하면 몇 데시리터입니까?	
8. 돌 3개와 100원짜리 동전 5개를 합하면 얼마가 됩니까?	
9. 100원짜리 동전 5개와 500원짜리 동전 8개를 합하면 얼마가 됩니까?	
10. 5리터의 물에 3미터인 끈을 넣으면 얼마가 될까요?	

1번과 3번 문항은 초등교과서에서 다루고 있는 문제와 같은 유형으로 본질적으로는 대상이 다르지만 공통범주를 정할 수 있으며 단위가 같은 경우이다. 하지만 구하는 대상이 명확하지 않아 계산 가능하지 않다. 그러나 1번 문항에 '동물은'이라든지 '강아지와 고양이는 모두'라는 문장이 추가되면 계산 가능한 문제가 된다. 또한 3번 문항이 계산 가능하기 위해서는 '물고기는'이라든지 '금붕어와 고등어는 모두'라는 문장이 추가되어야 한다.

2번 문항은 1번과 3번 문항과 같은 유형으로 계산 가능하지 않지만, 더하는 대상의 범주를 '사물'로 한다거나 '바나나와 연필의 개수를'이 추가되면 계산 가능하다. 그러나 사물의 경우는 너무 광범위하여 구체적 상황인 생활 장면으로는 별로 의미가 없다.

4번 문항은 더하는 대상과 단위가 동일하며 구하는 대상과 단위도 명확하다. 그리고 더하는 상황도 액수를 나타내는 '더하면 얼마'이므로 계산 가능하다.

5번 문항은 같은 대상 같은 단위이지만 '연결'이란 용어가 구체적이지 않아 더하는 상황에 대해 자의적 해석을 할 가능성이 크다. 이 경우는 연결 방법에 따라 계산가능성 여부가 달라진다. 따라서 이 경우는 '연결 방법에 따라 달라지므로 계산 가능하지 않다.' 또는 '연결 방법에 따라 답이 여러 가지이다.'가 답이 된다.

6번 문항은 초등교과서에서 다루고 있는 문제와 완전하게 동일한 유형이다. 예를 들어, 1학년 교과서(교육인적자원부, 2007a)에서는 더하는 양을 '여자 어린이 ○명, 남자 어린이 △명'이라든지 '검은 바둑돌 □개, 흰 바둑돌 ◇개'와 같이 주고, 구하는 양도 '어린이 몇 명'이나 '바둑돌 몇 개'처럼 공통범주를 문장에서 직접 주고 있다. 여기서는 '쇠 파이프, 알루미늄 파이프'라는 다른 대상에 관한 문제이지만, 구하는 대상을 공통의 범주인 '파이프'로 묶어주고 있어 계산 가능하다.

7번 문항은 같은 대상 같은 단위이지만 구하는 대상을 다른 단위로 묻고 있다. 이것은 물리량의 단위 변환에 관한 것이며, 결과상황에서 요구하는 단위로 변환할 수 있어 계산 가능하다.

실제로 정은실(2010)은 양의 계산을 물리량으로 보고 양의 계산을 통해 어떤 수와 단위로 이루어진 물리량을 다른 수와 다른 단위를 가진 동치의 물리량으로 변환할 수 있다고 하였다.

8번 문항은 다른 대상 같은 단위이지만 '얼마'의 의미가 불명확하다. 따라서 계산 가능하지 않다. 이 경우는 '돌의 개수는'이나 '100원짜리 동전의 개수는'이 추가되거나 '돌과 동전의 총 개수는'이 추가되면 계산 가능하다. 하지만 전자의 두 경우는 덧셈문제로서 가치가 없다.

9번 문항은 더하는 양이 같은 대상 같은 단위이므로, 대상으로 통합하여 계산할 수도 단위로 통합하여 계산할 수도 있다. 즉, '얼마'의 대상이 '동전의 개수'가 될 수도 '금액'이 될 수도 있다. 따라서 문제가 불명확하여 계산 가능하지 않다.

10번 문항은 다른 대상 다른 단위이므로 어떤 대상이나 단위로 통합할 수가 없어 구하는 양을 아예 규정할 수 없는 상황이다. 즉, 계산할 수 없는 경우이다. 단위 자체의 상이함으로 인해 그 합이 부적절함을 더 쉽게 받아들이게 된다. 또한 4, 8, 9, 10번 문제에서 더하는 상황인 '얼마'에 대한 자의적 해석의 오류를 수정할 수 있는 기회를 부여하고 있다.

결과적으로 1, 2, 3, 5, 8, 9번 문항은 더하는 대상과 단위(더하는 양)에 대한 구하는 대상과 단위(구하는 양)가 결정적이지 않거나 더하는 상황이 명확하지 않아 '계산할 수 없다.' 또는 '결정할 수 없다.'가 답이 되며, 4, 6, 7번 문항은 '계산 가능하다.', 10번 문항은 '계산 불가능하다.'가 답이다. 이를 표로 정리하면 다음과 같다. 단, △는 계산 불가능하지만, 그 원인이 모호함에 기인한 불명확한 문제,

○는 계산 가능한 문제, ×는 명확히 계산 불가능한 문제이다.

<표 1> 평가문항의 답

<Table 1> Answer of evaluation items

1	2	3	4	5
△	△	△	○	△
6	7	8	9	10
○	○	△	△	×

결론적으로 더하는 대상이 같고 단위가 같은 경우 요소가 일차원이면 계산 가능하고(4번), 이차원 이상이면 문제에서 주어진 대상이나 단위의 두 경우 중 하나로 구하는 대상이나 단위가 결정되면 계산 가능하다(7, 9번). 그리고 다른 대상과 같은 단위의 경우 두 대상이 하나의 성질로 통합될 수 있는 경우는 계산 가능하며(1, 3, 6번), 더하는 대상이 통합되지 않을 경우라도 단위에 초점을 맞추면 계산 가능한 경우(2, 8번)가 있다. 같은 대상 다른 단위는 같은 양에 대해 같은 단위를 사용해야하므로 의미가 없거나 단위의 변환이 가능한 경우 계산할 수 있다. 마지막으로 다른 대상 다른 단위의 경우(10번)는 양의 보존성에 의해 더할 수 없다. 5번의 경우는 같은 대상 같은 단위이지만 상황의 애매모호함으로 별도의 유형이 된다.

3. 채점 기준

채점 기준은 문제마다의 특징을 고려하여 정답(T)과 오답(F)으로 구성하였다. 서술형 문제이므로 판단의 근거를 적은 경우만을 정답으로 처리하였다. 따라서 계산가능, 불가능 등 단답형은 오답으로 처리되었다. 또한 오류의 유형을 알아보기 위하여 오답을 세분화하였다.

1, 2, 3번 문항은 더하는 대상과 단위를 어떻게 고려하여 답했는지에 따라, 대상과 단위를 고려했지만 자의적 해석으로 판단한 경우(F1), 대상 혹은 단위 한 쪽만을 고려하여 자의적 판단을 한 경우(F2), 답만 적어 근거를 판단할 수 없거나(O), 완전한 오답(F4)인 경우로 나누었다.

4, 6, 7번 문항은 정답(T)과 완전한 오답(F4), 결과만 표시(O)로 나누었다.

5, 8, 9번 문항은 더하는 상황에서 ‘연결’과 ‘얼마’라는 용어를 자의적으로 해석할 가능성이 높아 오답을 자의적 해석(F3)과 완전한 오답(F4)인 경우로 나누었다.

10번 문항은 오답을 대상이나 단위만 고려한 경우(F2)와 완전한 오답(F4)의 경우로 나누었다.

Ⅳ. 결과분석

문항별 채점 결과는 다음과 같다. 단, 각 항의 숫자는 인원수이며, 괄호 안의 숫자는 백분율을 나타낸다.

<1번 문항의 결과>
<Results of item 1>

분류	T	F1	F2	F4	O
2011년	7 (9.2)	26 (34.2)	36 (47.3)	3 (3.9)	4 (5.2)
2012년	12 (16.2)	11 (14.8)	48 (64.8)	3 (4)	0 (0)
전체	19 (12.6)	37 (24.6)	84 (56)	6 (4)	4 (2.6)

이 문제는 초등교과서에서 다루고 있는 전형적인 유형이지만, 결과상황에서 구하는 대상을 제거하고 단위만을 명시하였다. 비교적 친숙한 문제이지만 정답률은 9.2%~16.2%, 평균 12.6%로 낮은 편이었다.
또한 오답유형은 F1(평균 24.6%)과 F2(평균 56%)에 집중되어 있는데, 이는 더하는 대상에 주목하기보다는 단위를 나타내는 단어에 초점을 두고 수치적 계산만을 했기 때문으로 생각된다. 가장 많은 오답의 예로는, F1의 경우 '강아지와 고양이는 동물이므로 더할 수 있다.'고 문제에 없는 단어를 구하는 결과에 첨가하여 계산할 수 있다고 한 대답이 많았다. F2의 경우는 단위의 동질성만을 고려하여 '더하는 대상의 단위가 마리로 같으며, 구하는 대상의 단위도 마리이므로 계산 가능하다.'고 한 경우가 많았다. 이처럼 단위에 초점을 맞춘 해답이 계산 가능하다고 답한 오답 중 가장 많았으며, 계산 불가능하다고 한 오답으로는 더하는 대상인 강아지와 고양이가 다른 성질이라 더할 수 없다고 한 답이 가장 많았다. 이러한 오류들은 가법성에서 초기상황과 결과상황을 통합할 수 있어야 함을 간과한 결과이다.

<2번 문항의 결과>
<Results of item 2>

문항	T	F1	F2	F4	O
2011년	7 (9.2)	10 (13.1)	53 (69.7)	3 (3.9)	3 (3.9)
2012년	10 (13.5)	7 (9.4)	49 (66.2)	9 (12.1)	0 (0)
전체	17 (11.3)	17 (11.3)	102 (68)	12 (8)	3 (2)

이 문제는 1번 문제와 같은 유형이지만 바나나와 연필의 동질성 간극이 1번보다 커 1번보다는 공통범주를 정하기 어려울 것으로 예상되었으며, 결과에서 알 수 있듯이 정답률은 9.2%~13.5%, 평균 11.3%로 다소 낮았다.
오답으로는 두 대상을 사물이라는 관점에서 통합하고 있는 학생들도 있었으나, 범주가 너무 넓어 감각적으로 수용도가 낮아서인지 '더하는 대상이 다르므로 더할 수 없다.'는 답안이 가장 많았다. 그리고 계산할 수 있다고 답한 학생들의 대부분은 단위인 개수에 초점을 두고 있었다. 사물이라는 것으로 범주를 동일시한 학생은 계산 가능하다는 목적성을 가지고 억지로 동질화시킬 범주를 찾아 답을 낸 것으로 볼 수 있다. 그래서인지 F2가 68%에 달했다. 이러한 오류들은 1번과 마찬가지로 계산 가능하기 위해서는 초기상황과 결과상황을 통합할 수 있어야 한다는 것을 간과한 결과이다.

<3번 문항의 결과>

<Results of item 3>

문항	T	F1	F2	F4	O
2011년	7 (9.2)	25 (32.8)	38 (50)	3 (3.9)	3 (3.9)
2012년	11 (14.8)	15 (20.2)	44 (59.4)	4 (5.4)	0 (0)
전체	18 (12)	40 (26.6)	82 (54.6)	7 (4.6)	3 (2)

3번 문제는 1번 문제와 완전히 동일한 유형이다. 따라서 반응결과도 비슷한 경향을 보이고 있다.

<4번 문항의 결과>

<Results of item 4>

문항	T	F4	O
2011년	61 (80.2)	0 (0)	15 (19.7)
2012년	69 (93.2)	4 (5.4)	1 (1.3)
전체	130 (86.6)	4 (2.6)	16 (10.6)

4번 문항은 100원과 500원이라는 돈의 가치가 대상이 되고 있고, 다른 고려 요소가 없는 일차원적 문제이며, 더하는 상황인 얼마에 대한 해석이 단일화되어 있다. 따라서 정답률이 80.2%~93.2%로 높은 편이다. 이것은 가법성의 모든 요소가 이미 통합되어 있기 때문에 고려할 요소가 없어 쉽게 접근할 수 있는 문제이기 때문으로 보인다.

<5번 문항의 결과>
<Results of item 5>

문항	T	F3	F4	O
2011년	10 (13.1)	64 (84.2)	0 (0)	2 (2.6)
2012년	9 (12.1)	62 (83.7)	2 (2.7)	1 (1.3)
전체	19 (12.6)	126 (84)	2 (1.3)	3 (2)

이 문제는 더하는 상황에 대한 이해를 묻는 문제로, 교육과정 해설(교육과학기술부, 2008)에서는 더하는 상황을 다음과 같이 주고 있다.

실생활에서 사용하는 ‘합한다’, ‘더한다’, ‘보탠다’, ‘~보다 ~ 큰 수’ 등 덧셈을 의미하는 용어를 다양하게 제시하여 적절하게 사용할 수 있게 한다.

그러나 이외에도 연결한다, 잇는다, 쌓는다 등의 단어들도 덧셈의 개념을 함의한다. 단, 이런 단어들은 그 사용에 대한 방법론적인 부분이 명확해야 한다. 현행 교육과정에서는 이에 대한 지도가 거의 이루어지고 있지 않다. 따라서 생소한 문제에 해당하며, 이해측면에서 오류가능성이 큰 문제였다. 이 문제의 정답률 역시 12.1%~13.1%, 평균 12.6%에 그치고 있으며, F3이 83.7%~84.2%로 압도적으로 높았다.

오답의 대부분은 대상과 단위가 같으므로 계산 가능하다는 것으로 더하는 상황에 대한 용어를 쉽게 읽고 넘어간 결과로 보인다. 따라서 더하는 상황에 대한 가법성 인식이 약함을 알 수 있다.

<6번 문항의 결과>
<Results of item 6>

문항	T	F4	O
2011년	57 (75)	5 (6.5)	14 (18.4)
2012년	60 (81)	14 (18.9)	0 (0)
전체	117 (78)	19 (12.6)	14 (9.3)

이 문제는 1, 2, 3번 문제와 같은 유형이며, 초등교과서에 나오는 문제와 동일하다. 더하는 대상과 단위가 본질적으로 같으며, 구하는 대상이 두 대상의 공통범주인 파이프의 개수이므로 계산 가능하다. 그러나 초등에서 가장 많이 다루고 있는 문제임에도 불구하고 정답률은 75%~81%, 평균 78%로 의외로 낮았다.

오답으로 가장 많았던 것은 더하는 두 대상이 다르므로 더할 수 없다는 것이었

다. 더하는 두 양의 공통범주인 결과상황의 대상보다 문제에 주어진 더하는 대상의 차이에 집중한 때문으로 보인다. 이것은 문제를 가볍게 읽은 탓도 있겠지만 문제를 읽을 때 더하는 상황에 더 의미를 주고 있다고도 볼 수 있다. 이러한 경우는 7번 문항에서도 나타난다.

<7번 문항의 결과>

<Results of item 7>

문항	T	F4	O
2011년	46 (60.5)	16 (21)	14 (18.4)
2012년	53 (71.6)	21 (28.3)	0 (0)
전체	99 (66)	37 (24.6)	14 (9.3)

이 문제는 더하는 대상과 단위가 같아 계산 가능하고 단지 답의 단위를 변환하면 되는 문제이지만, 낮은 정답률(60.5%～71.6%, 평균 66%)을 보이고 있다. 특히 완전한 오답의 비율이 21%～28.3%에 이르고 있다.

오답의 대부분은 리터 단위를 그대로 더하여 답을 적고 있다. 문제를 주의 깊게 읽지 않고, 초기상황의 단위의 동질성에만 초점을 두었기 때문이다. 이처럼 문제를 정확하게 읽지 않고 자신의 해석을 입혀 잘못 풀이하는 것은 문제해결 활동에서 흔히 나타나는 오류 유형이다. 또한 오답 중에는 리터와 데시리터의 관계를 이해하지 못한 경우도 소수 있었다.

<8번 문항의 결과>

<Results of item 8>

문항	T	F3	F4	O
2011년	5 (6.5)	37 (48.6)	32 (42.1)	2 (2.6)
2012년	6 (8.1)	45 (60.8)	23 (31)	0 (0)
전체	11 (7.3)	82 (54.6)	55 (36.6)	2 (1.3)

이 문제는 얼마가 지칭하는 내용이 불명확하다. 많은 학생들은 ‘얼마’가 돈의 가치를 묻는 것으로 답하고 있다. 따라서 정답률이 6.5%～8.1%, 평균 7.3%로 전체 10문항 중 두 번째로 낮다. 완전히 틀린 오답의 비율도 31%～42.1%로 상당히 높다. ‘얼마’라는 더하는 상황에 대해 4번에서 돈의 가치로 다루었으므로 잘못 해석할 수 있다고 예상되었으나, 10번 문항에서 다른 의미의 얼마를 사용하고 있어 전체적으로 점검하는 동기를 주고 있다고 생각하였다. 그러나 결과는 10번까지도 돈의 가치로 해석하는 학생이 소수 있었다. 이것은 가법성의 요소 중 더하는 두 양

의 단위와 구하는 양의 단위를 통합할 수 있으나 더하는 상황에 대한 자의적 해석으로 이를 간과한 결과이다.

<9번 문항의 결과>
<Results of item 9>

문항	T	F3	F4	O
2011년	2 (2.6)	55 (72.3)	1 (1.3)	18 (23.6)
2012년	6 (8.1)	56 (75.6)	12 (16.2)	0 (0)
전체	8 (5.3)	111 (74)	13 (8.6)	18 (12)

이 문제는 8번 문제와 같은 유형이지만, 8번 문제에서 얼마를 돈의 가치로 보지 않은 학생들도 이 문제에서는 돈의 가치로 해석하기도 하였다. 정답률은 2.6%~8.1%, 평균 5,3%로 전체 10문항 중 가장 낮았다. 그러나 완전한 오답(F4)의 비율은 1.3%~16.2%로 다소 격차가 크지만 8번보다는 월등히 낮았다.
오류유형으로는 초기상황의 대상과 단위가 동일하고 얼마를 돈의 가치로 인식하여 계산 가능하다고 한 답이 가장 많았다. 동전의 개수를 더한 13개를 답한 경우도 4명이 있었다. 이러한 오류들은 더하는 상황에 대한 자의적 해석이 원인이지만 더불어 대상이나 단위 어느 쪽으로도 구하는 양을 정할 수 있음을 인식하지 못한 것에 기인한다.

<10번 문항의 결과>
<Results of item 10>

문항	T	F2	F3	F4	O
2011년	30 (39.4)	26 (34.2)	6 (7.8)	5 (6.5)	9 (11.8)
2012년	21 (28.3)	46 (62.1)	0 (0)	5 (6.5)	2 (2.7)
전체	51 (34)	72 (48)	6 (4)	10 (6.6)	11 (7.3)

이 문제는 더하는 대상과 단위가 모두 다르므로 분명하게 계산할 수 없다. 하지만 정답률은 28.3%~34%, 평균 34%로 그다지 높지 않다.
오답으로는 ‘얼마’를 돈의 가치로 해석한 학생이 6명 있었다. 대부분은 4, 8, 9번과 달리 얼마를 물이나 끈의 한쪽 단위로 해석하여 답을 적고 있었다. 이것은 더하는 양이 다르면 통합할 수 없어 당연히 계산 불가능하나, 반드시 계산 가능할 것이라는 생각을 정하고 그 이유를 찾으려 하는 경향이 있음을 보여준다.

1, 2, 3번 문항에서 학생들은 문제 상황에서 이미 더하는 대상이 같은 성질이라

는 것은 정해져 있다고 보고 계산하는 경향이 있었다. 그래서 단위에 초점을 맞추어 억지로 범주를 통일시켜 정당성을 확보하고 계산 가능하다고 적고 있다.
5, 8, 9번 문항에서는 더하는 상황에 대한 표현을 자의적으로 해석하여 오답을 내고 있다. 문제를 만들 때 표현의 정확성과 정밀성이 요구됨을 알 수 있다.
10번 문항에서 물리적 생활 장면을 고려하지 않은 채 추상적인 수의 처리만으로 위배성을 무시하고 더할 수 있다고 답하는 경향이 있었다.
전체적으로 정답률은 명확하게 계산 가능한 경우를 제외하고는 낮은 편이어서 가법성에 대한 고려가 이루어지지 않고 있음을 알 수 있다. 오류의 유형으로는 초기상황의 대상과 단위 중 어느 한 쪽을 고려하여 수치적 계산만을 하는 경우, 더하는 상황을 자의적으로 해석하여 자기 번역을 하는 경우, 초기상황과 결과상황의 통합이 이루어지지 않는 경우, 단위의 변환을 고려하지 않는 경우 등이 있었다.
정답률이 낮은 것으로부터 가법성에 대한 것을 고려해야 한다는 인식 자체가 희박함을 알 수 있다. 오답의 유형에서 F1의 경우 중 가법성을 의식하는 답안도 보였으나, 문제해결과정에서 문제에도 없는 용어 등을 추가하여 결론을 억지로 만들어내는 경우가 많았다.

Ⅳ. 결론 및 제언

맥락상황 또는 양을 다루는 상황에서는 가법성이 수적 조작활동에 선행되어야 한다. 그러나 현행 초등교과서에서 다루는 문제들은 이러한 가법성에 대한 고려를 하지 않아도 되는 인위적인 상황을 주로 다루고 있다. 이로 인해 실생활 장면의 문제해결에서 가법성을 고려하지 않아 오류가 발생하고 있다.
본 연구에서는 양에 대한 개념과 연산을 지도할 초등 예비교사의 가법성에 대한 지식을 조사함으로써, 가법성의 중요성을 일깨우고 교사교육프로그램에서 가법성과 관련된 다양한 문제를 다룰 것을 제안하였다.
가법성에 대한 평가문항은 더하는 양에서 대상이 다르고 단위가 같은 경우, 대상과 단위가 같은 경우, 그리고 대상과 단위가 다른 경우에 대해 더하는 상황을 이해하고 결과상황을 통일성 있게 통합하는 유형의 총 10문항을 판단의 이유를 함께 적는 서술형으로 구성하였다.
조사결과에 따르면, 예비교사들은 가법성을 거의 인식하고 있지 않으며, 자의적인 해석이나 상황 속에 들어있는 대상이나 단위에 초점을 두고 단순히 수의 계산만을 하고 있다.
가법성에 대한 인식이 부족한 채로 교사가 되면, 잘못된 문제를 지도하거나 시험

문제를 잘못 출제하게 되어, 수에 대한 기초적인 개념 형성 단계에 있는 학생들에게 잘못된 수 개념을 형성하게 할 우려가 있다. 이것은 이후 이루어지는 수의 추상화된 지식들에까지 이어지게 된다.

따라서 가법성과 관련한 교사교육과 초등교육에의 시사점으로 다음을 말할 수 있다.

① 양의 개념과 양의 성질에 대한 학습이 충분히 이루어져야 한다.

② 덧셈문제에서 가법성을 고려해야 할 필요성과 중요성을 다양한 문제 상황을 통하여 경험하게 해야 한다.

③ 조사에서 나타난 오류 유형의 원인을 이해하고 개선을 하기 위해 노력하여야 한다. 오류들에서 보았듯이, 양에 대한 문제해결에서는 상황에 대한 이해가 필요한데, 학생들은 이에 대한 고려 없이 수식적 처리를 위한 요소를 자의적으로 형성한다. 따라서 가법성은 대상의 동질성, 단위의 통일성, 더하는 상황과의 유기적 관계에 의해 결정됨을 인식해야 한다.

④ 학생들은 생활 장면을 이해하기보다 문제에 주어진 단어나 단위에 기인하여 숫자들을 단순 결합하는 키워드에 의존하여 계산한다. 이는 학교교육에서 잘 설정된 인위적 계산을 위한 문제를 전형적으로 다루기 때문이다. 따라서 처음부터 현실적 상황을 정직하게 포함하는 형태의 문제를 다루어 덧셈의 본질에 대한 이해뿐만 아니라, 수학의 실용성을 위한 응용상황도 일치시켜 다룰 필요가 있다.

참고문헌

[1] 교육과학기술부(2008), 초등학교 교육과정 해설 Ⅳ, 교육과학기술부.
Ministry of Education, Science and Technology(2008), Guideline for Primary School Curriculum Ⅳ, Ministry of Education, Science and Technology.

[2] 교육인적자원부(2007a), 수학 1-가, (주)천재교육.
Ministry of Education & Human Resources Development(2007a), Mathematics 1-Ga, Chunjae Education Inc.

[3] 교육인적자원부(2007b), 수학 2-가, (주)천재교육.
Ministry of Education & Human Resources Development(2007a), Mathematics 2-Ga, Chunjae Education Inc.

[4] 교육인적자원부(2007c), 수학 3-가, (주)천재교육.
Ministry of Education & Human Resources Development(2007a), Mathematics 3-Ga, Chunjae Education Inc.

[5] 교육인적자원부(2007d), 수학 4-가, (주)천재교육.

Ministry of Education & Human Resources Development(2007a), Mathematics 4-Ga, Chunjae Education Inc.

[6] 김경미 · 황우형(2012), 자연수와 분수 연산에 대한 학생들의 이해 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 제51권 제1호, 21-45.
Kim Kyungmi and Whang Woo Hyung(2012), *An Analysis of Students' Understanding of Operators with Whole Numbers and Fractions*, Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series A <The Mathematical Education> **51(1)**, 21-45.

[7] 김민경(2004), 현실적인 문장제에 관한 초등학생의 반응 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> 제6권 제2호, 135-151.
Kim Min Kyeong(2004), *Children's Realistic Response on Realistic Word Problems*, Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics <School Mathematics> **6(2)**, 135-151.

[8] 이대현(2009), 수학 교과서의 덧셈과 뺄셈 문장제와 그에 대한 학생들의 반응 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학> 제11권 제3호, 479-496.
Lee Dae Hyun(2009), *An Analysis on the Word Problems of the Addition and Subtraction in Mathematics Text Books and its Students' Responses*, Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics <School Mathematics> **11(3)**, 479-496.

[9] 이종욱(2003), 예비 초등교사의 덧셈과 뺄셈에 관한 교과 지식과 교수학적 지식, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 제16집, 331-344.
Lee Jongeuk(2003), *A Study on the Subject-matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge for the Addition and Subtraction of Pre-service Elementary Teachers*, Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series E <Communication of Mathematical Education> **16**, 331-344.

[10] 장혜원(2002), 덧셈 문장제에서 대상의 동질성과 상황의 다양성에 대한 소고, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 제12권 제1호, 17-27.
Chang Hye-won, *A Study on the Homogeneity of Objects and the Variety of Contexts in Addition Word Problems*, <The Journal of Educational Research in Mathematics> **12(1)**, 17-27.

[11] 정은실(2010), 초등학교 수학교과서에서의 양(量)의 계산에 대한 연구, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 제20권 제4호, 445-458.
Jeong Eun Sil(2010), *A Study on Quantity Calculus in Elementary Mathematics Textbooks*, <The Journal of Educational Research in

Mathematics> 20(4), 445-458.

[12] 최진숙・유현주(2006), 덧셈・뺄셈의 오류유형 분석 및 지도 방안에 대한 연구, 이화여자대학교 교과교육연구소 <교과교육학연구> 제10권 제2호, 303-327.
Choi Jin Suk and Yu Hyun Ju(2006), *A Study on Analysis of Errors of Addition and Subtraction, and Teaching Methods*, Research Institute of Curriculum Instruction <Journal of Research in Curriculum Instruction> 10(2), 303-327.

[13] 황우형・김경미(2008), 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해 분석, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> 제47권 제4호, 519-543.
Whang Woo Hyung and Kim Kyungmi(2008), *The Analysis of Children's Understanding of Operators on Whole Numbers*, Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series A <The Mathematical Education> 47(4), 519-543.

[14] 中原忠男(2000), 算数・数学科重要用語300の基礎知識, 明治図書.
Nakahara Tadao(2000), *Basic Knowledge of Important Terminology 300 in Arithmetic and Mathematics*, Meijitosho.

[15] 日本数学教育学会(2007), 算数教育指導用語事典, 教育出版.
Japan Society of Mathematical Education(2007), *A Terminological Cyclopedia of Arithmetic Education*, Kyoiku Shuppan.

[16] 日本数学教育協議会・銀林 浩(1996), 김부윤・정영우 옮김(2011), 수학공부 이렇게 하는 거야(하), 경문사.
The Association of Mathematical Instruction and Ginbayashi Kou(1996), A Cyclopedia for Understanding Mathematics, Nippon Hyoron Sha.
(translated into Korean by Kim Boo Yoon and Chung Young Woo, 2011).

Chung Young Woo
Pusan National University
Busan 609-735, Korea
E-mail address: nahime1130@hanmail.net

Kim Boo Yoon
Pusan National University
Busan 609-735, Korea
E-mail address: kimby@pusan.ac.kr