

# 입력 제한 조건을 고려한 불확실성 시스템의 출력 귀환 LPV 제어

## Output-feedback LPV Control for Uncertain Systems with Input Saturation

김 성 현\*  
(Sung Hyun Kim<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>School of Electrical Engineering, University of Ulsan

**Abstract:** This paper tackles the problem of designing a dynamic output-feedback control for linear discrete-time norm-bounded uncertain systems with input saturation. By employing a LPV (Linear Parameter Varying) instead of LTI (Linear Time-Invariant) control, the useful information on interpolation parameters appearing in the procedure of representing saturation nonlinearity as a convex polytope is additionally applied in the control design procedure. By solving the addressed problem that can be recast into a convex optimization problem characterized by LMIs (Linear Matrix Inequalities) with one prescribed scalar, the vertices of convex set containing an LPV output-feedback control gain and the associated maximal invariant set of initial states are simultaneously obtained.

**Keywords:** LPV control, norm-bounded uncertainty, input saturation, LMI

### I. 서론

제어 대상 시스템이 입력 제한을 가지는 것은 물리적으로 보편적인 현실이기 때문에 이러한 시스템을 제어할 때 입력 제한 조건을 고려하는 것은 당연한 일이며 이로 인해 현재 학계 제어공학 회에서 역시 이에 상당한 관심을 보이고 있다[17-19]. 실제 입력 제한 조건을 명확히 제어기 설계 시 반영하려는 결과가 다양한 문헌에 출간 되어져 있다. 그 중에 입력 제한 조건을 가진 시스템에 대한 국부 안정화와 관련된 주요한 접근법이 [1,2,6,7,9,13]에 잘 나타나 있다. 그 중에서 저출력 제어기를 설계함으로써 입력 제한 조건을 회피하는 제어 기법은 제한 조건에 해당하는 비선형 특성을 제어기 설계 과정에서 무시할 수 있도록 해주는데, 이는 입력 제한 조건을 제어 알고리즘에 하나의 충분조건으로 포함될 수 있도록 해주는 역할을 한다[1,9,13]. 그러나 이러한 접근법은 저출력 제어기를 지향하기 때문에 너무 보수적이며 또한 Attraction 영역의 축소화와 제어기 성능 저하를 일으킨다는 것이 문헌에 보고되어져 있다.

한편 입력 제한 조건을 직접적으로 다루는 접근법은 시스템 안정화를 위한 고출력 제어기 설계를 용이하게 해주며 또한 이는 Attraction 영역을 극대화 하는데 주요한 역할을 하게 된다. 그러나 이러한 접근법은 입력 제한 조건에 해당하는 비선형 특성을 직접적으로 다루어야 한다는 취약점을 가지게 된다. 그래서 최근 [2,6,7,10,11]에서 이러한 비선형 특성을 효율적으로 다루기 위해 두 개의 폴리토픽 표

현 방법을 제안하고 있다. 그중 하나는 제어 제한 조건의 정도를 나타내기 위해 제한된 값을 가진 계수를 사용하는 방법인데 이는 [10]에 의해 처음으로 제시된 방법이고 실제 이를 기반으로 다양한 입력 제한 조건 문제가 풀리고 있는 추세이다[11]. 또 다른 하나는 요소별 입력 제한 조건을 가진 시스템을 안정화 시키는 피드백 제어기의 설계를 위한 자유도를 높이기 위해 보조 제어 벡터를 추가로 사용하는 것이다. 이 같은 표현 방법은 [6]에 의해 처음으로 제안되었는데 이는 입력 제한 조건을 충분히 다룰 뿐 아니라 동시에 외부 외란에 의한 반응을 완전히 소멸하는데 아주 유용하게 사용되고 있다[2,7].

최근에 전자의 표현법은 입력 제한 조건을 고려한 불확실성 시스템의 견실 국부 안정화에 활용되고 있다[5,16]. 이 중 [16]에서 저자는 입력제한 조건을 가진 이산 불확실성 시스템에 대한 국부 상태 피드백 안정화 문제를 다루었는데 여기서 선형 행렬 부등식(LMI: Linear Matrix Inequality) 조건을 통해 이 문제를 풀기위해 설계자는 몇 개의 양의 값을 가지는 수를 초기에 선택해줘야 한다. 그리고 [5]에 저자는 입력 제한 조건을 가진 연속 시간 불확실성 시스템의 국부 출력 피드백 안정화 문제를 다루었는데 여기서 안정화 피드백 알고리즘과 그에 관한 초기조건 집합을 동시에 결정해 주었다. 그러나 [5]에서 제안한 조건은 비선형 행렬 부등식의 형태로 표현되기 때문에 이를 풀기위한 추가적인 반복 이완 최적화 기법을 제안 하였다. 한편 문헌의 조사에 따르면 후자의 표현법은 입력제한 조건을 가진 불확실성 시스템에 대한 강인한 국부 안정화 문제에 드물게 활용되어 졌다. 물론 [6]의 결과를 기반으로 강인한 국부 안정화 제어기를 설계하는데 문제가 없어 보이나 실제 출력 피드백 제어기 설계 시 상태 피드백 제어 시스템의 경

\* 책임저자(Corresponding Author)

Manuscript received March 18, 2013 / revised April 7, 2013 / accepted April 17, 2013

김성현: 울산대학교 전기공학부(shnkim@ulsan.ac.kr)

※ 이 논문은 2011년 울산대학교 연구비에 의하여 연구되었음.

우에서 고려되지 않은 문제로 인해 도출된 어려움이 쉽게 풀려지지 않게 된다.

그래서 본 논문은 입력 제한 조건을 고려한 강인한 국부 안정화 출력 피드백 제어기 설계 문제와 초기 조건의 불가변성 영역을 최대화 하는 문제를 동시에 다루려 한다. 이때 제어기 설계에 필요한 조건을 선형 행렬 부등식으로 표현하기 위한 테크닉을 소개할 예정이다. 상세히 말해, 본 논문은 입력 제한 조건에 따른 비선형적 특성을 폴리토픽 표현 형태로 바꿈으로 그 조건을 선형 행렬 부등식 조건에 명확히 포함되게 만들었다. 그리고 선형 시 불변 (LTI) 제어기 형태가 아닌 선형 파라미터 변형 (LPV) 형태의 제어기를 설계함으로써 제어 성능을 더욱 향상 시켰다. 주어진 선형 행렬 부등식은 MATLAB 툴을 이용해서 수치적으로 풀어, 선형 파라미터 변형 제어기의 이득 값과 그에 관련된 최대 초기 조건 불변 영역을 동시에 찾게 되었다. 그 획득한 폴리토픽의 꼭짓점들을 이용해서 실시간 보간법 기반 최적화된 제어이득 값을 결정하였다. 제안된 방법은 제어 입력이 그 한계까지 구동될 수 있도록 가능하게 하며 그 조건이 선형 부등식 행렬 (LMI) 형태로 주어지기 때문에 비선형 부등식 행렬 (BMI) 조건을 도출하는 다른 강인 제어 기법에 비해 그 설계가 용이하다 할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 II 장에서는 본 논문에서 다룰 시스템을 소개하고 그에 따른 몇 가지 가정을 제시할 것이다. 제 III 장에서는 불가변성 영역을 위한 조건과 선형 파라미터 변형 제어기 설계를 위한 과정을 설명하게 된다. 제 IV 장에서는 예제를 통해 주어진 제어 알고리즘의 타당성을 검증하게 되고 마지막 V 장에서 결론적 요약할 예정이다.

## II. 전체 시스템과 기법 소개

다음 주어진 이산 시간 불확실성 시스템을 고려하자

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + \Delta A(k))x(k) + (B + \Delta B(k))u_s(k), \\ y(k) &= Cx(k), \\ u_s(k) &= \text{sat}(u(k), \bar{u}), \bar{u} > 0. \end{aligned}$$

여기서  $x(k) \in R^n$ ,  $y(k) \in R^p$ ,  $u_s(k) \in R^m$ ,  $u(k) \in R^m$ ,  $\bar{u} \in R^m$ 는 각각 시스템 상태, 출력, 제한된 제어 입력, 제어 입력, 입력 제한 레벨을 나타낸다. 또한 A와 B는 일정한 값을 가지는 실수 행렬을 나타내고  $\Delta A(k)$ 와  $\Delta B(k)$ 는 주어진 시스템의 불확실성을 나타내는데 다음의 조건을 만족한다.

$$[\Delta A(k) \ \Delta B(k)] = HF(k) [E_1 \ E_2] \quad (1)$$

여기서  $F(k) \in R^{s \times l}$ 은  $F^T(k)F(k) \leq I$ 을 만족하는 시변 행렬이고 H와  $E_1$ ,  $E_2$ 은 적당한 크기를 가지는 고정된 행렬이다. 그리고 제한된 입력을 나타내기 위해 사용한 함수  $\text{sat}(u, \bar{u}) : R^m \rightarrow R^m$ 의 정의는 다음과 같다.

$$\text{sat}(u, \bar{u}) = [\text{sat}_e(u_1, \bar{u}_1) \cdots \text{sat}_e(u_m, \bar{u}_m)] \quad (2)$$

여기서  $u_i$ 와  $\bar{u}_i$ 는 각각  $u$ 와  $\bar{u}$ 의  $i$ 번째 요소를 나타낸다.

[6]에서 제안한 다음 보조정리를 사용함으로써 우리는 제한 조건에 의한 비선형 특성을 다룰 계획이다.

보조정리 1:  $D$ 를  $m_2 \times m_2$ 크기의 0과 1의 값을 가진 대각 행렬이라고 하자. 만일 모든  $r \in [1, m]$ 에 대해  $|v_r| \leq \bar{u}_r$ 을 만족할 경우 다음 조건이 만족한다.

$$\text{sat}(u, \bar{u}) \in \text{Co}(D_i u + D_i^- v, i = 1, \dots, 2^m) \quad (3)$$

여기서  $D_i$ 는  $D$ 의 원소가 되고  $D_i^- = I - D_i$ 를 나타낸다.

주해 1: 다음 조건을 사용함으로써 간섭계수  $\alpha_i(k)$ 는 즉시 매순간  $u(k)$ 와  $v(k)$ 를 측정함으로써 계산해 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(k), \bar{u}) &= \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(k) (D_i u(k) + D_i^- v(k)), \\ \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(k) &= 1, \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(k) = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

더군다나 우리는 본 논문의 주된 결과를 도출해 내기 위해 다음의 보조정리를 사용하게 된다.

보조정리 2: 적당한 크기의 시스템 행렬  $A_0, H_0, E_0$ 가 주어졌다고 하자. 그리고 만일 아래 조건을 만족하는  $P_0 > 0$ 와  $\eta_0 > 0$ 가 존재한다면

$$0 < \begin{bmatrix} P_0 (*) (*) 0 \\ A_0 P_0^{-1} 0 (*) \\ E_0 0 \eta_0 I 0 \\ 0 H_0^T 0 \eta_0^{-1} I \end{bmatrix}. \quad (5)$$

그러면 아래 조건을 만족하는  $P_0 > 0$ 은 반드시 존재한다.

$$0 < \begin{bmatrix} P_0 (*) \\ A_0 + H_0 F(k) E_0 P_0^{-1} \end{bmatrix}, \|F(k)\| \leq I \quad (6)$$

증명: Schur's Complement에 의해 (6)식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$0 < P_0 - (A_0 + H_0 F(k) E_0)^T P_0 (A_0 + H_0 F(k) E_0), \quad 0 < P_0. \quad (7)$$

[8]으로부터 우리는  $P_0 > 0$ 와  $\eta_0 > 0$ 가 다음 조건을 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} P_0^{-1} - \eta_0 H_0 H_0^T &> 0, \\ (A_0 + H_0 F(k) E_0)^T P_0 (A_0 + H_0 F(k) E_0) \\ &\leq A_0^T (P_0^{-1} - \eta_0 H_0 H_0^T)^{-1} A_0 + \eta_0^{-1} E_0^T E_0. \end{aligned} \quad (8)$$

그래서 만일 다음 부등 조건이 만족하면

$$0 < P_0 - A_0^T (P_0^{-1} - \eta_0 H_0 H_0^T)^{-1} A_0 - \eta_0^{-1} E_0^T E_0, \quad (9)$$

$$0 < P_0^{-1} - \eta_0 H_0 H_0^T, \quad 0 < P_0, \quad 0 < \eta_0 \quad (10)$$

식 (7) 역시 만족하게 된다. 그러면 (9)에 Schur's Complement을 적용함으로써 (5)가 유도되는데 이는 (10)에 의해 표현되는 모든 조건을 포함하게 된다. ■

이제 다음의 형태를 가지는 동적 출력 피드백 선형 파라미터 변형 제어기를 고려해보자.

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c(k)x_c(k) + B_c(k)y(k), \\ u(k) &= C_c x_c(k) + D y(k), \\ v(k) &= H_c x_c(k) + J y(k), \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $[A_c(k) B_c(k)] = \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(k) [A_c^i B_c^i]$  이고  $x_c(k) \in R^n$

은 제어기 상태 변수를 나타내는데 일반적으로 초기조건을 0으로 두게 된다. 그러면 식 (11)을 기반으로 유도 되어진 전체 시스템 식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= \begin{bmatrix} A + \Delta A(k) & 0 \\ B_c(k)C & A_c(k) \end{bmatrix} x_d(k) \\ &+ \begin{bmatrix} B + \Delta B(k) \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}(u(k), \bar{u}). \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $x_d(k) = [x^T(k) x_c^T(k)]^T$ 을 나타낸다. 이 상태 변수  $x_d(k)$ 을 기반으로 제어 입력과 보조 제어 입력을 각각 다음과 같이 재구성되어 지게 된다.

$$u(k) = [D_c C C_c] x_d(k) \quad (13)$$

$$v(k) = [J_c C H_c] x_d(k) \quad (14)$$

그러면 보조정리 1에 의해 만일  $k \geq 0$ 대해 상태변수  $x_d(k)$ 가  $L(H_c, J_c)$ 의 영역에 존재 한다면

$$L(H_c, J_c) = (x_d \in R^{2n} | -\bar{u} \leq [J_c C H_c] x_d \leq \bar{u}) \quad (15)$$

다음의 등식이 성립한다.

$$\text{sat}(u(k), \bar{u}) = \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(k) (D_i [D_c C C_c] + D_i^- [J_c C H_c]) x_d(k)$$

그래서  $x_d(k) \in L(H_c, J_c)$  조건하에 전체 시스템을 다음과 같이 재구성되어 질 수 있다.

$$x_d(k+1) = (A_d(k) + \Delta A_d(k)) x_d(k) \quad (16)$$

여기서

$$A_d(k) = \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(k) A_d^i, \quad \Delta A_d(k) = \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(k) \bar{H} F(k) \bar{E}^i,$$

$$A_d^i = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & B & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i D_c & D_i C_c \\ D_i^- J_c & D_i^- H_c \\ B_c^i & A_c^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}^i = [E_1 \ 0] + [E_2 \ E_2] \begin{bmatrix} D_i D_c & D_i C_c \\ D_i^- J_c & D_i^- H_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

### III. 제어기 설계

아래 정의된 타원체의 집합 (Ellipsoidal Set)을 고려하자.

$$E(P) = \{x_d \in R^{2n} | x_d^T P x_d \leq 1, P > 0\}. \quad (17)$$

만일 아래 조건을 만족하면 (17)에 주어진 타원체 집합  $E(P)$ 을 Contractive Invariant (CI) 되어졌다고 말한다.

$$\begin{aligned} 0 &< x_d^T(k) P x_d(k) - x_d^T(k+1) P x_d(k+1), \\ x_d(0) &\in E(P). \end{aligned} \quad (18)$$

다음 보조정리에서 우리는 타원체 집합  $E(P)$ 의 CI을 위한 조건을 나타낸다.

보조정리 3: 다음 조건을 만족하는  $P > 0$ 가 존재한다면

$$0 < \begin{bmatrix} P & (*) \\ A_d^i + \bar{H} F(k) \bar{E}^i & P^{-1} \end{bmatrix}, \quad \forall i \in [1, 2^m], \quad (19)$$

$$E(P) \subset L(H_c, J_c). \quad (20)$$

(17)에 정의된  $E(P)$ 는 전체 시스템에 대해 CI 조건을 만족 하게 된다.

증명: 전체 시스템의 초기조건  $x_d(0)$ 이 타원체 집합  $E(P)$  내에 존재한다고 가정하자. 그리고 만일 식 (18)에 있는 조건이 만족한다면 상태변수  $x_d(k)$ 은 항상 그 타원체 집합  $E(P)$ 에 존재하게 되고  $k$ 가 증가됨에 따라 상태 변수  $x_d(k)$ 는 원점으로 수렴하게 된다. 더군다나 만일 식 (20)에 있는 조건이 만족한다면, 상태 변수의 변화는 전체 시스템에 의해 결정되어 지게 되고 이로써 식 (18)은 다음과 같이 변형되어 질 수 있게 된다.

$$0 < P - (A_d(k) + \Delta A_d(k))^T P (A_d(k) + \Delta A_d(k)). \quad (21)$$

여기서 Schur's Complement를 사용함으로써, 식 (21)은 다음과 같이 재구성되어 지게 된다.

$$0 < \begin{bmatrix} P & (*) \\ A_d(k) + \Delta A_d(k) & P^{-1} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

식 (19)에 주어진 조건을  $\alpha_i(k)$ 로 곱하고  $i=1$ 부터  $i=2^m$ 까지 더하게 되면 식 (22)에 주어진 조건이 나오게 된다. 그래서 만일 (19) 식의 조건이 모든  $i=1, \dots, 2^m$ 에 대해 만족하게 되면 (22) 역시 모든 불확실한 성분으로부터 그 조건을 만족 시키게 된다. 따라서 식 (19)와 (20)에 있는 조건을 통해 상태 변수  $x_d(k)$ 가 항상 타원체 집합  $E(P)$ 에 존재하는 것과 그 값이  $k$ 값의 증가에 따라 원점으로 수렴함을 보일 수 있다. ■

더군다나 보조정리 2로부터 우리는 다음 조건이 만족되어 지면 식 (19)의 조건 역시 만족됨을 알 수 있다.

$$0 < \begin{bmatrix} P & (*) & (*) & 0 \\ A_d^i & \bar{P} & 0 & (*) \\ \bar{E}^i & 0 & \eta I & 0 \\ 0 & \bar{H}^T & 0 & \eta^{-1} I \end{bmatrix}, \quad i \in [1, 2^m] \quad (23)$$

여기서  $\bar{P} = P^{-1}$ 을 나타낸다. 본 논문에서 우리의 또 다른 목표는 초기 조건이 존재할 Invariant Set을 가능한 최대로 확장하는 것이다. 즉  $E(P)$ 의 프로젝션 영역을 나타내는  $\text{Proj}(E(P))$ 의 크기를 최대화 하는 것이다. 이를 위해 우리는 다음과 같이 정의된 제한된 Convex 집합을 고려한다.

$$X_0 = \text{Co}\{\lambda_i \rho_i\}, \quad \lambda_i > 0, i \in [1, q] \quad (24)$$

여기서  $\text{Co}\{\cdot\}$ 은 Convex Hull을 나타내고  $\lambda_i \rho_i$ 는 그 집합의 꼭짓점을 나타낸다. 그리고  $\rho_i$ 는 여기서  $\text{Co}\{\rho_i, i \in [1, q]\}$ 가 원점을 포함하도록 초기에 선정되어 질 수 있다. 그러면 다

음 조건 하에  $\lambda_1 + \dots + \lambda_q$ 을 증가시킴으로

$$X_0 \subset \text{Proj}(E(P)) \quad (25)$$

우리는  $\text{Proj}(E(P))$ 의 크기를 최대화 할 수 있고 또한 수식 (24)에 정의된 집합  $X_0$ 의 크기도 키울 수 있다. 이는 각 꼭짓점들이  $\lambda_i$ 에 의해 조절될 수 있기 때문이다. 결론적으로 우리는 다음의 최적화 문제를 풀 계획인데 이를 LQS (Local Quadratic Stabilization)라고 [5]은 명시하였다.

$$\max \{ \lambda_1 + \dots + \lambda_q \} \text{ subject to (20), (23), (25).}$$

다음 정리에서 우리는 위의 최적화 문제를 풀 수 있는 방법을 제시할 것이다. 우선 이에 앞서 우리는  $P$ 와  $\bar{P}$ 를 다음과 같이 둔다.

$$P = \begin{bmatrix} X & Y \\ (*) & Z \end{bmatrix}, \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{X} & \bar{Y} \\ (*) & \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서 모든 원소 행렬은  $n \times n$ 을 만족한다.

정리 1:  $\rho_i$ 와  $\bar{u}$ 의 값이 주어졌다고 하자. 그리고 만일 선정된  $\eta$ 값에 대해 아래 최적화 조건을 만족하는  $\bar{\lambda}_i, X, \bar{X}, G_1^i, G_2, G_3, M_{32}^i, \bar{Q}, D_c, J_c$ 가 존재 한다면

$$\min(\bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_q) \quad (27)$$

$$0 < \begin{bmatrix} X & I & (*) & (*) & (*) & 0 \\ I & \bar{X} & (*) & (*) & (*) & 0 \\ M_{31}^i & M_{32}^i & X & I & 0 & (*) \\ M_{41}^i & M_{42}^i & I & \bar{X} & 0 & (*) \\ M_{51}^i & M_{52}^i & 0 & 0 & \eta I & 0 \\ 0 & 0 & H^T X H^T & 0 & \eta^{-1} I & \end{bmatrix}, \forall i \in [1, 2^m], \quad (28)$$

$$0 \leq \begin{bmatrix} Q & J_c C & G_3 \\ (*) & X & I \\ (*) & I & \bar{X} \end{bmatrix}, Q_{ii} \leq \bar{u}_i^2, \forall i \in [1, m], \quad (29)$$

$$0 \leq \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_i & (*) \\ X \rho_i & X \end{bmatrix}, \forall i \in [1, q], \quad (30)$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_i = 1/\lambda_i^2 \\ M_{31}^i = XA + G_1^i C \\ M_{32}^i = M_{31}^i \bar{X} + XB(D_i C_c + D_i^- H_c) \bar{Y}^T + YA_c^i \bar{Y}^T \\ M_{41}^i = A\bar{X} + B(D_i G_2 + D_i^- G_3) \\ M_{51}^i = E_1 + E_2(D_i D_c + D_i^- J_c) C \\ M_{52}^i = E_1 \bar{X} + E_2(D_i G_2 + D_i^- G_3) \\ G_1^i = XB(D_i D_c + D_i^- J_c) + YB_c^i \\ G_2 = D_c C \bar{X} + C_c \bar{Y}^T \\ G_3 = J_c C \bar{X} + H_c \bar{Y}^T \end{cases} \quad (31)$$

전체 시스템의 점근적 안정성은 아래 절차를 통해 설계된 동적 출력 피드백 LPV 제어를 통해 보장되어지게 된다.

• 오프라인 절차

ㄱ) 식 (27)~(30)에서 주어진 조건을 만족하는  $G_1^i, G_2, G_3, M_{42}^i, \bar{Q}, D_c, J_c, X, \bar{X}$ ,을 얻는다.

ㄴ)  $\text{svd}(X - \bar{X}) = YZ^{-1}Y^T$ 을 이용해서  $Y$ 와  $Z$ 를 찾는다. 그리고 그 결과와  $\bar{Y} = -\bar{X}YZ^{-1}$  식을 이용해서  $\bar{Y}$ 을

찾는다.

ㄷ) 식 (31)을 이용해서  $A_c^i, B_c^i, C_c, H_c$ 를 구한다.

• 온라인 절차

ㄷ) 식 (13)을 이용해서  $u(k)$ 와  $v(k)$ 를 찾아낸다.

ㄹ) 위 결과를 이용해서 식 (4)로부터  $\alpha_i(k)$  값을 복원하고 이로부터 아래의 LPV 제어기 이득 값을 계산한다.

$$[A_c(k) \ B_c(k)] = \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(k) [A_c^i \ B_c^i]$$

증명: 우선, 식 (19)의 조건이 식 (28)의 조건으로 변형될 수 있음을 보일 것이다. 이를 위해 우리는 아래 행렬을 하나 정의한다.

$$W = \begin{bmatrix} X & I \\ Y^T & 0 \end{bmatrix} \in R^{2n \times 2n}. \quad (32)$$

일반적으로 식 (32)에서 우리는 행렬  $Y$ 가 풀 랭크를 가진다고 가정할 수 있다[15]. 식 (23)의 조건 왼쪽과 오른쪽에 각각  $M_1 = \text{diag}(\bar{P}W, W, I, I)$ 와  $M_1^T$ 를 곱함으로 우리는 아래 조건을 얻을 수 있다.

$$0 < \begin{bmatrix} W^T P W & (*) & (*) & 0 \\ W^T A_d^i \bar{P} W & W^T \bar{P} W & 0 & (*) \\ \bar{E}^i \bar{P} W & 0 & \eta I & 0 \\ 0 & \bar{H}^T W & 0 & \eta^{-1} I \end{bmatrix}. \quad (33)$$

더구나 식 (33)의 행렬식 내에 있는 요소 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$W^T \bar{P} W = \begin{bmatrix} X & I \\ I & \bar{X} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & W^T A_d^i \bar{P} W \\ & = \begin{bmatrix} XA + G_1^i C & M_{32}^i \\ A + B(D_i D_c + D_i^- J_c) C & A\bar{X} + B(D_i G_2 + D_i^- G_3) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \bar{E}^i \bar{P} W \\ & = [E_1 + E_2(D_i D_c + D_i^- J_c) C \ E_1 \bar{X} + E_2(D_i G_2 + D_i^- G_3)], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\bar{H}^T W = [H^T X \ H^T]. \quad (37)$$

여기서  $G_1^i, G_2, G_3, M_{32}^i$ 은 식 (31)에 정의 되어져 있다. 식 (34)~(37)을 식 (33)에 대입함으로 식 (28)의 조건이 얻어지게 된다. 다음으로 식 (20)의 조건이 식 (29)의 조건으로 변형될 수 있음을 보일 것이다. 우선, 식 (20)의 조건은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$[J_c \ H_c] \bar{P} [J_c \ H_c]^T \leq Q, Q_{ii} \leq \bar{u}_i^2, \forall i \in [1, m]. \quad (38)$$

여기서  $Q_{ii} \in R$ 은  $Q$ 의  $i$ 번째 대각 원소를 나타낸다. Schur's Complement를 이용해서 식 (38)에 있는 조건을 변형하면 다음과 같다.

$$0 \leq \begin{bmatrix} Q & [J_c \ C] \\ (*) & P \end{bmatrix}, Q_{ii} \leq \bar{u}_i^2, \forall i \in [1, m]. \quad (39)$$

식 (38)의 첫 번째 부등식 조건 오른쪽 왼쪽에 각각  $M_2 = \text{diag}(I, \bar{P}W)$ 와  $M_2^T$ 를 곱하고 또 식 (34)의 등식과

아래 등식을 이용함으로

$$[J_c C H_c] \bar{P} W = [J_c C G_3] \quad (40)$$

우리는 식 (29)의 조건을 얻을 수 있다. 마지막으로 식 (25)의 조건이 식 (30)의 조건으로 변형될 수 있음을 보일 것이다. 우선, 식 (38)의 조건은 다음과 같이 기술 될 수 있다.

$$\rho_i^T X \rho_i \leq (1/\lambda_i^2), \forall i \in [1, q]. \quad (41)$$

따라서 Schur's Complement에 의해, 식 (30)의 조건이 얻어지게 된다. ■

선정된  $\eta$  값에 의해 정리1의 최적화 문제를 풀므로 우리는 출력 피드백 LPV 제어기를 구성하는 Convex 집합의 꼭짓점들을 얻을 수 있게 되었고 이에 동시에 초기 조건이 존재할 수 있는 최대 Invariant 집합  $E(P)$ 을 계산 할 수 있게 되었다. 또한 그 꼭짓점들을 이용해서 우리는 실시간으로 제어기 이득 값이 변하는 LPV 제어기를 입력 제한이 가해진 대상 시스템에 적용할 수 있게 되었고 이에 필요한 계수  $\alpha_i(k)$ 를 어떻게 구하는 그 방법을 제시해 주었다.

주해 2: 식 (31)을 참고하여 주목할 수 있는 사항은 제어기 이득 행렬  $(A_c^i, B_c^i)$  대신  $(A_c, B_c)$ 를 사용할 경우 주어진 최적화 문제가 비선형 행렬 부등식 조건식으로 표현되어 진다는 것이다. 그리고 그 해 역시 보수적인 결과가 산출되어 진다.

#### IV. 수치적 예제

제안된 출력 피드백 제어 알고리즘의 타당성을 검증하기 위해 우리는 다음의 시스템을 고려한다.

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, C = [1.0 \ 1.0],$$

$$H = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, E_1 = [0.02 \ 0.03], E_2 = 0.05.$$

입력 제한 조건:  $|u_j(k)| \leq 1, j = 1, \dots, m$

$$\rho_i \in \{[1 \ 1]^T, [-1 \ 1]^T, [-1 \ -1]^T, [1 \ -1]^T\}, \eta = 1.2.$$

위 대상 시스템에 대한 출력 귀환 LPV 제어기를 설계하기 위해 우선 정리1에 주어진 최적화 조건을 MATLAB LMI 툴박스를 이용해 풀면, 다음과 같은 제어기 이득 값이 나오게 된다.

$$A_c^1 = \begin{bmatrix} 0.6091 & -0.0007 \\ -0.0000 & -0.0005 \end{bmatrix}, A_c^2 = \begin{bmatrix} 0.2907 & -0.0006 \\ 0.0000 & -0.0005 \end{bmatrix},$$

$$B_c^1 = \begin{bmatrix} -0.0084 \\ -0.0000 \end{bmatrix}, B_c^2 = \begin{bmatrix} -0.0124 \\ -0.0000 \end{bmatrix},$$

$$C_c = [-16.8396 \ 0.1328], D_c = -0.2561.$$

그리고 동시에 얻게 된 Maximum Contrastive Invariant Ellipsoid Set의  $x_1 - x_2$  평면 위로의 프로젝트 된 결과  $Proj(E(P))$ 이 그림 1(a)에 그려졌다.

그림 1에서 내부 실선은 입력 제한 조건을 회피하는 접근법으로 얻게 된 최대 크기의 Contrastive Invariant Ellipsoidal Set  $Proj(E_c(P))$ 을 나타내는데 여기 내부에 상

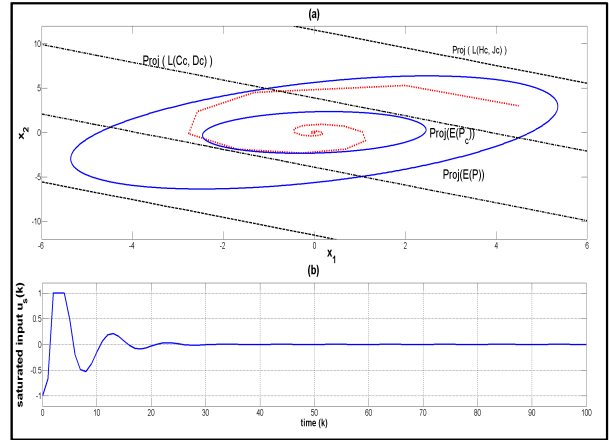


그림 1. 시간 변화에 따른 상태 변수 변화 과정.

Fig. 1. (a) State trajectories (dot line); maximal invariant ellipsoidal set obtained by our method,  $Proj(E(P))$ , (outer solid line); maximal invariant ellipsoidal set obtained by low gain control method in [1],  $Proj(E_c(P))$ , (inner solid line); and linear region of the saturation (dash-dot line),  $Proj(L(H_c, J_c))$ , (b) saturated input trajectories,  $u_s(k)$ .

태 변수가 머물게 되면 저출력 제어 입력이 사용 되어지게 된다. 그래서 두 집합  $Proj(E(P))$ 와  $Proj(E_c(P))$ 을 비교해보게 되면 본 논문에서 제시한 방법에 의한 집합이 훨씬 더 크음을 알 수 있다. 이는 곧 본 논문에서 제시한 방법이 국부 안정화 조건에서 더 넓은 초기 조건 영역을 확보함을 의미하게 된다. 예를 들어 아래의 초기 조건을 고려하자.

$$x(0) = [4.5 \ 3.0]^T$$

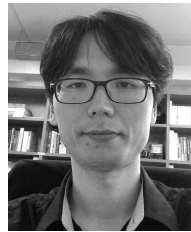
이 초기 값은  $Proj(E_c(P))$  내에 존재하지는 않지만 (곧, 입력 제한 조건을 회피하는 방법으로는 안정화가 되지 않는 초기 조건)  $Proj(E(P))$  내에 존재함을 알 수 있다. 결국 정리1로부터 얻게 된 제어기 이득으로 시스템을 안정화시킬 수 있다는 의미인데 이에 대한 검증이 그림 1(b)에서 이루어 졌다. 동시에 주목할 가치가 있는 것은 그 상태 변수의 값이 예상된 바와 같이  $Proj(E(P))$  영역을 벗어나지 않는다는 것이다. 또한 제어기 입력 한계치인 1의 값을 넘어 서지 않고 있다는 사실이다.

#### V. 결론

본 논문에서 우리는 입력 제한 조건을 고려한 불확실성 시스템의 제어를 위한 출력 피드백 LPV 제어 기법을 소개하였다. LTI 제어 기법이 아닌 LPV 제어 기법을 사용함으로 정리1에 제안된 최적화 문제의 조건을 명확히 선형 행렬 부등식 형태로 표현되어지게 되었다. 수치 해석 툴을 이용해 정리1의 최적화 조건을 풀므로 우리는 주어진 시스템을 안정화시키기 위한 LPV 제어기의 구성 꼭짓점을 얻을 수 있게 되었고 동시에 Maximum Contrastive Invariant Ellipsoid 역시 얻을 수 있게 되었다.

## REFERENCES

- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and E. V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia: SIAM, 1994.
- [2] H. Fang, Z. Lin, and T. Hu, "Analysis of linear systems in the presence of actuator saturation and L2-disturbances," *Automatica*, vol. 40, no. 7, pp. 1229-1238, 2004.
- [3] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Tool box: For use with MATLAB*, The Mathworks, Natick, MA, 1995.
- [4] J. M. Gomes da Silva, Jr., and S. Tarbouriech, "Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: an LMI-based approach," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 46, no. 1, pp. 119-125, 2001.
- [5] D. Henrion, S. Tarbouriech, and G. Garcia, "Output feedback robust stabilization of uncertain linear systems with saturating controls: a LMI approach," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 44, no. 11, pp. 2230-2237, 1999.
- [6] T. Hu and Z. Lin, *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Vol. xvi (392p). Boston: Birkhauser, 2001.
- [7] T. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance," *Automatica*, vol. 38, no. 2, pp. 351-359, 2002.
- [8] X. Li and C. E. D. Souza, "Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay," *Automatica*, vol. 33, no. 9, pp. 1657-1662, 1997.
- [9] Y. Lu and Y. Arkun, "Quasi-min-max MPC algorithm for LPV systems," *Automatica*, vol. 36, pp. 527-540, 2000.
- [10] A. P. Molchanov and E. S. Pyatnitskii, "Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 13, pp. 59-64, 1989.
- [11] T. Nguyen and F. Jabbari, "Output feedback controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate saturation," *Automatica*, vol. 36, pp. 1339-1346, 2000.
- [12] J. H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain linear systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 39, no. 1, pp. 202-207, 1994.
- [13] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 32, no. 10, pp. 1361-1379, 1996.
- [14] R. S. Sanchez-Pena and M. Sznaier, *Robust Systems: Theory and Applications*, New York: Wiley, 1998.
- [15] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, "Multi-objective output feedback control via LMI optimization," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 42, no. 7, pp. 896-911, 1997.
- [16] S. Tarbouriech and G. Garcia, "Local stabilization for linear discrete-time systems with bounded controls and norm-bounded time-varying uncertainty," *International Journal Robust and Nonlinear Contr.*, vol. 8, pp. 831-844, 1998.
- [17] S. H. Kim, "H $\infty$  output-feedback LPV control for systems with input saturation," *International Journal Control Automation, and Systems*, vol. 10, no. 6, pp. 1267-1272, Dec. 2012.
- [18] J. S. Kim, H. C. Cho, G. H. Kim, H. G. Ha, and H. K. Lee, "Hybrid adaptive feedforward control system against state and input disturbances," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 3, pp. 237-242, Mar. 2012.
- [19] S. Lee, "Control of discrete time nonlinear systems with input delay," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 6, pp. 509-512, Jun. 2012.



김 성 현

2001년 경북대 전기전자공학부 졸업.  
2003년 포항공과대학교 대학원 석사.  
2008년 동 대학 박사. 2010년~현재 울산대학교 전기공학부 교수. 관심분야는 퍼지 제어시스템, 네트워크 기반 제어시스템, 임베디드 제어시스템 등.