The Korean Journal of Applied Statistics (2013) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2013.26.1.119
26(1), 119–130

Study on the Efficiency of Multi-State *k*-out-of-*n* System

Jihyun Kim[a] · Hae Byur Nam[a] · Ji Hwan Cha[a,1]

[a]Department of Statistics, Ewha Womans University

(Received November 23, 2012; Revised December 23, 2012; Accepted January 14, 2013)

Abstract

A system with n components which functions when at least k of the components function is called k-out-of-n system. Most studies on k-out-of-n system derive the system reliability based on the assumption that the system has just two states: functioning or failed. However, the system efficiency may depend on the number of functioning components. This paper considers a Multi-state k-out-of-n system and derives the total system efficiency. In addition, assuming that the system is repairable, the optimal repair policy to maximize the system efficiency is studied. The system efficiency considered in this paper can be regarded as a generalized measure of the mean time to the failure of the system.

Keywords: Multi-state k-out-of-n system, system efficiency, efficiency function, minimal repair.

1. 서론

시스템을 구성하고 있는 n개의 부품 중 적어도 k개의 부품이 제대로 작동하면 정상적으로 작동하는 시스템을 k-out-of-n 시스템이라 한다. 기존의 대부분의 연구에서는 k-out-of-n 시스템의 상태를 작동과 고장 두 가지로만 구분하고, 시스템의 신뢰도를 산출하는 문제를 주로 다루어왔다 (Seo 등, 2010; Leemis, 1995; Rausand와 Hoyland, 2004). 하지만 이러한 k-out-of-n 시스템의 경우, 시스템이 작동상태에 있을 때에 작동하는 부품의 개수에 따라 시스템의 상태를 여러 단계로 구분할 수 있다. 예를 들어 동일한 가스관 3개로 가스를 공급하는 1-out-of-3 시스템을 고려하자. 3개의 가스관이 모두 작동하는 경우와 2개의 가스관만 작동하는 경우, 1개의 가스관만이 작동하는 경우 모두 가스가 공급되어 시스템이 작동하지만, 공급되는 가스의 총량은 작동하는 가스관의 개수에 따라서 달라지게 될 것이다. 이처럼 k-out-of-n 시스템의 경우 작동하는 부품의 개수에 기초한 시스템의 효율을 고려할 필요가 있겠다.

위의 예에서 시스템은 가스관이 모두 작동하는 경우를 State 3, 하나의 가스관이 고장이 나서 두 개의 가스관이 작동하는 경우를 State 2, 두 개의 가스관이 고장이 나서 한 개의 가스관만 작동하는 경우를 State 1, 마지막으로 모든 가스관이 고장이 나서 시스템이 고장 난 경우를 State 0로 나타내어, 총 4개의 상태를 가질 수 있다. 이와 같이 상태가 구분되는 시스템을 다상태 k-out-of-n 시스템이라고 한다 (Lisnianski와 Levitin, 2003).

This work was supported by the National Research Foundation of Korea(NRF) grant funded by the Korea government(MEST) (No. 2011-0017338).

[1]Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Ewha Womans University, 11-1 Daehyun-Dong, Seodaemun-Gu, Seoul 120-750, Korea. E-mail: jhcha@ewha.ac.kr

이러한 다상태 k-out-of-n 시스템에서는 단순하게 시스템의 작동 여부만을 고려하는 것이 아니라, 시스템이 어느 상태에서 작동하는가 또한 중요하게 고려되어야 한다. 시스템이 다상태를 갖는다면 시스템의 상태에 따라서 단위시간당 시스템의 효율이 달라지므로 전체 작동 시간 동안의 시스템의 총 효율 또한 시스템을 평가하는데 중요한 측도가 될 수 있다.

따라서 본 논문에서는 동일하며 서로 독립인 n개의 부품으로 구성되어 있는 다상태 k-out-of-n 시스템을 고려하여, 각 상태에 따른 효율 함수를 정의하고, 시스템의 총 효율을 구하는 문제를 다루고자 한다. 또한, 최소 수리를 시행할 경우 시스템의 총 효율을 최대로 할 수 있는 수리 시점을 찾아보고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 먼저 2장에서는 다상태 k-out-of-n 시스템의 효율함수를 정의하고, 시스템의 총 효율을 구하는 식을 유도한다. 3장에서는 최소 수리가 가능한 시스템에 대하여, 수리 시점에 따른 시스템의 총 효율을 산출하는 식을 유도한다. 4장에서는 앞서 유도한 결과들을 2-out-of-5 시스템에 적용하여 보도록 한다. 5장에서는 본 연구의 의의와 결론을 제시한다.

2. 다상태 k-out-of-n 시스템의 효율

본 연구에서는 동일하며 서로 독립적인 n개의 부품으로 구성되어 있는 k-out-of-n 시스템에 대하여 작동하고 있는 부품의 개수에 따라 시스템의 상태를 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{cases} n, & n\text{개의 부품이 모두 작동하는 경우,} \\ n-1, & n-1\text{개의 부품이 작동하는 경우,} \\ n-2, & n-2\text{개의 부품이 작동하는 경우,} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ k, & k\text{개의 부품이 작동하는 경우,} \\ 0, & k\text{개 미만의 부품이 작동하는경우.} \end{cases}$$

단, 시스템의 상태는 항상 모든 부품이 작동하는 상태(즉, State n)부터 시작하며, 부품은 작동과 고장 두 가지의 상태만을 갖는다고 가정한다.

또한, $\phi_m(t)$, $m = 0, k, k+1, \ldots, n$를 t시점에서 시스템이 상태 m에 있을 때 단위시간당 효율함수를 나타내는 기호로 정의한다. 즉 $\phi_m(t)$는 t시점에서 시스템이 상태 m에 있을 때, 시스템이 단위시간당 하는 일의 양으로 이해될 수 있겠다. 일반적으로, 시스템 내에서 작동하는 부품의 개수가 줄수록 단위시간당 효율 역시 낮아지며, 또한 시간이 지남에 따라 동일한 상태의 시스템이라도 효율이 감소하므로 $\phi_m(t)$는 m에 관하여 증가함수, t에 관하여 감소함수라 가정한다. 시스템이 작동하지 않는 경우 효율은 0이 되므로, $\phi_0(t) = 0$, $t \geq 0$이 됨은 명백하다. Figure 2.1에 3-out-of-5 시스템의 효율함수 예가 주어져 있다.

$\lambda(t)$를 각 부품의 고장률 함수라 하고, $X_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$는 t시점에서의 작동하고 있는 i번째 부품의 잔여수명이라고 정의하자. 그러면 i번째 부품의 수명분포(생존함수)는 다음과 같이

$$S_i(t) = P(X_i(0) > t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)ds\right\}$$

으로 나타낼 수 있다.

이제 이러한 시스템의 총 효율을 산출하기 위하여, 시스템의 작동 시작부터 최종 고장 상태에 이르기까지 상태의 변화를 시간 축에 표시하면 다음 Figure 2.2와 같다.

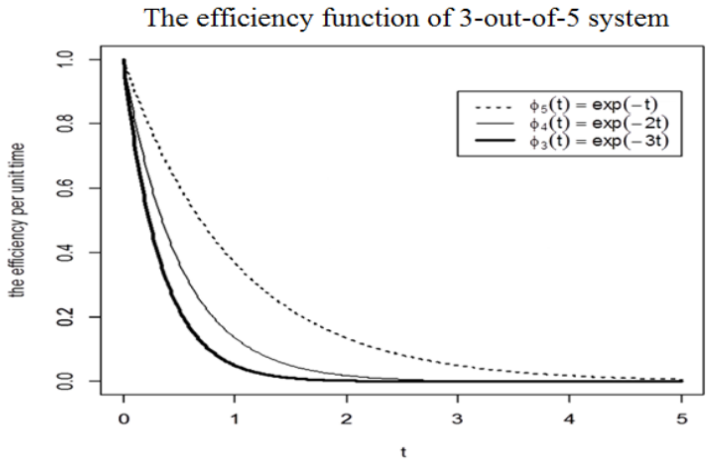

Figure 2.1. The efficiency function of 3-out-of-5 system

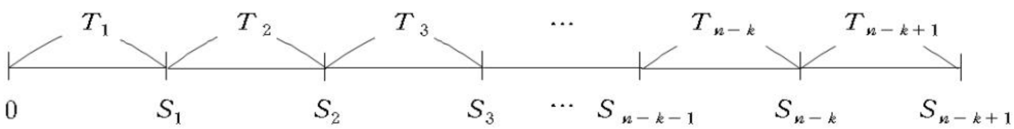

Figure 2.2. The time-line of multi-state k-out-of-n system

Figure 2.2에서 S_j는 0시점부터 j번째 고장이 발생하기까지 걸리는 시간, T_a는 $a-1$번째 고장이 발생한 시점부터 a번째 고장까지의 고장 간격 시간을 나타낸다. 고장 간격 시간들이 $T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{n-k+1} = t_{n-k+1}$로 주어져있을 때 시스템의 총 효율 함수를 $\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-k+1})$로 나타내자. 그러면, 각 상태에서의 효율 함수의 정의에 따라 총 효율함수는

$$\Phi\left(t_1, t_2, \ldots, t_{n-k+1}\right) = \int_0^{t_1} \phi_n(u)du + \int_0^{t_2} \phi_{n-1}(u+t_1)du + \cdots + \int_0^{t_{n-k+1}} \phi_k\left(u + \sum_{j=1}^{n-k} t_j\right)du \quad (2.1)$$

로 주어짐을 알 수 있다. 따라서, 시스템의 총 효율은 식 (2.1)을 $T_1, T_2, \ldots, T_{n-k+1}$에 대하여 기댓값을 취함으로써 다음

$$E\left[\Phi\left(T_1, T_2, \ldots, T_{n-k+1}\right)\right] \quad (2.2)$$

과 같이 구할 수 있다.

정리 2.1 시스템의 총 효율은

$$\begin{aligned} &E\left[\Phi\left(T_1, T_2, \ldots, T_{n-k+1}\right)\right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^{t_1} \phi_n(u)du f_{T_1}(t_1)dt_1 + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{t_2} \phi_{n-1}(u+t_1)du f_{(T_1,T_2)}(t_1,t_2)dt_1dt_2 + \cdots \\ &\quad + \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^{t_{n-k+1}} \phi_k\left(u + \sum_{j=1}^{n-k} t_j\right) du f_{(T_1,T_2,\ldots,T_{n-k+1})}(t_1,t_2,\ldots,t_{n-k+1})dt_1dt_2\cdots dt_{n-k+1} \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서,

$$f_{(T_1,T_2,\ldots,T_a)}(t_1,t_2,\ldots,t_a)$$
$$= \prod_{m=1}^{a}(n-m+1)\lambda\left(t+\sum_{j=1}^{m-1}t_j\right)\exp\left\{-(n-m+1)\int_0^t \lambda\left(s+\sum_{j=1}^{m-1}t_j\right)ds\right\}, \quad a=1,2,\ldots,n-k-1$$

이다.

증명: 식 (2.2)의 기댓값을 계산하기 위해서는 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$의 결합분포 분포를 구하면 충분하다. 우선 T_1의 분포를 고려하면, T_1은 n개의 부품 중에서 첫 번째 고장이 발생하기 까지 걸리는 시간에 해당되므로

$$T_1 = \min\{X_i(0), i \in I\}, \quad I = \{1,2,\ldots,n\}$$

으로 정의된다. 따라서, T_1의 생존함수는

$$\begin{aligned} S_{T_1}(t) =& P(\min\{X_i(0), i\in I\} > t)\\ =& P(\min\{X_1(0), X_2(0), \ldots, X_n(0)\} > t)\\ =& P(X_1(0)>t)\,P(X_2(0)>t)\cdots P(X_n(0)>t)\\ =& \left[\exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)ds\right\}\right]^n\\ =& \exp\left\{-n\int_0^t \lambda(s)ds\right\}\end{aligned}$$

로 주어지며, 이로부터 T_1의 확률밀도함수는

$$f_{T_1}(t) = -\frac{dS_{T_1}(t)}{dt} = n\lambda(t)\exp\left\{-n\int_0^t \lambda(s)ds\right\}$$

로 얻어짐을 알 수 있다. 이제 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$의 결합분포를 구하기 위해서, T_2의 조건부 분포 $T_2|T_1$를 구하여 이로부터 (T_1, T_2)의 결합분포를 구하고, 또 T_3의 조건부 분포 $T_3|(T_1, T_2)$를 구하여 이로부터 (T_1, T_2, T_3)의 결합분포를 구하는 등의 과정을 반복하게 된다. 이제 이러한 과정을 따르기 위해서는 첫 번째 고장부터 $a-1$번째 고장이 일어날 때까지 각각의 고장이 일어날 때 그 전 고장부터 걸린 시간이 $T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1}$으로 주어졌을 때, $a-1$번째 고장이 일어난 후 a번째 고장이 일어날 때까지 걸리는 시간 $T_a|(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1})$의 조건부 분포를 구하면 된다. 그런데 확률 변수 $T_a|(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1})$는 $a-1$번째 고장 발생시점부터 이 시점에서 작동하는 부품 중에서 가장 빨리 고장 나는 부품이 고장 날 때까지 걸린 시간을 의미한다. 즉, $n-a+1$개의 부품 중에서 $t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1}$ 시점에서의 잔여수명이 가장 짧은 부품의 잔여수명은

$$\begin{aligned}&T_a|(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1})\\ &= \min\{X_i(t_1+t_2+\cdots+t_{a-1}), i\in A(t_1+t_2+\cdots+t_{a-1})\}\end{aligned}$$

이다. 여기서 $A(t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1})$는 $t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1}$시점에 고장 나지 않고 작동하고 있는 $n-a+1$개의 부품 번호의 집합을 나타낸다. 따라서 $T_a|(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1})$의 생존함수는

$$\begin{aligned}&S_{T_a|(T_1,T_2,\ldots,T_{a-1})}(t|t_1,t_2,\ldots,t_{a-1})\\ &= P(\min\{X_i(t_1+t_2+\cdots+t_{a-1}), i\in A(t_1+t_2+\cdots+t_{a-1})\} > t)\end{aligned}$$

로 나타나며, 조건부 확률밀도함수는

$$\begin{aligned}
&f_{T_a|(T_1,T_2,\ldots,T_{a-1})}(t|t_1,t_2,\ldots,t_{a-1})\\
&= -\frac{d}{dt}S_{T_a|(T_1,T_2,\ldots,T_{a-1})}(t|t_1,t_2,\ldots,t_{a-1})\\
&= (n-a+1)\lambda\left(t+\sum_{j=1}^{a-1}t_j\right)\exp\left\{-(n-a+1)\int_0^t\lambda\left(s+\sum_{j=1}^{a-1}t_j\right)ds\right\}
\end{aligned}$$

로 주어짐을 알 수 있다. 따라서, 임의의 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$의 결합분포는

$$\begin{aligned}
&f_{(T_1,T_2,\ldots,T_a)}(t_1,t_2,\ldots,t_a)\\
&= \prod_{m=1}^{a} f_{T_m|(T_1,T_2,\ldots,T_{m-1})}(t|t_1,t_2,\ldots,t_{m-1})\\
&= \prod_{m=1}^{a}(n-m+1)\lambda\left(t+\sum_{j=1}^{m-1}t_j\right)\exp\left\{-(n-m+1)\int_0^t\lambda\left(s+\sum_{j=1}^{m-1}t_j\right)ds\right\}
\end{aligned}$$

로 주어진다. 이제 얻어진 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$의 결합분포를 식 (2.2)에 적용하면 정리의 결과를 얻을 수 있다. □

Remark 2.1: 정리 2.1에서 시스템의 각 상태에서의 효율 함수를 $\phi_m(t) \equiv 1$, $m = k, k+1, \ldots, n$로 두면, 시스템의 총 효율 $E[\Phi(T_1, T_2, \ldots, T_{n-k+1})]$는 시스템의 평균 수명이 됨을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서 다루는 시스템의 효율은 평균 수명의 일반화된 개념임을 알 수 있다.

3. 효율을 최대화하기 위한 수리시점

2장에서는 수리 불가능한 시스템의 총 효율을 산출하였다. 하지만 여러 부품으로 구성된 복잡한 시스템의 경우 고장이 발생하면 고장 난 부품을 수리하여 계속 사용하는 것이 일반적이다. 따라서 이 장에서는 수리 가능한 시스템을 고려하고 효율을 최대화하기 위한 수리시점을 찾아보고자 한다. 이러한 연구를 위하여, 비교적 간단한 경우로 한 번의 최소 수리를 실시하는 경우를 고려하도록 하자. 여기서 최소 수리란, 부품이 고장이 발생하는 즉시 고장이 난 부품을 고장이 발생하기 직전의 상태로 돌려주는 수리 방법으로, 수리 후 해당 부품의 고장률 함수가 수리 직전과 같아지는 수리 형태를 말한다. 즉, 생존함수(신뢰도함수) $\bar{F}(x)$를 갖는 부품이 x시점에 고장이 발생하여 최소 수리를 실시하는 경우, 수리 후 이 부품의 잔여 수명에 관한 생존함수는

$$\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)} = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(x+u)du\right\}, \quad t \ge 0$$

로 주어지게 된다 (Barlow와 Hunter, 1960). 따라서, 고장 난 부품에 대하여 즉시 최소 수리를 시행하면 시스템 내의 부품의 개수와 상태가 고장이 나기 직전과 같아지므로 시스템의 상태 역시 고장이 발생하기 직전의 상태로 유지된다. 그러므로 고장이 발생하기 직전의 시스템의 상태와 최소 수리를 시행한 후 시스템의 상태는 같다.

이제 이러한 최소 수리가 가능한 시스템의 총 효율을 산출하기 위하여, 시스템의 작동 시작부터 최종 고장 상태에 이르기까지 상태의 변화를 시간 축에 표시하면 다음 Figure 3.1과 같다. 최소 수리를 시행하는 시스템을 고려하는 경우 시간 구간이 증가하게 되는 것에 유의할 필요가 있다. Figure 3.1은 Figure 2.2와 달리 한 번의 최소 수리를 시행하기 때문에 시간 구간이 하나 증가한다.

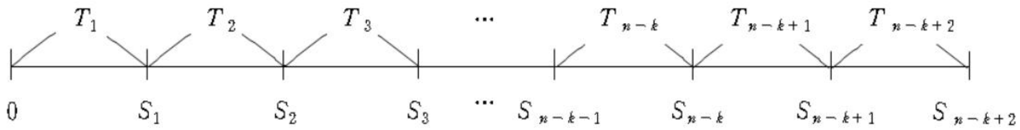

Figure 3.1. The time-line of multi-state k-out-of-n system under minimal repair

최소 수리를 시행할 경우 고장이 발생한 부품을 수리해 줌으로써 작동하는 부품의 개수가 다시 하나 증가하게 되므로 시스템의 상태는 고장이 발생하기 직전과 동일하게 되고, 시스템의 단위시간당 효율 역시 고장이 발생하기 직전과 동일하게 된다. 즉, 시스템은 마치 그 시점에서 고장이 나지 않은 것처럼 작동하는 것이다. 최소 수리를 시행할 경우 시스템의 상태가 부품 고장이 발생하기 직전의 상태가 유지된다는 점을 고려하여야 하므로, 첫 번째 고장이 일어난 이후의 효율을 얻는 방법은 최소 수리를 시행하지 않는 2장의 경우와 다르다. 이 경우 최소 수리를 시행하기 전과 후로 나누어서 효율을 구하여야 한다.

본 논문에서는 최소 수리가 l번째 $(l = 1, 2, \ldots, n-k+1)$ 고장이 일어난 시점에서 실시되는 모형을 가정하기로 한다. 고장 간격 시간들이 $T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{n-k+2} = t_{n-k+2}$로 주어져있을 때 시스템의 총 효율 함수를 $\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-k+2})$로 나타내자. 그러면, 각 상태에서의 효율 함수의 정의에 따라 총 효율함수는 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-k+2}) = \sum_{a=1}^{l} \int_0^{t_a} \phi_{n-a+1}\left(u + \sum_{j=1}^{a-1} t_j\right) du + \sum_{a=l+1}^{n-k+2} \int_0^{t_a} \phi_{n-a+2}\left(u + \sum_{j=1}^{a-1} t_j\right) du \quad (3.1)$$

단, $a = 1$일 때 $\sum_{j=1}^{a-1} t_j = 0$이다. 따라서 시스템의 총 효율은 식 (3.1)을 $T_1, T_2, \ldots, T_{n-k+2}$에 대하여 기댓값을 취함으로써 다음과 같이

$$E\left[\Phi\left(T_1, T_2, \ldots, T_{n-k+2}\right)\right] \quad (3.2)$$

구할 수 있다.

정리 3.1 시스템의 총 효율은

$$\begin{aligned} &E[\Phi(T_1, T_2, \ldots, T_{n-k+2})] \\ &= \sum_{a=1}^{l} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \int_0^{t_a} \phi_{n-a+1}\left(u + \sum_{j=1}^{a-1} t_j\right) du f_{(T_1, T_2, \ldots, T_a)}(t_1, t_2, \ldots, t_a) dt_1 \cdots dt_a \\ &\quad + \sum_{a=l+1}^{n-k+2} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \int_0^{t_a} \phi_{n-a+2}\left(u + \sum_{j=1}^{a-1} t_j\right) du f_{(T_1, T_2, \ldots, T_a)}(t_1, t_2, \ldots, t_a) dt_1 \cdots dt_a \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서,

$$\begin{aligned} &f_{(T_1, T_2, \ldots, T_a)}(t_1, t_2, \ldots, t_a) \\ &= \prod_{m=1}^{a} (n-m+1)\lambda\left(t + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) \exp\left\{-(n-m+1)\int_0^t \lambda\left(s + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) ds\right\}, \quad a \le l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f_{(T_1, T_2, \ldots, T_a)}(t_1, t_2, \ldots, t_a) \\ &= \prod_{m=1}^{l} (n-m+1)\lambda\left(t + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) \exp\left\{-(n-m+1)\int_0^t \lambda\left(s + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) ds\right\} \\ &\quad \times \prod_{m=l+1}^{a} (n-m+2)\lambda\left(t + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) \exp\left\{-(n-m+2)\int_0^t \lambda\left(s + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) ds\right\}, \quad a \ge l+1 \end{aligned}$$

이다.

증명: 식 (3.2)의 기댓값을 계산하기 위해서는 최소 수리가 발생하기 전 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$의 결합분포 f $(a \le l)$와 최소 수리가 발생한 후 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$의 결합분포 f $(a \ge l+1)$를 구하면 충분하다. 우선 T_1의 분포를 고려하면, T_1는 n개의 부품 중에서 첫 번째 고장이 발생하기 까지 걸리는 시간에 해당되므로 최소 수리 시행 유무와 관계가 없다. 따라서 정리 2.1의 증명에서 구한 T_1의 생존함수와 확률밀도함수와 동일하다. 다음으로 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$, $a \le l$의 결합분포 f는 l번째 고장이 일어나기 전의 결합확률분포로 수리 불가능한 시스템의 분포와 동일하므로 2장의 정리 2.1에 주어진 식과 동일함을 알 수 있다. 따라서 이제 l번째 고장이 일어난 후의 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$, $a \ge l+1$의 결합분포 f를 구하면 충분하다.

이제 l번째 고장이 일어난 후의 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$, $a \ge l+1$의 결합분포 f를 구하기 위해서, 정리 2.1의 증명에서와 같은 방법으로 T_2의 조건부 분포 $T_2|T_1$를 구하여 이로부터 (T_1, T_2)의 결합분포를 구하고, 또 T_3의 조건부 분포 $T_3|(T_1, T_2)$를 구하여 이로부터 (T_1, T_2, T_3)의 결합분포를 구하는 등의 과정을 반복하게 된다. 이제 이러한 과정을 따르기 위해서는 첫 번째 고장부터 $a-1$번째 고장이 일어날 때까지 각각의 고장이 일어날 때까지 걸린 시간이 $T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1}$으로 주어졌을 때, $a-1$번째 고장이 일어난 후 a번째 고장이 일어날 때까지 걸리는 시간 $T_a|(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1})$의 조건부 분포를 구하면 된다. 그런데 확률 변수 $T_a|(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1})$는 $a-1$번째 고장 발생시점부터 이 시점에서 작동하는 부품 중에서 가장 빨리 고장 나는 부품이 고장 날 때까지 걸린 시간을 나타낸다. 즉, $a-1$번째 고장시점 $(t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1}$시점) 이전에 최소 수리가 실시되고, 따라서 $a-1$번째 고장 발생시점에는 $n-a+2$개의 부품이 작동하고 있으며, $n-a+2$개의 부품 중에서 $t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1}$시점에서의 잔여수명이 가장 짧은 부품의 잔여수명으로,

$$
\begin{aligned}
&T_a|(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1}) \\
&= \min\{X_i(t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1}), i \in B(t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1})\}
\end{aligned}
$$

으로 주어진다. 여기서 $B(t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1})$는 $t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1}$ 시점에 고장 나지 않고 작동하고 있는 $n-a+2$개의 부품 번호의 집합을 나타낸다. 따라서 $T_a|(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_{a-1} = t_{a-1})$의 생존함수는

$$
\begin{aligned}
&S_{T_a|(T_1, T_2, \ldots, T_{a-1})}(t|t_1, t_2, \ldots, t_{a-1}) \\
&= P\left(\min\{X_i\left(t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1}\right), i \in B\left(t_1 + t_2 + \cdots + t_{a-1}\right)\} > t\right) \\
&= \left[\exp\left\{-\int_0^t \lambda\left(s + \sum_{j=1}^{a-1} t_j\right) ds\right\}\right]^{n-a+2} \\
&= \exp\left\{-(n-a+2)\int_0^t \lambda\left(s + \sum_{j=1}^{a-1} t_j\right) ds\right\}
\end{aligned}
$$

로 주어지며, 조건부 확률밀도함수는

$$
\begin{aligned}
&f_{T_a|(T_1, T_2, \ldots, T_{a-1})}(t|t_1, t_2, \ldots, t_{a-1}) \\
&= -\frac{d}{dt} S_{T_a|(T_1, T_2, \ldots, T_{a-1})}(t|t_1, t_2, \ldots, t_{a-1}) \\
&= (n-a+2)\lambda\left(t + \sum_{j=1}^{a-1} t_j\right) \exp\left\{-(n-a+2)\int_0^t \lambda\left(s + \sum_{j=1}^{a-1} t_j\right) ds\right\}
\end{aligned}
$$

로 주어짐을 알 수 있다. 따라서, $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$, $a \geq l+1$의 결합분포 f는

$$
\begin{aligned}
&f_{(T_1,T_2,\ldots,T_a)}(t_1, t_2, \ldots, t_a) \\
&= f_{(T_1,T_2,\ldots,T_l)}(t_1, t_2, \ldots, t_l) \times \prod_{m=l+1}^{a} f_{T_m|(T_1,T_2,\ldots,T_{m-1})}(t|t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}) \\
&= \prod_{m=1}^{l} (n-m+1)\lambda\left(t + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) \exp\left\{-(n-m+1)\int_0^t \lambda\left(s + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) ds\right\} \\
&\quad \times \prod_{m=l+1}^{a} (n-m+2)\lambda\left(t + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) \exp\left\{-(n-m+2)\int_0^t \lambda\left(s + \sum_{j=1}^{m-1} t_j\right) ds\right\}, \quad a \geq l+1
\end{aligned}
$$

이다. 이제 얻어진 $(T_1, T_2, \ldots, T_a)$의 결합분포를 식 (3.2)에 적용하면 정리의 결과를 얻는다. □

4. 예제: 다상태 1-out-of-4 시스템과 다상태 2-out-of-5 시스템

이 장에서는 다상태 1-out-of-4 시스템과 다상태 2-out-of-5 시스템을 가정하고, 몇 번째 고장에서 최소 수리를 시행하는 것이 효율을 가장 크게 만들 수 있는지 알아보기 위하여 2장과 3장에서 얻어진 결과를 적용하여 시스템 총 효율을 산출하고자 한다.

수리 불가능한 시스템의 총 효율을 산출하였고, 수리 가능한 시스템의 경우에는 최소 수리 시점을 변화시켜가면서 시스템의 총 효율을 산출하였다. 이때 수리 가능한 시스템의 경우 고장률 함수의 형태에 따라 시스템의 총 효율을 최대화시키는 최소 수리 시점이 변화하는가를 알아보기 위하여 고장률 함수를 증가, 일정, 감소하는 경우를 모두 고려하였다. 고장률 함수가 증가하는 경우는 $\lambda(t) = t + 1$, 일정한 경우는 $\lambda(t) = 1$, 감소하는 경우는 $\lambda(t) = 0.8t^{-0.2}$로 가정하였다. 또한, 이 장에서는 비교적 간단한 형태의 효율함수로서 $\phi_5(t) = e^{-t}$, $\phi_4(t) = e^{-2t}$, $\phi_3(t) = e^{-3t}$, $\phi_2(t) = e^{-4t}$를 가정하였다. 하지만, 일반적으로 상태가 감소하고 작동시간이 증가함에 따라 감소하는 조건을 만족하는 함수는 효율함수로 고려될 수 있다.

예제 4.1: 다상태 1-out-of-4 시스템

1-out-of-4 시스템의 상태는 앞에서 정의했듯이

$$
\begin{cases}
4, & 4\text{개의 부품이 모두 작동하는 경우,} \\
3, & 3\text{개의 부품이 작동하는 경우,} \\
2, & 2\text{개의 부품이 작동하는 경우,} \\
1, & 1\text{개의 부품이 작동하는 경우,} \\
0, & 1\text{개 미만의 부품이 작동하는 경우}
\end{cases}
$$

로 나타낼 수 있다. 따라서 한 번의 최소 수리가 가능한 시점은 첫 번째 고장이 일어난 시점, 2번째 고장이 일어난 시점, 3번째 고장이 일어난 시점, 그리고 마지막으로 4번째 고장이 일어난 시점까지 총 4가지가 존재한다.

수리 불가능한 시스템과 한 번의 최소 수리를 시행하는 시스템에 대하여 시스템 총 효율을 산출한 결과를 고장률 함수가 증가하는 경우는 Table 4.1, 일정한 경우는 Table 4.2, 감소하는 경우는 Table 4.3에 정리하였다.

Table 4.1, Table 4.2, Table 4.3에서 알 수 있듯이, 고장률 함수가 증가, 일정, 감소하는 경우 모두 최소 수리를 첫 번째 고장에서 시행했을 때 시스템의 총 효율이 가장 높은 것을 알 수 있다.

Table 4.1. The total efficiency of Multi-state 1-out-of-4 system with $\lambda(t) = t + 1$

	The total system efficiency
Non repair	0.366638
Minimal repair at 1^{st} failure	**0.434355**
Minimal repair at 2^{nd} failure	0.408205
Minimal repair at 3^{rd} failure	0.385981
Minimal repair at 4^{th} failure	0.364935

Table 4.2. The total efficiency of Multi-state 1-out-of-4 system with $\lambda(t) = 1$

	The total system efficiency
Non repair	0.404762
Minimal repair at 1^{st} failure	**0.488685**
Minimal repair at 2^{nd} failure	0.448027
Minimal repair at 3^{rd} failure	0.418095
Minimal repair at 4^{th} failure	0.407619

Table 4.3. The total efficiency of Multi-state 1-out-of-4 system with $\lambda(t) = 0.8t^{-0.2}$

	The total system efficiency
Non repair	0.387869
Minimal repair at 1^{st} failure	**0.473102**
Minimal repair at 2^{nd} failure	0.435936
Minimal repair at 3^{rd} failure	0.403329
Minimal repair at 4^{th} failure	0.391475

이 결과로부터, 위에서 도입한 작동 시간에 따라 감소하고, 시스템의 상태에 따라 증가하는 효율 함수 하에서는 가장 많은 부품이 작동할 때 시스템이 가장 높은 효율함수를 갖는다는 점을 고려하면, 시스템의 총 효율을 최대화하기 위해서는 시스템에서 첫 번째 고장시점에서 수리를 실시하는 것이 합리적이라는 것을 알 수 있다.

예제 4.2: 다상태 2-out-of-5 시스템

2-out-of-5 시스템의 상태는

$$\begin{cases} 5, & 5\text{개의 부품이 모두 작동하는 경우}, \\ 4, & 4\text{개의 부품이 작동하는 경우}, \\ 3, & 3\text{개의 부품이 작동하는 경우}, \\ 2, & 2\text{개의 부품이 작동하는 경우}, \\ 0, & 2\text{개 미만의 부품이 작동하는 경우} \end{cases}$$

로 나타낼 수 있다. 따라서 한 번의 최소 수리가 가능한 시점은 첫 번째 고장이 일어난 시점, 2번째 고장이 일어난 시점, 3번째 고장이 일어난 시점, 그리고 마지막으로 4번째 고장이 일어난 시점까지 총 4가지가 존재한다.

수리 불가능한 시스템과 한 번의 최소 수리를 시행하는 시스템에 대하여 시스템 총 효율을 산출한 결과를 고장률 함수가 증가하는 경우는 Table 4.4, 일정한 경우는 Table 4.5, 감소하는 경우는 Table 4.6에 정리하였다.

Table 4.4, Table 4.5, Table 4.6에서 알 수 있듯이, 다상태 2-out-of-5 시스템 역시 예제 4.1의 다상태

Table 4.4. The total efficiency of Multi-state 2-out-of-5 system with $\lambda(t) = t + 1$

	The total system efficiency
Non repair	0.33365
Minimal repair at 1^{st} failure	**0.39151**
Minimal repair at 2^{nd} failure	0.37176
Minimal repair at 3^{rd} failure	0.35338
Minimal repair at 4^{th} failure	0.34298

Table 4.5. The total efficiency of Multi-state 2-out-of-5 system with $\lambda(t) = 1$

	The total system efficiency
Non repair	0.36508
Minimal repair at 1^{st} failure	**0.43882**
Minimal repair at 2^{nd} failure	0.40901
Minimal repair at 3^{rd} failure	0.38350
Minimal repair at 4^{th} failure	0.37169

Table 4.6. The total efficiency of Multi-state 2-out-of-5 system with $\lambda(t) = 0.8t^{-0.2}$

	The total system efficiency
Non repair	0.21741
Minimal repair at 1^{st} failure	**0.41793**
Minimal repair at 2^{nd} failure	0.39317
Minimal repair at 3^{rd} failure	0.36683
Minimal repair at 4^{th} failure	0.35329

1-out-of-4 시스템과 같이 고장률 함수가 증가, 일정, 감소하는 경우 모두 최소 수리를 첫 번째 고장에서 시행했을 때 시스템의 총 효율이 가장 높은 것을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 k-out-of-n 시스템에서 작동하는 부품의 개수에 따라 시스템의 효율이 다르게 나타날 수 있는 경우를 고려하고, 다상태 k-out-of-n 시스템의 총 효율을 산출하였다. 또한 수리 가능한 시스템의 경우, 한 번의 최소 수리를 가정하여 시스템의 총 효율을 최대화 시킬 수 있는 수리 시점을 찾아보았다. 또한 2-out-of-5 시스템을 고려하고, 얻어진 연구 결과를 적용하여 보았다. 이러한 연구로부터 작동 시간에 따라 감소하고, 시스템의 상태에 따라 증가하는 효율 함수 하에서는 시스템의 총 효율을 최대화하기 위해서는 첫 번째 고장에서 최소 수리를 시행하는 것이 적절하였다.

본 논문에서는 시스템의 상태가 고장과 작동으로만 구분되어지는 시스템에 관한 연구를 확장하여, 고장 부품의 개수에 따라 시스템의 상태를 단계적으로 구분하고, 상태에 따른 시스템의 효율함수를 고려하여 보다 현실에 부합하는 연구를 수행하였다. 향후 연구에서는 이러한 시스템에 대한 보다 다양한 보전 정책 등을 고려한 연구를 수행할 수 있을 것으로 생각된다.

References

Barlow, R. E. and Hunter, L. C. (1960). Optimal preventive maintenance policies, *Operations Research*, **8**, 90–100.

Leemis, L. M. (1995). *Reliability: Probabilistic Models and Statistical Methods*, Prentice-Hall, New Jersey.

Lisnianski, A. and Levitin, G. (2003). *Multi-State System Reliability: Assessment, Optimization, and Applications*, World Scientific, New Jersey.

Rausand, M. and Hoyland, A. (2004). *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications*, 2nd ed. Wiley-Interscience, New York.

Seo, S. K., Kim, H. K., Kwon, H. M., Cha, M. S., Yun, W. Y. and Cha, J. H. (2010). *Reliability Engineering*, Kyobo Book Centre, Seoul.

다상태 k-out-of-n 시스템의 효율에 관한 연구

김지현[a] · 남해별[a] · 차지환[a,1]

[a]이화여자대학교 통계학과

(2012년 11월 23일 접수, 2012년 12월 23일 수정, 2013년 1월 14일 채택)

요 약

시스템을 구성하고 있는 n개의 부품 중 적어도 k개의 부품이 제대로 작동하면 정상적으로 작동하는 시스템을 k-out-of-n 시스템이라 한다. 기존의 k-out-of-n 시스템에 관한 대부분의 연구에서는 단지 시스템의 작동여부에만 관심을 갖고 시스템의 신뢰도를 산출하는 문제를 주로 다루었다. 하지만 시스템이 작동할 때 작동하는 부품의 개수에 따라 시스템의 효율이 달라질 수 있으므로, 본 논문에서는 다상태 k-out-of-n 시스템을 고려하고 시스템의 총 효율을 산출하는 연구를 수행한다. 또한 시스템이 수리 가능할 경우, 시스템의 총 효율을 최대화 시킬 수 있는 수리 시점을 찾아보기로 한다. 이러한 시스템의 효율은 기존의 평균수명을 일반화한 형태가 됨을 보일 수 있다. 따라서 본 연구에서 다루는 모형은 기존의 모형을 보다 일반적인 경우로 확장한 모형이라 할 수 있다.

주요용어: 다상태 k-out-of-n 시스템, 시스템 효율, 효율 함수, 최소 수리.

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2011-0017338).

[1]교신저자: (120-750) 서울시 서대문구 대현동 11-1, 이화여자대학교 통계학과, 교수.
E-mail: jhcha@ewha.ac.kr