

# 헤비사이드 강화를 이용한 구조물의 아이소-지오메트릭 위상 최적설계

안 승 호 · 조 선 호<sup>†</sup>

서울대학교 조선해양공학과/해양시스템공학연구소

## Isogeometric Topological Shape Optimization of Structures using Heaviside Enrichment

Seung-Ho Ahn and Seonho Cho<sup>†</sup>

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering/RIMSE, Seoul National University, Seoul, 151-744, Republic of Korea

### Abstract

An isogeometric topological shape optimization method is developed using the level sets and Heaviside enrichments. In the level set method, the initial domain is kept fixed and its boundary is represented by an implicit moving boundary embedded in the level set functions, which facilitates to handle complicated topological shape changes. The Heaviside enrichment improves the isogeometric analysis by adding some enrichment functions to model the internal boundaries. The proposed topological shape optimization method has several benefits: exact geometric models can be obtained using the isogeometric approach and the limitation of tensor-product patches can be overcome using the Heaviside enrichments to represent the internal voids. Even in a single patch, discontinuous displacement fields as well as smooth stress field can be obtained. Since the level sets offer the implicit moving boundary inside the domain, it is easy to represent the topological shape variations in the isogeometric analysis using Heaviside enrichments.

**Keywords** : topological shape optimization, heaviside enrichment, isogeometric analysis, NURBS

### 1. 서 론

아이소-지오메트릭 해석법은 2003년에 처음으로 제안된 (Cho *et al.*, 2003; Roh *et al.*, 2004; 2005) 이후로 발전하여 2005년에 정립되었다(Hughes *et al.*, 2005). 아이소-지오메트릭 해석법은 기하형상을 표현하기 위해 이용되는 CAD의 NURBS(Non-Uniform Rational B-spline)를 해석에 필요한 기저함수로 직접 사용함으로써 요소망의 구성에 따른 형상의 근사화를 방지할 수 있다. 또한 고차의 기저함수를 쉽게 사용할 수 있기 때문에 범선벡터, 곡률 등을 정확하게 계산할 수 있어 높은 정밀도의 설계 민감도를 얻을 수 있음을 이용하여 아이소-지오메트릭 해석법을 이용한 형상 최적설계 기법이 개발되기도 하였다(Cho *et al.*, 2008). 그러나 아이소-지오메트릭 해석법은 텐서 곱으로 구성되는 패

치의 한계로 인하여 복잡한 형상을 표현하기 위해서는 일반적으로 많은 수의 패치를 필요로 하기 때문에 위상 변화를 표현하기가 매우 어려운 단점이 있다. 한편, 확장 유한요소법(XFEM)에서는 불연속 변위장을 헤비사이드 강화(Heaviside Enrichment) 함수를 이용하여 쉽게 모델링할 수 있는 방법이 개발되었다(Sukumara *et al.*, 2001). 본 논문에서는 헤비사이드 강화를 이용하여 아이소-지오메트릭 기법의 텐서 곱으로 인한 한계를 극복하고자 하였다. 또한 레벨셋 방법론이 암시적 동적 경계를 잘 표현할 수 있으므로 해밀턴-자코비 방정식을 풀어 레벨셋 함수값을 변경함으로써 아이소-지오메트릭 해석법에서 위상적 경계의 변화를 표현할 수 있도록 하였다. 본 연구에서는 헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭 해석법을 개발하여 빈 공간이 있는 모델 등에 대해 해석의 정확도를 검토하였다. 또한 레벨셋 방법의 해밀

<sup>†</sup> Corresponding author:

Tel: +82-2-880-7322; E-mail: secho@snu.ac.kr  
Received January 4 2013; Revised January 8 2013;  
Accepted February 1 2013

©2013 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

턴-자코비 방정식을 통한 위상적 변화를 아이소-지오메트릭 기법으로 표현함으로써 새로운 위상 최적설계 방법으로 사용될 수 있음을 확인하였다.

## 2. 헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭 해석법

### 2.1 NURBS 기저함수

1차원 노트 벡터는 식 (1)과 같이 정의된다.

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l+p+1}\} \quad (1)$$

여기서,  $l$ 은 기저함수의 개수이고,  $p$ 는 기저함수의 차수이다. 즉, 차수가  $p$ 인 기저함수가  $l$ 개 사용되면, 총  $l+p+1$ 개의 노트 값이 사용된다. 또한 기저함수는 다음 식 (2)~(3)과 같이 재귀적으로 쉽게 구할 수 있다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), p = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

NURBS 기저함수는 다음과 같은 중요한 성질을 가진다.

- a.  $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$  (partition of unity)
- b.  $N_{i,p}(\xi)$  is contained in the interval  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$  (compact support)
- c.  $N_{i,p}(\xi) \geq 0$  (non-negativity)

NURBS 기저함수를 사용한 식 (5)의 유리 기저함수 (rational basis function)  $R_{i,p}(\xi)$ 와 조정점(control point)  $B_i$ 의 선형결합(linear combination)으로 식 (4)와 같은 NURBS 곡선을 얻을 수 있다.

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) B_i \quad (4)$$

$$R_{i,p}(\xi) = N_{i,p}(\xi) w_i / \sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi) w_j \quad (5)$$

앞서 정의한 NURBS 곡선을 바탕으로 식 (6)의 텐서 곱으로써 NURBS 평면을 정의할 수 있다. 노트 벡터는 각각

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l+p+1}\}$ ,  $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{l+p+1}\}$ 이다.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,p}(\xi) L_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (6)$$

여기서,  $R_{i,p}(\xi)$ 과  $L_{j,q}(\eta)$ 은 각각  $\xi, \eta$  방향으로의 유리 기저함수이다.

### 2.2 헤비사이드 강화를 이용한 정식화

헤비사이드 강화는 기존의 기저함수에 내부 경계를 표현하는 강화함수를 추가적으로 고려하여 불연속적인 변위장을 표현하고 해석의 정밀도를 향상시킨다. 기존의 유한요소법에서는 불연속적인 변위장을 표현하기 위해서 모델의 모서리가 불연속 경계와 반드시 일치해야 하는 어려움이 있었으나 헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭 해석법에서는 내부 경계와 모델의 모서리가 일치할 필요가 없이 암시적으로 표현이 가능하다. 이는 임의의 위상 변화가 단일 패치로 표현되므로 위상 최적설계에 활용하기가 용이하다.

기존의 아이소-지오메트릭 해석법은 헤비사이드 강화를 고려하여 다음과 같이 변분 방정식으로 정식화할 수 있다.

$$a(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = l(\bar{\mathbf{y}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} = \sum_I^{CP} N_I(\xi) \bar{y}_I + \sum_J^{ECP} N_J(\xi) \bar{\mathbf{a}}_J \quad (7)$$

여기서,  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{a}$

$$a(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \int_{\Omega} \sum_{I,K}^{CP} C_{ijkl} N_{I,j} N_{K,l} \bar{y}_{iI} \bar{y}_{kK} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{I,K}^{ECP} C_{ijkl} (NH)_{I,j} (NH)_{K,l} \bar{a}_{iI} \bar{a}_{kK} d\Omega$$

그리고

$$l(\bar{\mathbf{y}}) = \int_{\Gamma^N} \sum_I^{CP} T_i \tilde{N}_I \bar{y}_{iI} d\Gamma + \int_{\Gamma^N} \sum_I^{ECP} T_i (\tilde{NH})_{iI} \bar{a}_{iI} d\Gamma \quad (8)$$

여기서, 각각 CP는 조정점, ECP는 확장된 조정점의 개수이다.  $\tilde{N}$ 는 경계 적분을 위한 수정된 NURBS 기저함수이다. 강화함수(Enrichment function)는 NURBS 기저함수와 헤비사이드함수의 곱으로 구성된다. 적분 지점이 빈 공간의 안쪽이면  $H(\mathbf{x})=1$ , 바깥쪽이면  $H(\mathbf{x})=0$ 의 값을 갖게 된다. 특히, 헤비사이드 함수값으로서 극소의 값을 사용하지 않아도 강성행렬의 특이점(Singularity)문제가 발생하지 않는다. 다만, 삼각형으로 잘린 요소의 크기가 매우 작을 경우 강성행렬이 불량조건(ill-conditioned)이 될 수 있으므로 주의해

야 한다. 헤비사이드 함수를 정의할 때 레벨셋 함수를 활용하면 편리할 뿐 아니라 이를 해밀턴-자코비 방정식을 이용하여 변경하여 줌으로써 위상 최적설계에 활용할 수 있다.

### 3. 아이소-지오메트릭 해석으로의 적용

#### 3.1 아이소-지오메트릭 해석에서 강화 조정점 결정 방법

강화 조정점을 결정할 때 중요한 점은 강화 조정점에 대응되는 각 형상함수의 합이 1이 되는 성질을 만족해야 한다는 것이다(Partition of unity). 1차 형상함수를 사용한다면 불연속면이 지나가는 요소에 인접한 조정점을 강화시키면 되지만 고차 형상함수를 사용함에 따라 인접한 조정점만으로는 불충분할 뿐 아니라 조정점이 형상함수와 무관하게 정의되기 때문에 강화 조정점을 결정할 때 주의하여야 한다. 아이소-지오메트릭 해석법에서 강화 조정점을 결정하는 방법은 Fig. 1에 설명되어 있다.

각각의 조정점으로부터 매개화 공간에 기저함수가 0이 아닌 값을 갖는 영역을 Fig. 1(b)와 같이 나타낼 수 있다. 또한 이로부터 기저함수값과 조정점의 선형 결합에 의해 Fig. 1(c)와 같은 물리적 공간에 해당되는 영역을 표현할 수 있다. 내부 빈 공간의 경계에 물리적 공간에서 표현된 영역이 포함된다면 그 조정점은 강화 조정점으로 간주한다. 예를 들어 Fig. 1에서 조정점 A의 물리적 공간에서의 영역에 내부 빈 공간의 경계가 포함되므로 강화 조정점으로 결정할 수 있으며, 조정점 B는 내부 빈 공간의 경계가 포함되지 않으므로 강화 조정점으로 결정하지 않는다. 이와 같은 식으로 아이소-지오메트릭 해석법의 경우에도 모든 지점에서 형상함수의

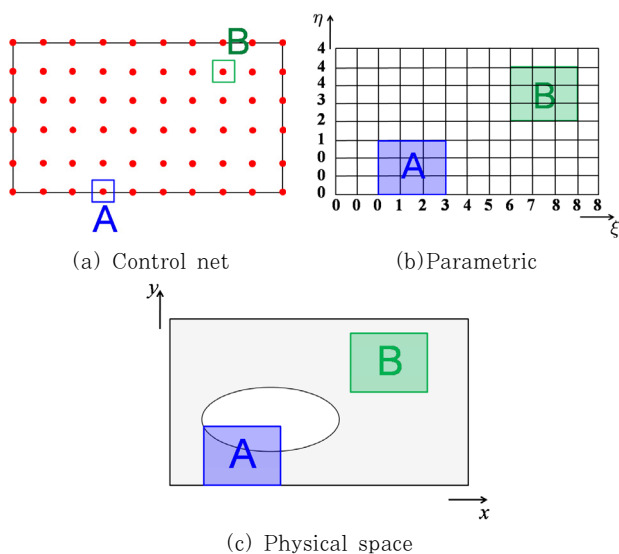


Fig. 1 Enrichment scheme in isogeometric analysis

합이 1이 되는 성질을 만족시킬 수 있게 된다. 차수가 올라감에 따라 강화 조정점의 개수가 추가되어 계산 시간이 증가하는 단점은 있으나, 단일 패치를 사용하여 다양한 위상을 표현할 수 있는 큰 이점이 있다.

#### 3.2 수치적 적분 방법

요소가 불연속을 포함할 경우에는 기존의 가우스 적분법 (Gauss quadrature rule)을 사용해서 정확하게 적분하는데 한계가 있다. 따라서 수정된 적분 방법을 사용해야 하며 불연속을 포함하는 요소를 기존의 가우스 적분법을 적용할 수 있도록 부분 삼각형으로 분할한다. 이와 같은 적분법은 총 적분 지점의 수는 증가시키지만 전체 자유도 수를 증가시키지는 않는 특징이 있다.

아이소-지오메트릭 해석에서 수치적 적분은 매개화 공간에서 이루어진다. 매개화 공간의 요소를 구성하는 각각의 노트 값에 부호를 고려한 거리로써 레벨셋 함수값을 정의할 수 있으며 요소를 분할하기 위하여 두 개의 교차점이 필요하다. 이 교차점  $x_I$ 는 두 개의 노트 A, B의 위치와 레벨셋 함수값으로 결정된다. 이 관계식은 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$x_I = x_A + \xi(x_B - x_A), \quad \xi = -\frac{\phi_A}{\phi_B - \phi_A} \quad (9)$$

Fig. 2에서  $\xi-\eta$  좌표계는 매개화 공간을 의미하고,  $x-y$  좌표계는 물리적 공간을 의미한다.  $s-t$ 좌표계에서 각 요소마다 13개의 가우스 적분점을 이용한다.

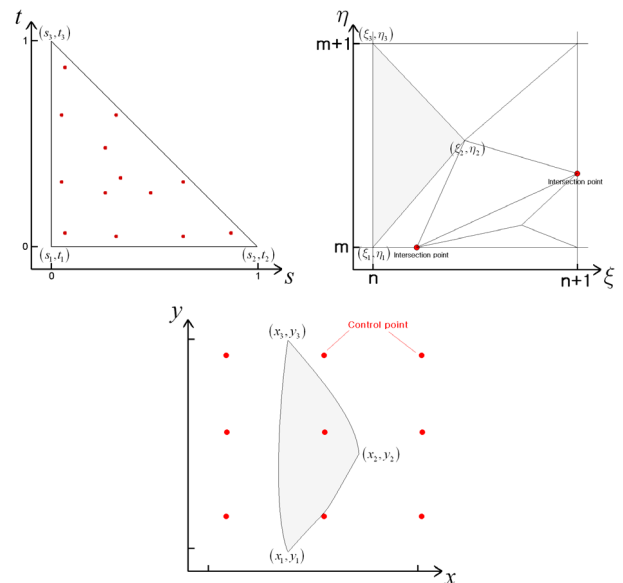


Fig. 2 Transformation of triangular cell

적분점이 증가함에 따라 계산 시간이 다소 증가하기는 하나, 단일 패치에서 위상 변화를 표현할 수 있는 효율성을 생각하면 무시할 만한 수준이다.  $s-t$  좌표계와  $\xi-\eta$  좌표계 간의 변환 관계는 다음의 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi &= (1-s-t)\xi_1 + (s)\xi_2 + (t)\xi_3 \\ \eta &= (1-s-t)\eta_1 + (s)\eta_2 + (t)\eta_3 \end{aligned} \quad (10)$$

$\xi-\eta$  좌표계에서 삼각형이 직선일지라도,  $x-y$  좌표계에서의 삼각형은 조정점의 차수와 위치에 따라서 곡선의 형태를 가질 수 있다. 물론, 강화 조정점을 사용하지 않고 삼각요소만 사용하더라도 어느 정도의 정확한 해석 결과를 얻을 수는 있다. 그러나 강성행렬의 특이점 문제를 피하기 위하여 빈 공간에 해당하는 요소에 매우 작은 값을 곱해야 할 뿐 아니라, 불연속적인 변위장을 얻을 수도 없다. 특히, 불연속 경계 주변의 정확한 해를 얻기 위하여 강화 조정점의 사용은 반드시 필요하다. 즉, 신뢰할 만한 해석 결과를 얻기 위하여 삼각 요소 뿐 아니라 강화 조정점을 사용해야 한다.

#### 4. 레벨셋 기반 아이소-지오메트릭 위상 최적설계

불연속적인 변위장이 레벨셋 함수와 헤비사이드 강화를 활용하여 정확하게 표현될 수 있음을 확인하였다. 위상 변화는 해밀턴-자코비 방정식을 풀어서 레벨셋 함수값을 변경함으로써 나타낼 수 있다. 레벨셋 기법을 기반으로 위상 최적설계가 정식화되었으며 해밀턴-자코비 방정식을 풀기 위한 위상적 설계영역(Topological design domain)의 설정을 소개하였다.

##### 4.1 애조인(Adjoint) 설계 민감도 해석

컴플라이언스(Compliance) 범함수(Functional)에 대하여 식 (11)과 같은 라그랑지안(Lagrangian)을 생각해 보자.

$$\begin{aligned} L_\phi(\mathbf{z}, \lambda) &= \int_{\Omega_t} H(\phi) \mathbf{b} \mathbf{z} d\Omega + \int_{\Omega_t} \delta(\phi) |\nabla \phi| \mathbf{t} \mathbf{z} d\Omega \\ &+ l_\phi(\lambda) - a_\phi(\mathbf{z}, \lambda) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,  $\lambda$ 는 애조인 방정식의 해이다. 식 (11)에서 정의한 라그랑지안에 형상 미분을 취하고 각 항들을 정리하면 식 (12)를 얻는다.

$$L'_\phi(\mathbf{z}, \lambda) = \int_{\Omega_t} \left\{ \delta(\phi) \mathbf{b}(\mathbf{z} + \lambda) - \gamma \nabla \mathbf{z} \cdot \nabla \lambda \right\} \varphi d\Omega + \Pi(\mathbf{z}, \lambda) \quad (12)$$

여기서,

$$\Pi(\mathbf{z}, \lambda) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_d \\ \nabla \mathbf{t}(\mathbf{z} + \lambda) \cdot \mathbf{n} + \kappa \mathbf{t}(\mathbf{z} + \lambda) & \mathbf{x} \in \Gamma_t \end{cases} \quad (13)$$

#### 4.2 위상 최적설계 정식화

주어진 위상 최적설계 문제의 목표는 허용 질량을 넘지 않는 선에서 컴플라이언스를 최소화하는 부재의 배치를 찾는 것이다. 위상 최적 설계 문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } \psi(\mathbf{z}) &= \int_{\Omega_t} H(\phi) \mathbf{b} \mathbf{z} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_t} \delta(\phi) |\nabla \phi| \mathbf{t} \mathbf{z} d\Omega = l_\phi(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{Subject to } V = \int_{\Omega_t} H(\phi) d\Omega \leq V_{\max} \quad (15)$$

여기서,  $V_{\max}$ 는 허용 부피이다. 제약 조건이 있는 최적설계 문제를 풀기 위하여 다음의 라그랑지안  $\Lambda$ 를 고려한다.

$$\Lambda(\mu, s) = \psi + \mu(m + s^2 - V_{\max}) \quad (16)$$

여기서,  $\mu$ 는 라그랑지 승수이고,  $s$ 는 여유변수(Slack variable)이다. 식 (16)에 쿤-터커(Kuhn-Tucker) 최적 조건을 적용하면 식 (17)을 얻는다.

$$\Lambda' = \int_{\Omega_t} \delta(\phi) \left\{ \mathbf{b}(\mathbf{z} + \lambda) - \gamma \nabla \mathbf{z} \cdot \nabla \lambda \right\} \varphi d\Omega + \Pi(\mathbf{z}, \lambda) + \xi = 0 \quad (17)$$

여기서,

$$\xi = - \frac{\int_{\Omega_t} \delta(\phi) \{ \mathbf{b}(\mathbf{z} + \lambda) - \gamma \nabla \mathbf{z} \cdot \nabla \lambda + \Pi(\mathbf{z}, \lambda) \} d\Omega}{\int_{\Omega_t} \delta(\phi) d\Omega} \quad (18)$$

식 (16)에서 정의한 라그랑지안이 감소하는 방향으로 속도장(Velocity field)를 정해야 하는데, 이를 위해 식 (19)와 같은 테일러 급수 전개를 고려한다.

$$\Lambda(\Omega_\tau) = \Lambda(\Omega) + \Lambda'(V_n) \tau + \mathcal{O}(\tau^2) + \dots \quad (19)$$

경계의 변형(Boundary variation)을 나타내기 위해 법선 속도(Normal velocity)를  $\varphi = V_n$ 과 같이 취하여 식 (17)을 다음 식 (20)으로 정리할 수 있다.

$$A' = \int_{\Omega_t} \frac{\delta(\phi)}{\{b(\mathbf{z}+\lambda) - \gamma \nabla \mathbf{z} \cdot \nabla \lambda + \Pi(\mathbf{z}, \lambda) + \xi\}} V_n d\Omega = 0 \quad (20)$$

법선 속도를 식 (21)과 같이 설정하면,

$$V_n = -\{b(\mathbf{z}+\lambda) - \gamma \nabla \mathbf{z} \cdot \nabla \lambda + \Pi(\mathbf{z}, \lambda) + \xi\} \quad (21)$$

식 (20)을 다음과 같이 식 (22)처럼 쓸 수 있다.

$$A(\Omega_\tau) = A(\Omega) - \tau \int_{\Omega_t} \delta(\phi) V_n^2 d\Omega + \mathcal{O}(\tau^2) + \dots \quad (22)$$

식 (22)로부터 법선 속도를 식 (21)과 같이 설정하였을 때 라그랑지안이 감소하는 방향으로 정식화를 할 수 있다.

### 4.3 아이소-지오메트릭 해석에서의 위상적 설계영역

유한요소를 기반으로 한 헤비사이드 강화에서는 요소를 정의하는 각 노드에 부호를 고려한 거리로 레벨셋 함수 값을 정의한다. 그러나 아이소-지오메트릭 해석에서는 노드에 대응하는 조정점이 실제 기하형상 위에 존재하지 않기 때문에 조정점으로부터의 부호를 고려한 거리로써 레벨셋 함수를 정의하는 것은 부적합하다. 따라서 Fig. 3의 노트 강화에 의해 구성되는 각 노드에 부호를 고려한 거리로써 레벨셋 함수값을 정의하고, 해당 공간을 위상적 설계영역으로 정의한다. 이 영역에서 해밀턴-자코비 방정식을 풀어냄으로써 레벨셋 함수값을 변경시킬 수 있다. 또한 이 영역은 조정점의 위치가 변하더라도 항상 일정하게 유지되기 때문에 위상적 설계 영역으로써 이점을 갖는다.

한편, 아이소-지오메트릭 해석에서는 매개화 공간과 물리적 공간이 일치하지 않는데, 해석은 물리적 공간을 고려하여 이루어진다. 따라서 해밀턴-자코비 방정식을 풀기 위하여 필요한 속도장 또한 설계민감도를 기반으로 하여 계산되기 때

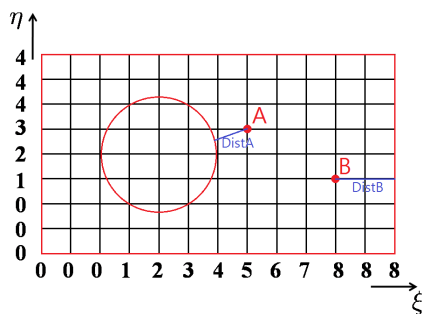


Fig. 3 Definition of signed distance function in parametric space

문에 물리적 공간을 기반으로 계산된다. 그러나 Fig. 2에서 정의되었듯이 해밀턴-자코비 방정식을 풀기 위한 위상적 설계 영역이 매개화 공간에서 정의되었기 때문에 물리적 공간에서 구해진 속도장을 다음의 변환 식 (23)을 이용하여 매개화 공간에서의 속도장으로 변환시켜 준다.

$$V_{(Para)}(\xi_s, \eta_t) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi_s, \eta_t) V_{(phy)}(i) \quad (23)$$

여기서,  $s = p+1, p+2, \dots, n+1, t = p+1, p+2, \dots, n+1$ .

### 5. 최적설계 과정

헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭 해석법과 해밀턴-자코비 방정식을 풀어서 레벨셋 함수값이 변경되는 과정을 Fig. 4에 도시하였다.

먼저, 위상 최적설계 문제가 정의되어야 한다. 본 방법론은 초기 구멍을 어떻게 설정하느냐에 따라 결과가 달라지는 레벨셋 방법론을 기반으로 하기 때문에 초기 구멍을 설정해 주어야 한다. 이는 위상적 미분(Topological derivative) 개념을 도입함으로써 해결할 수 있으나 본 논문에서는 다루지 않는다. 다음으로 3.1장에서 설명하는 방식으로 강화 조정점을 결정한다. 최적설계 과정에서는 레벨셋 함수 값이 매개화 공간을 기반으로 정의되었기 때문에 좀 더 직관적으로

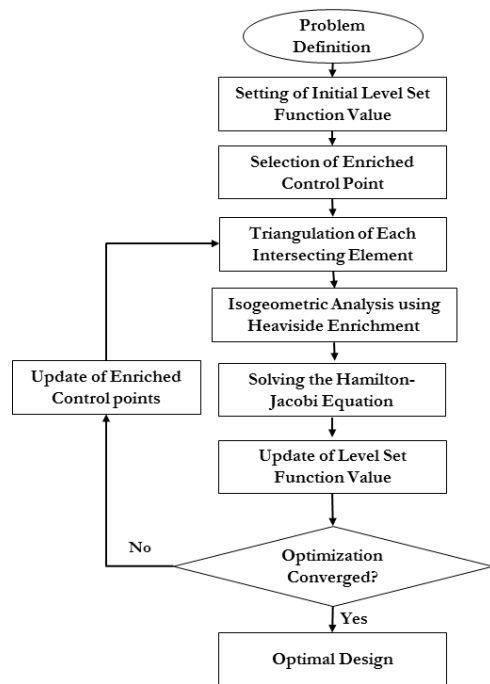


Fig. 4 Isogeometric topological shape optimization process

강화 조정점을 결정할 수 있다. 결정된 레벨셋 함수값을 기반으로 하여 3.2장에서 설명한 방식으로 수치적 적분이 수행된다. 헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭 해석 후, 얻어진 속도장을 이용하여 해밀턴-자코비 방정식을 풀어냄으로써 레벨셋 함수값을 변경시켜 준다. 이후 해가 수렴하였는지를 판단한 이후에 수렴하지 않았을 경우 변경된 레벨셋 함수 값을 기반으로 강화된 조정점을 변경하여 준다. 이러한 과정을 해가 수렴할 때까지 반복하여 최적의 위상을 찾아낸다.

6. 수치 예제

제안된 방법의 정확도를 검증하기 위하여 수치 해를 충분히 많은 수의 요소를 사용한 상용코드(ANSYS)결과와 비교하였다. 또한 해밀턴-자코비 방정식에서 얻은 레벨셋 함수를 이용하여 위상 최적설계를 수행하였다.

6.1 헤비사이드 강화 아이소-지오메트릭 해석의 검증

위와 아래에 장력이 가해지고 있는 가운데 빈 공간을 갖는 판 문제를 Fig. 5(a)와 같이 고려한다.

이 문제는 정해를 갖고 있지 않기 때문에 수렴할 정도의 충분한 요소를 갖는 상용코드 해를 정해로 간주하고 비교를 하였다. 판의 가로 세로 크기는 각 10(m)이고, 가운데 빈 공간의 반지름은 2.5(m)이다. 판의 위 아래에 각각 가해진 장력의 크기는  $\sigma=1(N/m)$ 이다. 영률은  $E=3.0 \times 10^6$  이고, 포아송 비는  $\nu=0.25$ 이다. 전체 자유도를 결정짓는 조정점은 전체 영역에 고르게 분포시켰다. 기존의 아이소-지오메트릭 해석에서 빈 공간을 설계하기 위해서는 여러 개의 패치와 조정점의 위치 또는 가중치와 같은 CAD 정보를 필요로 한다. 그러나 본 방법론에서는 하나의 패치만으로도 빈 공간과 같은 위상 변화를 표현할 수 있으며, CAD 정보없이 조정점을 고르게 분포시켜도 되는 장점이 있다. Fig. 5(b)와 (c)는 상용코드와 개발된 방법론에 의한 본 미세스 응력 분포이며, 개발된 방법론이 상용코드 해와 유사한 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 또한, 추가적인 사후 처리(Post processing) 없이 이와 같은 응력 분포를 얻을 수 있는 점은 본 방법론의

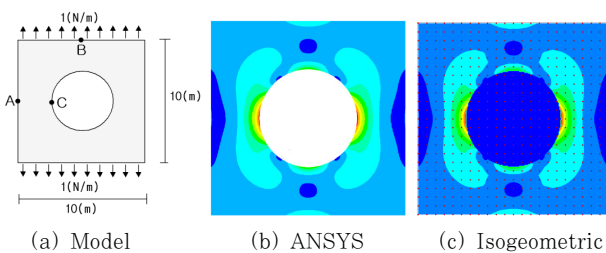


Fig. 5 Von-mises stress contours

Table 1 Accuracy of developed method

		Displacement	Von-mises stress
A	ANSYS	0.4139E-05	0.8264
	Level-set	0.3989E-05(96.37%)	0.7803(94.42%)
	Isogeometric	0.4119E-05( <b>99.53%</b> )	0.7846( <b>94.94%</b> )
B	ANSYS	0.6503E-05	2.4992
	Level-set	0.6324E-05(97.24%)	2.3786(95.17%)
	Isogeometric	0.6481E-05( <b>99.4%</b> )	2.4695( <b>98.81%</b> )
C	ANSYS	0.3975E-05	6.3857
	Level-set	0.3847E-05(96.76%)	6.2589(98.01%)
	Isogeometric	0.3957E-05( <b>99.53%</b> )	6.2647( <b>98.10%</b> )

장점이다. 더욱이 기존의 아이소-지오메트릭 해석에서는 여러 개의 패치를 사용함으로써 패치간의 응력 불연속으로 인하여 오차가 유발될 수 있는 여지가 있었으나, 본 방법론에서는 하나의 패치만으로도 위상적 변화를 표현함으로써 이와 같은 오차가 유발될 수 있는 여지를 사전에 차단할 수 있다.

해의 정확성을 비교하기 위하여 Fig. 5(a)에서 A,B,C의 세 지점을 선택하였다. 개발된 방법론의 정확성을 확인하기 위하여, 개발된 방법론의 해를 암시적으로 경계를 표현하는 방법론 중의 하나인 레벨셋 방법론과 비교하였다. 동등한 비교를 위하여 개발된 방법론과 레벨셋 방법론 간에 같은 수의 자유도를 사용하였다. 개발된 방법론에서는 2차의 NURBS 함수를 기저 함수로 사용하였다. Table 1에서 알 수 있듯이, 같은 숫자의 자유도를 사용하였음에도 헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭의 경우가 레벨셋 기법보다 좋은 정확도를 보이고 있음을 확인할 수 있다. 이는 개발된 방법론에서 고차의 기저함수 뿐만 아니라 강화함수를 사용하고, 불연속을 포함하는 요소를 삼각화하여 적분함으로써 해석법의 정밀도를 향상시켰기 때문이다.

6.2 직사각 판의 위상 최적 설계

전반적인 위상 최적설계 결과는 기존의 레벨셋 기반의 위상 최적 설계와 크게 다르진 않으며, 아이소-지오메트릭 해석법에서도 위상적 변화를 나타낼 수 있음에 주목한다. Fig. 6에서 직사각판 모델의 위상 최적 설계 문제 조건을 살펴볼 수 있다. 우측 하단에 힘을 가하고 있으며 허용 부피는 초기 질량의 60%로 설정한다. 2차의 NURBS 기저함수를 사용하

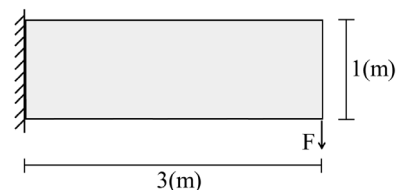


Fig. 6 Model description of rectangular plate

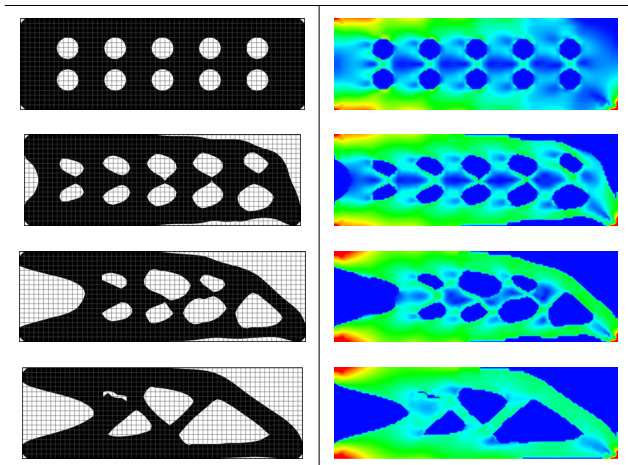


Fig. 7 Topological shape optimization result of rectangular plate

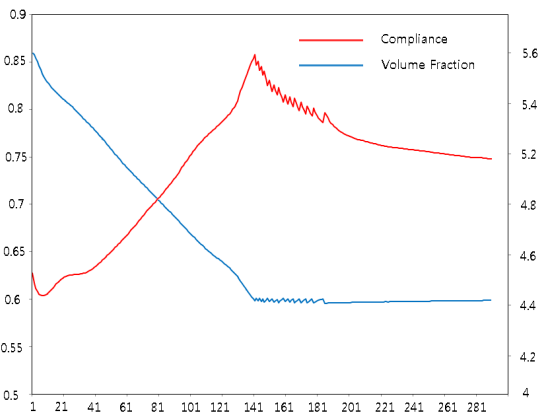


Fig. 8 Topological shape optimization history of rectangular plate

였으며, 대략 1,200개의 조정점이 사용되었다.

Fig. 7로부터 직사각판 모델의 위상 최적 설계 과정 및 최적화된 위상을 확인할 수 있다. 왼쪽 열에 있는 그림은 매개화 공간에 정의되어 있는 레벨셋 함수값을 의미한다. 오른쪽 열에 있는 그림은 물리적 공간에 정의되어 있는 물체의 본-미세스 응력을 의미한다.

Fig. 8에서 컴플라이언스와 부피율(Volume fraction)의 변화 과정을 살펴볼 수 있다. 부피율이 먼저 허용 부피를 만족시키기 위하여 줄어든 이후에 컴플라이언스가 감소하는 것을 확인할 수 있다.

### 6.3 L형 판의 위상 최적 설계

Fig. 9에서 L형 판 모델의 위상 최적 설계 문제 조건을 살펴볼 수 있다. 우측 상단에 힘을 가하고 있으며 허용 부피, NURBS의 차수, 조정점의 개수 모두 앞선 예제와 동일하다.

이 예제는 매개화 공간과 물리적 공간이 다르다는 점에서

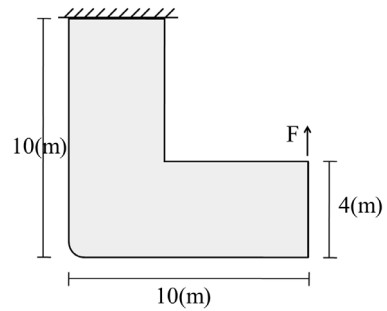


Fig. 9 Model description of L-shaped plate

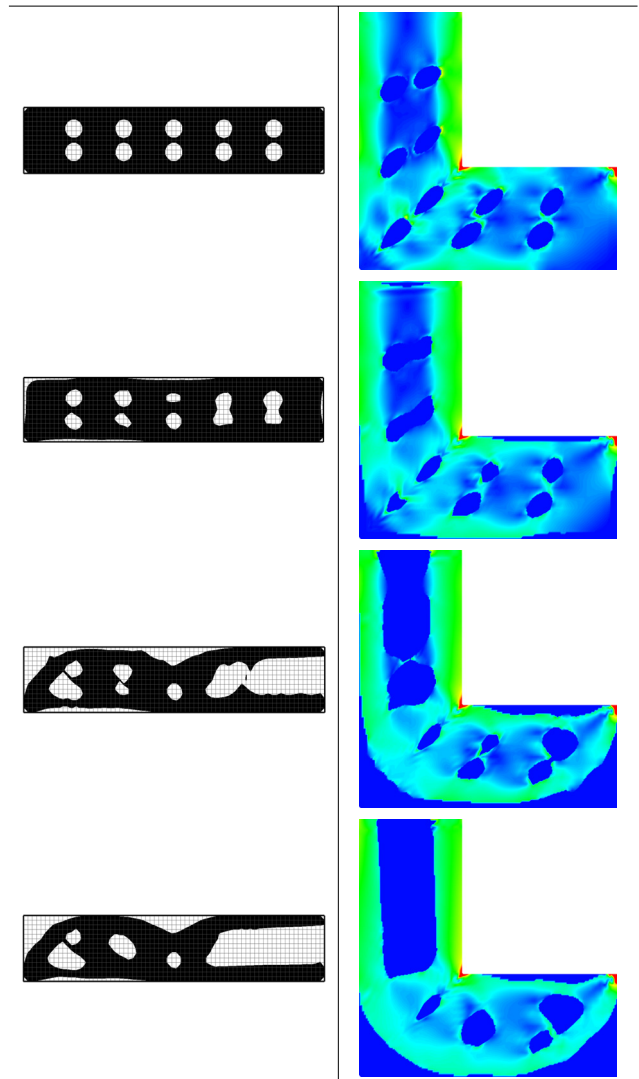


Fig. 10 Topological shape optimization result of L-shaped plate

이전 예제와 차이가 있다. 이는 조정점이 직사각 형태를 따라 배치되지 않았기 때문이며, 가령 매개화 공간에서의 원 모양이 물리적 공간에서의 원 모양이 아닐 수 있다. 그러나 두 공간이 일치하지 않는 것이 최적설계 과정에서 큰 문제가 되지는 않는다. 또한 본 방법론은 기하학적으로 정확한

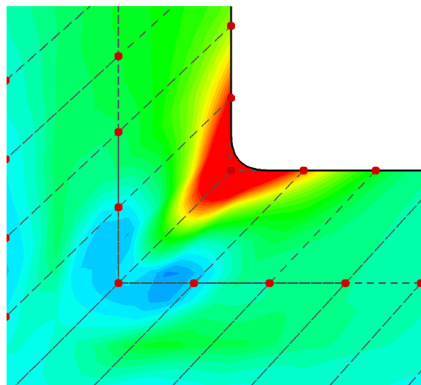


Fig. 11 Enlarged figure near the corner

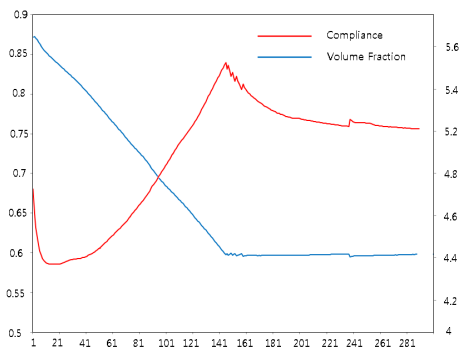


Fig. 12 Optimization history of L-shaped plate

NURBS 기저 함수를 사용하므로 위상적 설계 영역의 형상을 정확하게 표현할 수 있다는 장점이 있다. Fig. 11에서 코너 근처의 강화된 응력 분포 그림을 확인할 수 있으며, 위상적 설계 영역의 형상이 곡선부를 따라가며 정확하게 표현되었음을 확인할 수 있다. Fig. 12로부터 L자 모양 판의 위상 최적설계 문제 또한 잘 수렴하고 있음을 확인할 수 있다.

## 7. 결 론

본 연구에서는 헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭 해석기법과 레벨셋에서의 해밀턴-자코비 방정식을 결합함으로써 위상 최적설계를 수행하였다. 아이소-지오메트릭 해석을 기반으로 정확한 기하 형상을 갖는 모델을 얻을 수 있을 뿐 아니라 아이소-지오메트릭 해석법이 갖는 텐서 곱 형태의 한계를 헤비사이드 강화 개념의 도입으로 극복할 수 있었다. 단일 패치를 사용함으로써 연속적인 응력 분포를 얻을 수 있을 뿐 아니라 불연속적인 변위장 또한 추가적인 사후 처리없이 잘 표현해 낼 수 있다. 레벨셋 방법론이 암시적 동적 경계를 잘 표현하기 때문에 이를 이용하여 헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭 해석법을 기반으로 한 위상 최적설계를 수행할 수 있었다. 여러 수치 예제를 통하여 본 방법론의 정확성과 효율성을 검토할 수 있었으며, 아

이소-지오메트릭 해석법에서 위상적 변화를 표현할 수 있음을 확인하였다.

## 감사의 글

본 연구는 교육과학기술부의 지원에 의한 창의적 연구사업 (과제관리번호 2010-18282)의 지원을 받아 진행되었습니다. 저자들은 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

## 참 고 문 헌

- Ha, S.-H., Cho, S. (2007) Shape Design Sensitivity Analysis Using Isogeometric Approach, *Transactions of Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 20(3), pp.339~345.
- Ha, S.-H., Cho, S. (2007) Shape Design Optimization Using Isogeometric Analysis, *Transactions of Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 21(3), pp.233~238.
- Cho, M., Roh, H.Y. (2003) Development of Geometrically Exact New Shell Elements Based on General Curvilinear Coordinates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(1), pp.81~115.
- Cho, S., Ha, S.-H. (2009) Isogeometric Shape Design Optimization: Exact Geometry and Enhanced Sensitivity, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(1), pp.53~70.
- Choi, K.K., Chang, K.H. (1994) A Study of Design Velocity Field Computation for Shape Optimal Design, *Finite Elements in Analysis and Design*, 15, pp.317~341.
- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y. (2005) Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp.4135~4195.
- Stazi FL, Budyn E, Chessa J, Belytschko T. (2003) An Extended Finite Element Method with Higher-order Elements for Curved Cracks, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 31, pp.38~48.
- Sukumar N, Chopp DL, Moes N, Belytschko T. (2001) Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite-element Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47), pp.6183~6200.



- Benson DJ, Bazilevs Y, De Luycker E, Hsu M-C, Scott M, Hughes TJR, Belytschko T.** (2010) A Generalized Finite Element Formulation for Arbitrary Basis Functions: From Isogeometric Analysis to XFEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83, pp.765~785.
- Ha, S.-H, Cho, S.** (2005) Topological Shape Optimization of Heat Conduction Problems using Level Set Approach, *Numerical Heat Transfer B*, 48, pp.67~88.
- Ahn, S.-H, Cho, S.** (2010) Level-set Based Topological Shape Optimization of Heat Conduction Problems Considering Design-dependent Convection Boundary, *Numerical Heat Transfer B*, 58(5), pp.304~322.

## 요 지

레벨셋방법과 헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭 위상최적설계 방법을 개발하였다. 레벨셋 방법에서는 초기 해석영역은 고정되어 있으며 경계는 레벨셋 함수값을 이용한 암시적인 동적 경계로 표현되며, 이는 복잡한 위상적 변화를 용이하게 표현할 수 있게 한다. 헤비사이드 강화는 기존의 기저함수에 내부 경계를 표현하는 강화 함수를 더함으로써 아이소-지오메트릭 해석법의 정밀도를 향상시킨다. 제안된 위상 최적설계 방법은 다음과 같은 이점을 갖는다. 아이소-지오메트릭 해석법을 이용하여 정밀한 기하 형상을 얻을 수 있으며 텐서 곱을 이용하여 정의된 패치의 한계를 헤비사이드 강화를 이용함으로써 해결할 수 있다. 단일 패치를 사용함으로써 연속적인 응력 분포를 얻어낼 수 있을 뿐 아니라 불연속적인 변위장 또한 표현해 낼 수 있다. 레벨셋 방법론이 암시적 동적 경계를 잘 표현하기 때문에 이를 이용하여 헤비사이드 강화를 이용한 아이소-지오메트릭 해석법에서 위상의 변화를 잘 표현해 낼 수 있다.

**핵심용어** : 위상 최적설계, 헤비사이드 강화, 아이소-지오메트릭 해석법, NURBS