COSEIK J. Comput. Struct. Eng., 26(1)
pp.39~48, February, 2013
http://dx.doi.org/10.7734/COSEIK.2013.26.1.39

pISSN 1229-3059 eISSN 2287-2302
Computational Structural
Engineering Institute of Korea

2차원 융해문제의 해석을 위한 이동최소제곱 차분법

윤 영 철†

명지전문대학 토목과

Moving Least Squares Difference Method for the Analysis of 2-D Melting Problem

Young-Cheol Yoon†

Department of Civil Engineering, Myongji College, Seoul, 120-776, Republic of Korea

Abstract

This paper develops a 2-D moving least squares(MLS) difference method for Stefan problem by extending the 1-D version of the conventional method. Unlike to 1-D interfacial modeling, the complex topology change in 2-D domain due to arbitrarily moving boundary is successfully modelled. The MLS derivative approximation that drives the kinetics of moving boundary is derived while the strong merit of MLS Difference Method that utilizes only nodal computation is effectively conserved. The governing equations are differentiated by an implicit scheme for achieving numerical stability and the moving boundary is updated by an explicit scheme for maximizing numerical efficiency. Numerical experiments prove that the MLS Difference Method shows very good accuracy and efficiency in solving complex 2-D Stefan problems.

Keywords : *moving least squares difference method, moving boundary, topology change, implicit, explicit, 2-D Stefan problems*

1. 서 론

Stefan 문제는 대표적인 이동경계문제로서 해석영역 내부에서 계면경계의 위치 또는 형상이 시간에 따라 변화한다. 또한, 계면경계에서 해(solution)의 미분이 불연속해지는 특이성(singularity)을 나타낸다. 기존 수치해석기법들은 대부분 해석과정에서 요소망(mesh)이나 그리드(grid)와 같이 이산화를 위한 규칙적인 기본단위를 필요로 하기 때문에 임의로 이동하는 계면경계의 형상과 미분 특이성을 함께 묘사하는 것이 쉽지 않다. 더욱이, 계면경계의 위치도 해의 일부이기 때문에 반복계산이 필요한 비선형 시스템이 필요하고 수치해석에 어려움이 많다. 이러한 이유로 이동경계문제의 해석에 있어서 유한차분법을 근간으로 하는 Tu 등(1992)이 개발한 Immersed Boundary Method(IBM), LeVeque 등(1994)이 개발한 Immersed Interface Method(IIM), 절점만 사용하는 무요소법(Belytschko *et al.*, 1994) 그리고 유한요소법을 근간으로 하는 eXtended Finite Element Method(XFEM; Moes *et al.*, 1999)와 같이 요소망이나 그리드의 제약으로부터 어느 정도 자유로운 수치해석기법들이 주목을 받아 왔다.

그러나 이와 같은 수치해석기법에서도 이동하는 계면경계의 위치는 단순하게 한 번의 방정식을 풀어서 결정할 수 없기 때문에 일반적으로 Level Set Method(Osher *et al.*, 1988)와 같이 계면경계의 운동에 대한 추가적인 kinetics 방정식을 도입하여 해석하는 경우가 많다. 이것은 문제의 정식화 과정을 복잡하게 만들 뿐만 아니라 수치적인 알고리즘 개발하고 해석하는 과정도 난해하게 만들 수밖에 없다. 예를 들어, Chessa 등(2002)은 XFEM에 Level Set Method를 도입하여 요소망의 재구성없이 고형화(solidification) 문제를 해석했으나, 기존의 방법과 차별되는 해석의 정확도를 보

† Corresponding author:
Tel: +82-2-300-1135; E-mail: ycyoon@mjc.ac.kr
Received August 28 2012; Revised October 30 2012;
Accepted October 31 2012
©2013 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

여주지 못했다. 또, Chen 등(1997)은 implicit(음해) 유한차분법과 Level Set Method를 이용하여 dendritic 고형화 문제를 해석했으나, 이동하는 계면경계로 인해 차분식 구성과정이 매우 복잡해지는 단점이 있고, Juric 등(1996) 역시 dendritic 고형화 문제를 해석하기 위해 유한차분법 기반의 Front-Tracking Method를 제안했으나, 이 방법도 그리드를 근간으로 계면경계의 기하학적 정보를 차분식 구성에 반영하는 과정이 매우 복잡해지는 문제를 개선하지 못했다. 한편, 1차원 Stefan 문제에 대해서는 Voller 등(2004)이 다양한 수치기법을 이용한 해석결과를 비교했으나, 다차원 문제로의 확장이 쉽지 않은 단점이 있다. Javierre 등(2006)도 고체-유체, 고체-고체간 상변화 문제에 대해 기존에 알려진 Moving Grid Method나 Level Set Method를 조합한 수치기법을 제안하고 해석결과를 상사해(similarity solution)와 비교했으나 획기적인 정확도를 얻지는 못했다.

이동최소제곱 유한차분법은 그리드없이 절점만을 이용하여 이동최소제곱법에 기반한 Taylor 다항식 근사를 통해 얻은 미분근사식으로 지배방정식을 차분하여 계방정식을 푸는 새로운 수치기법이다. 이동최소제곱 차분법은 Yoon 등(2007a; 2007b)에 의해 처음 제안된 이후로 다양한 응력집중문제와 이종재료의 열전달 문제에 적용된 바 있다(Yoon *et al*., 2007c; 2007d). 해(solution)와 해의 미분까지 불연속 특성을 나타내는 포텐셜문제에도 효과적으로 적용되었다(Yoon *et al*., 2011). 특히, Yoon 등(2009)은 1차원 Stefan 문제에 대한 이동최소제곱 차분법을 제시했는데, 1차원 문제에서는 이동경계의 위치만 정의하고 다루면 형상에 대해서는 따로 모델링할 필요가 없으므로 정식화 과정이 매우 간단했다. 본 연구에서는 1차원 문제에 국한되었던 기존의 연구를 확장하여 2차원 공간에서 임의의 형상으로 이동하는 계면경계를 효과적으로 모형화할 수 있는 2차원 이동최소제곱 차분법을 개발한다. 계면경계의 기하학적 위상변화와 수학적 특이성을 모사할 수 있는 새로운 수치기법을 제안하고 제안된 수치기법이 2차원 융해(melting)문제를 정확하고 효율적으로 해석할 수 있음을 보이고자 한다. 이동경계의 kinetics를 표현할 수 있는 physics 관계식을 이동최소제곱 차분법의 근사식에 그대로 매입(immersed)하여 Level Set Method 같은 계면경계를 진전시키기 위한 추가적인 미분방정식의 도입없이도 이동경계문제를 정확하게 해석할 수 있음을 보이고자 한다. 참고로 본 연구에서 제안하는 수치기법과 연관된 다양한 수학적인 배경은 Kim 등(2007a; 2007b)이 계면경계문제 해석을 위해 제안한 무요소 점별법(Meshfree Point Collocation Method)을 참조할 수 있다.

2. 이동경계문제의 지배방정식

대표적인 이동경계문제로서 융해(melting)문제의 평형방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(cu)=\nabla\cdot(\kappa\nabla u)+f \text{ in } \Omega \text{ (평형방정식)} \tag{1}$$

$$u=\bar{u} \text{ on } \partial\Omega_u \text{ (필수경계조건)} \tag{2}$$

$$-\kappa\nabla u\cdot\boldsymbol{n}=\bar{q} \text{ on } \partial\Omega_q \text{ (자연경계조건)} \tag{3}$$

여기서, ρ는 밀도, c는 비열(specific heat), f는 열원(heat source), q는 열유속(heat flux), κ는 열전도율, $\boldsymbol{n}$ 자연경계 상의 수직벡터를 가리킨다. 위첨자 '-'는 미리 규정된 값을 의미한다. 이동경계를 지날 때 온도와 열유속의 불연속(jump)에 대한 계면경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$[u]_\Gamma=0 \text{ on } \Gamma \text{ (계면경계조건)} \tag{4}$$

$$[q]_\Gamma=-Lv \text{ on } \Gamma \text{ (계면경계조건)} \tag{5}$$

여기서, L는 상태변화를 위해 필요한 잠열(latent heat), v는 계면경계가 계면경계의 수직방향($\boldsymbol{n}_\Gamma$)으로 움직이는 속도값이다. 위에서 식 (4)는 계면경계에서 온도값이 불연속없이 연속임을 의미하고, 식 (5)는 q의 불연속과 이동경계의 kinetics 관계를 묘사한다.

3. 이동최소제곱 차분법을 사용한 2차원 융해문제의 정식화

3.1 다차원 공간상의 이동경계의 특이성 모형화를 위한 근사함수

본 논문에서는 편의상 다중지수표기법(multi-index notation)을 사용한다. 예를 들어, $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$는 n-차원 실벡터를 의미하고, $\boldsymbol{x}$의 α-차 지수와 α-차 편미분은 각각 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$로 정의되며, 이 때, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$이다. 미분 가능한 어떤 함수가 주어졌을 때, y를 기준으로한 Taylor 전개식에서 m차 이상의 고차항을 제외하면 다음과 같은 Taylor 다항식을 얻는다.

$$u_L^m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\rho}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}\frac{\rho^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\boldsymbol{\alpha}!}D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{y}) \tag{6}$$

$$=\boldsymbol{p}_m^T(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\boldsymbol{a}_R(\boldsymbol{y})$$

여기서, $|\boldsymbol{\alpha}|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$이다. ρ는 함수값을 계산하는 영향영역을

나타내며, 이동최소제곱법과 조합되면 가중함수(weight function)의 반경을 가리킨다. n-차원 문제에 대한 다항식 기저함수 $\boldsymbol{p}_m^T(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$와 $u(\boldsymbol{x})$의 $\boldsymbol{y}$에서의 미분값들을 포함하는 벡터 $\boldsymbol{a}_R(\boldsymbol{y})$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{p}_m^T(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \left(\frac{\rho^{|\boldsymbol{\alpha}_1|}}{\boldsymbol{\alpha}_1!}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\rho}\right)^{\boldsymbol{\alpha}_1}, \cdots, \frac{\rho^{|\boldsymbol{\alpha}_K|}}{\boldsymbol{\alpha}_K!}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\rho}\right)^{\boldsymbol{\alpha}_K} \right) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{a}_R(\boldsymbol{y}) = \left(D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}_1} u(\boldsymbol{y}), \cdots, D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}_K} u(\boldsymbol{y}) \right)^T \tag{8}$$

여기서, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0,\cdots,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_K = (0,\cdots,m)$, $K = \frac{(m+n)!}{m!n!}$이다. $\boldsymbol{a}_R(\boldsymbol{y})$ 벡터에 $\boldsymbol{y}$ 대신 $\boldsymbol{x}$를 대입하면 각 성분들은 $u(\boldsymbol{x})$의 훌륭한 미분근사값을 제공한다. 미지의 미분계수 $D_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}_1} u(\boldsymbol{y}), \cdots, D_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{\alpha}_K} u(\boldsymbol{y})$를 계산하기 위해 근사에 포함된(영향영역 내에 포함된) N개의 절점에 대해 이동최소제곱 잔차식을 다음과 같이 구성한다.

$$J := \sum_{I=1}^{N} w\left(\frac{\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{y}}{\rho}\right) \left\{ \boldsymbol{p}_m^T(\boldsymbol{x}_I;\boldsymbol{y}) \boldsymbol{a}_R(\boldsymbol{y}) - u_I \right\}^2 \tag{9}$$

위 식의 $w\left(\frac{\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{y}}{\rho}\right)$는 임의의 형상을 갖는 $\boldsymbol{y}$에 대한 $\boldsymbol{x}_I$에서의 가중함수값이고, u_I는 $\boldsymbol{x}_I$에서의 온도에 대한 절점해(nodal solution)이다. 이제, $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{a}} = 0$의 조건을 이용해 잔차식 J를 최소화하고 $\boldsymbol{y}$를 $\boldsymbol{x}$로 치환하여 얻은 $u(\boldsymbol{x})$에 대한 최종적인 미분근사값($D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}_1} u(\boldsymbol{x}), \cdots, D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}_L} u(\boldsymbol{x})$)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x}) = & \left(\sum_{I=1}^{N} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{I}};\boldsymbol{x}) w\left(\frac{\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{x}}{\rho}\right) \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{I}};\boldsymbol{x}) \right)^{-1} \\ & \cdot \left(w\left(\frac{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}}{\rho}\right) \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}), \cdots, w\left(\frac{\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} - \boldsymbol{x}}{\rho}\right) \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}};\boldsymbol{x}) \right) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

예를 들어, $D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}_1} u(\boldsymbol{x})$와 $D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}_K} u(\boldsymbol{x})$는 각각 Taylor 전개에 근거한 $u(\boldsymbol{x})$와 $u(\boldsymbol{x})$의 $\boldsymbol{\alpha}_K (= (0,\cdots,m))$차 도함수에 대한 매우 훌륭한 근사값을 제공한다. 또한, 일반화된 형상함수를 이용하여 식 (11)과 같이 정리할 수 있다.

$$\boldsymbol{a}_R(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}_1} u(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}_K} u(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Phi_1^{\boldsymbol{\alpha}_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \Phi_N^{\boldsymbol{\alpha}_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{\boldsymbol{\alpha}_K}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \Phi_N^{\boldsymbol{\alpha}_K}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \tag{11}$$

여기서. $\Phi_I^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})$는 $\boldsymbol{x}$에 대한 절점 I의 형상함수 $\Phi_I(\boldsymbol{x})$의 $\boldsymbol{\alpha}$차 미분근사를 의미한다. 또는, 아래와 같이 쓸 수도 있다.

$$D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{I}^{N} D_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} \Phi_I(\boldsymbol{x})\, u_I := \sum_{I}^{N} \Phi_I^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})\, u_I \tag{12}$$

특이성이 없는 정규해는 식 (11) 또는 (12)의 근사함수식을 그대로 이용할 수 있으므로, 이제 계면경계 주변에서 특이해를 근사하는 방법을 살펴본다. 특이해를 근사하기 위해 식 (6)의 Taylor 다항식에 쐐기함수를 추가한 식 (13)을 고려한다.

$$u_L^w(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{p}_m^T(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \boldsymbol{a}_S(\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]_\Gamma b_\Gamma(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \tag{13}$$

여기서, $\boldsymbol{n}$은 $\boldsymbol{n}_\Gamma(\boldsymbol{y})$을 의미한다. $b_\Gamma(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$는 본래 계면경계의 수직방향 미분 불연속을 모델링하기 위한 $\boldsymbol{y}$의 계면경계 상의 투영점(projection point) $\boldsymbol{y}_\Gamma$에서 구성된 선형 쐐기함수(linear wedge function)인데, 수학적으로는 계면경계 상의 $\boldsymbol{y}_\Gamma$로부터 $\boldsymbol{n}_\Gamma(\boldsymbol{y})$ 방향으로 $\boldsymbol{x}$까지의 거리함수 값이다. 본 연구에서는 다음과 같은 쐐기함수를 사용한다(Yoon *et al.*, 2007d).

$$b_\Gamma(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{n}_\Gamma(\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_\Gamma) \tag{14}$$

여기서, $b_\Gamma(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$의 $\boldsymbol{x}$에 대한 미분은 매우 간단하게 계산될 수 있다는 것을 알 수 있다. 단, 계면경계가 이동하는 경우, $\boldsymbol{y}_\Gamma$는 시간 t에 의존하게 되지만, 윗 식에서는 편의상 간단히 표현했다.

Fig. 1과 같이 얼음이 녹는 융해과정을 모사한다고 가정하자. 계면경계를 지나는 해의 수직미분의 불연속 크기는 식 (3)과 식 (5)를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]_\Gamma = \frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{n}} = \left(\frac{Lv}{\kappa^-}\right) \tag{15}$$

이 때, 얼음의 온도는 일정하므로 $u^+ = 0$이고, k^-는 물의 열전도율을 나타낸다. 따라서 식 (13)은 식 (16)과 같이 계면경계의 kinetics를 표현하는 속도항을 포함하여 계면경계의 특이성과 이동현상을 동시에 모델링할 수 있는 새로운 근사식으로 다시 쓸 수 있다.

$$u_L^w(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{p}_m^T(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \boldsymbol{a}_S(\boldsymbol{y}) + \left(\frac{Lv}{2\kappa^-}\right) b_\Gamma(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \tag{16}$$

이와 같은 근사식을 사용하는 경우 Level Set Method

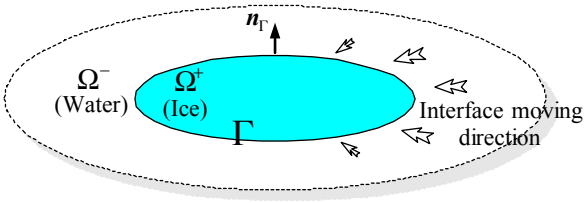

Fig. 1 2-D ice melting problem

(Osher *et al.*, 1988)와 같은 계면경계의 kinetics 또는 기하학적 위상변화를 모델링하기 위한 추가적인 수치기법이 필요치 않아 계산효율성을 획기적으로 향상시킬 수 있다는 장점이 있다.

식 (16)에서 미지벡터 $\boldsymbol{a}_S(x)$를 구하기 위해 특이성이 없는 정규근사와 동일한 과정을 거치면 다음 식이 얻어진다.

$$\boldsymbol{a}_S(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{I=1}^{N} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I;\boldsymbol{x}) w\left(\frac{\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}}{\rho}\right) \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I;\boldsymbol{x})\right)^{-1} \cdot \left(w\left(\frac{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}}{\rho}\right)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}),\cdots,w\left(\frac{\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}}{\rho}\right)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_N;\boldsymbol{x})\right) \cdot \begin{pmatrix} u_1 - \left(\frac{Lv}{2\kappa^-}\right) b_\Gamma(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ u_N - \left(\frac{Lv}{2\kappa^-}\right) b_\Gamma(\boldsymbol{x}_N;\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \tag{17}$$

또는, 일반화된 형상함수를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\boldsymbol{a}_S(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1^{\alpha_1}(\boldsymbol{x}) \cdots \Phi_N^{\alpha_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \Phi_1^{\alpha_L}(\boldsymbol{x}) \cdots \Phi_N^{\alpha_L}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 - \left(\frac{Lv}{2\kappa^-}\right) b_\Gamma(\boldsymbol{x}_1;\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ u_N - \left(\frac{Lv}{2\kappa^-}\right) b_\Gamma(\boldsymbol{x}_N;\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \tag{18}$$

위의 두 식들을 보면 $\boldsymbol{a}_S(\boldsymbol{x})$는 근사하려는 함수에서 특이성을 갖는 부분을 뺀 나머지 부분을 Taylor 다항식으로 근사하고 있음을 알 수 있다.

계면경계는 직선 세그먼트들의 연결로 이산화된다. 투영점은 세그먼트 상의 임의의 위치에 떨어질 수 있다. 투영점 위에서 수직방향 이동속도는 파라메타 좌표값 s와 투영점이 위치한 세그먼트의 양쪽 꼭지점의 속도값들을 이용한 선형보간을 통해 다음과 같이 결정한다.

$$v = \sum_{J=1}^{2} N_J(s) v_J \text{ on } s \in \Gamma \tag{19}$$

여기서, $N_J(s)$는 선형보간함수이고, s는 일반적으로 절점의 투영점을 가리킨다. 식 (18)과 식 (19)를 식 (16)에 대입하면 다음과 같은 최종적인 미분근사식을 얻는다.

$$D_{\boldsymbol{x}}^{\alpha} u(\boldsymbol{x}) := \sum_{I=1}^{N} \Phi_I^{\alpha}(\boldsymbol{x}) \left\{ u_I - \frac{L}{2\kappa^-} \left(\sum_{J=1}^{2} N_J(s) v_J \right) b_\Gamma(\boldsymbol{x}_I;\boldsymbol{x}) \right\} + \frac{L}{2\kappa^-} \left(\sum_{J=1}^{2} N_J(s) v_J \right) D_{\boldsymbol{x}}^{\alpha} b_\Gamma(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}) \tag{20}$$

위의 확장된 미분근사식은 새로운 미지값 v_J를 포함하고 있다. 따라서 v_J값들을 계산하기 위해 절점 이외에도 계면경계를 이산화한 세그먼트들의 꼭지점에서 계면경계조건에 대한 방정식을 세우는 것이 필요하다. 식 (5)의 계면경계조건은 미분근사식에 이미 반영되었으므로 식 (4)를 이용해야 한다. 실제로 식 (4)는 계면경계에서 상변화(phase transformation)가 일어날 때 온도가 연속이어야 한다는 조건인데, 이것은 얼음 융해문제의 경우 계면경계를 따라 온도가 0이어야 한다는 조건으로 변환이 가능하다. 한편, 본 연구의 미분근사 과정에서 $\Phi_I^{\alpha}(x)$는 Taylor 다항식의 $\boldsymbol{a}_S(\boldsymbol{x})$ 계산시 얻어지므로 추가의 미분연산 과정이 필요없고, 결과적으로 미분을 계산하는 과정이 거의 없게 되어 계산효율성이 뛰어나다는 것을 주목할 필요가 있다.

3.2 2차원 공간에서 지배방정식의 이산화

2차원 Stefan 문제와 같은 이동경계문제의 지배방정식은 시간항을 갖고 있으므로 시간적분이 필요하다. 본 연구에서는 안정성(stability)의 문제가 없는 implicit법(음해법)을 이용하여 시간적분한다. 아래의 식은 식 (1)의 미분방정식에 대해 일반적인 Crack-Nicolson법을 적용한 차분식이다.

$$\rho c\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}\right) = (1-\theta)\{\nabla^h \cdot (\kappa \nabla^h u^n)\} + \theta\{\nabla^h \cdot (\kappa \nabla^h u^{n+1})\} \tag{21}$$

여기서, 위첨자는 시간단계를 나타내고, ∇^h는 이산화된 그라디언트 연산자이다. Implicit법에서 시간적분은 시간간격 Δt의 크기에 상관없이 안정적이므로 본 연구에서는 Δt를 절점의 밀도와 원하는 해의 정확도를 고려하여 효율성을 확보할 수 있도록 결정했다. 문제를 단순화하기 위해 ρ, c, κ를 모두 단위값으로 가정하고, $\theta = 1$을 적용하여 implicit 법의 일종인 Backward Euler법으로 차분된 다음 식을 얻는다.

$$(\boldsymbol{I} - \Delta t \cdot \Delta^h) u^{n+1} = u^n \tag{22}$$

여기서, Δ^h는 이산화된 Laplace 연산자이고, I는 identity 연산자를 가리킨다.

이제, 미분근사식을 이용하여 식 (23)~(24)에서 보듯이 이산화된 형태로 바꿀 수 있다. 내부절점 $\boldsymbol{x}_K$의 영향영역이 계면경계를 포함하지 않는 정규영역(regular region)에 속하면 평형방정식에 대한 차분식은 다음과 같다.

$$\sum_{I=1}^{N}\left\{\Phi_I^{(0,0)}(\boldsymbol{x}_K)-\Delta t\left(\Phi_I^{(2,0)}(\boldsymbol{x}_K)+\Phi_I^{(0,2)}(\boldsymbol{x}_K)\right)\right\}u_I^{n+1} \quad (23)$$
$$=\sum_{I=1}^{N}\Phi_I^{(0,0)}(\boldsymbol{x}_K)u_I^n$$

반면, 내부절점 $\boldsymbol{x}_K$의 영향영역이 계면경계를 포함하는 특이영역(singular region)에 속하는 경우, 평형방정식에 대한 차분식은 아래 식과 같다.

$$\sum_{I=1}^{N}\left\{\Phi_I^{(0,0)}(\boldsymbol{x}_K)-\Delta t\left(\Phi_I^{(2,0)}(\boldsymbol{x}_K)+\Phi_I^{(0,2)}(\boldsymbol{x}_K)\right)\right\}u_I^{n+1} \quad (24)$$
$$+\frac{L}{2\kappa^-}\left(\sum_{J=1}^{2}N_J(\boldsymbol{x}_{K_\Gamma})v_J^{n+1}\right)\times$$
$$\left\{\begin{array}{l}\left(b_\Gamma^{n+1}(\boldsymbol{x}_{\hat{I}},\boldsymbol{x}_K)-\sum_{I=1}^{N}\Phi_I^{(0,0)}(\boldsymbol{x}_K)b_\Gamma^{n+1}(\boldsymbol{x}_{\hat{I}},\boldsymbol{x}_K)\right)\\ -\Delta t\sum_{I=1}^{N}\left(\Phi_I^{(2,0)}(\boldsymbol{x}_K)+\Phi_I^{(0,2)}(\boldsymbol{x}_K)\right)b_\Gamma^{n+1}(\boldsymbol{x}_{\hat{I}},\boldsymbol{x}_K)\end{array}\right\}$$
$$=\sum_{I=1}^{N}\Phi_I^{(0,0)}(\boldsymbol{x}_K)u_I^n+\frac{L}{2\kappa^-}\left(\sum_{J=1}^{2}N_J(\boldsymbol{x}_{K_\Gamma})v_J^n\right)\times$$
$$\left\{b_\Gamma^n(\boldsymbol{x}_{\hat{K}},\boldsymbol{x}_K)-\sum_{I}\Phi_I^{(0,0)}(\boldsymbol{x}_K)b_\Gamma^n(\boldsymbol{x}_{\hat{I}},\boldsymbol{x}_K)\right\}$$

여기서, $\boldsymbol{x}_{K_\Gamma}$는 $\boldsymbol{x}_K$의 계면경계로의 투영점 좌표이다. 윗 식에서 미지값은 절점해 u_I^{n+1}과 계면경계의 이동속도 v^{n+1} 뿐이다. 왜냐하면 u_I^n나 v^n은 전 단계에서 계산된 기지의 값이고, $b_\Gamma^{n+1}(\boldsymbol{x}_{\hat{I}},\boldsymbol{x}_K)$는 $\boldsymbol{x}_K$에 대해 $\boldsymbol{x}_I$에서 계산된 쐐기함수값으로써, 본 연구에서 시간 t에서 계면경계의 위치를 다음과 같이 explicit하게 update하기 때문이다.

$$\boldsymbol{s}_J^{n+1}(t)=\boldsymbol{s}_J^n(t)+\Delta t\cdot v_J^n\,\boldsymbol{n}_\Gamma(\boldsymbol{s}_J^n(t)) \quad (25)$$

여기서, $\boldsymbol{s}_J^{n+1}(t)$는 $n+1$ 단계에서 계면경계를 구성하는 세그먼트 꼭지점 J의 위치벡터이다. 식 (14)를 보면 $b_\Gamma^{n+1}(\boldsymbol{x}_{\hat{K}},\boldsymbol{x}_K)$를 계산하기 위한 $\boldsymbol{x}_K$의 투영점 $\boldsymbol{x}_{K_\Gamma}$나 수직벡터 $\boldsymbol{n}_\Gamma(\boldsymbol{x}_K)$를 계산하는데 아무런 문제가 없고, $b_\Gamma^{n+1}(\boldsymbol{x}_{\hat{I}},\boldsymbol{x}_K)$도 마찬가지이다. 식 (25)에서 만약 v_J^n 대신 v_J^{n+1}을 사용하면, v_J^{n+1}은 현재 단계에서 구해야 할 해의 일부이므로 $b_\Gamma^{n+1}(\boldsymbol{x}_{\hat{I}},\boldsymbol{x}_K)$가 $n+1$단계에서 정의될 수 없게 되고, 결과적으로 전체 계방정식이 비선형 시스템이 되어 본 연구와 다른 새로운 수치 알고리즘이 필요하다.

전체 계방정식을 완성하기 위해 식 (2) 또는 식 (3)과 같은 필수경계조건과 자연경계조건에 대한 차분식을 추가해야 하는데, 이들의 구성방법은 기존의 이동최소제곱 차분법과 동일하다(Yoon *et al.*, 2007d). 특히, 계면경계조건식 중 식 (5)는 이미 미분근사식에 반영되어 있으므로 식 (4)를 이용하여 미지의 속도값을 얻기 위한 차분식을 구성한다. 필수경계조건의 처리가 약형식(weak form)을 기반으로 하거나 절점을 기반으로 하는 기존의 무요소법에 비해 획기적으로 간소화된다는 것을 주목할 필요가 있다.

3.3 이동경계의 수치 모델링

본 연구에서는 계면경계를 직선 세그먼트들의 집합으로 모델링한다. 미분근사식을 구하는 절점의 계면경계 위로의 투영점은 세그먼트 위의 임의의 위치에 떨어질 수 있고, 쐐기함수를 정의하기 위해 그 위치에서 수직벡터를 결정해야 한다(Yoon *et al.*, 2011). 이동경계문제에서는 시간이 경과하면서 계면경계가 이동하기 때문에 계면경계를 정의하는 세그먼트 꼭지점들도 따라서 이동해야 하고, 결과적으로 수직벡터도 함께 변하게 된다. 또한, 계면경계의 형상이 임의로 변화하는 경우, 초기에 일정한 간격으로 배치된 세그먼트 꼭지점들의 간격과 위치가 적절하게 유지되지 못하고 서로 엉키거나 흐트러지게 되면 정확한 수직벡터를 찾는 것이 어렵고 미분근사의 정확도를 심각하게 저하시킬 수 있다.

해석결과로부터 얻은 세그먼트 꼭지점에 대한 속도값과 수직벡터를 이용하여 매 단계마다 계면경계를 진전시키기 때문에 정확한 수직벡터를 정의하는 것이 계면경계의 형상을 결정하는데 결정적인 역할을 한다. 본 연구에서는 세그먼트 꼭지점에서 수직벡터를 정의할 때, 그 꼭지점 양쪽의 인접한 세그먼트들의 중앙점을 연결하는 단위벡터를 90° 회전하여 수직벡터로 사용했다. 이와 같은 모델링 기법은 세그먼트의 길이가 일정하지 않은 경우에도 수직벡터를 훌륭하게 정의해 주는데, 실제로 제 4장의 수치예제에서 보듯이 복잡한 기하학적 형상을 갖는 이동경계문제에서도 잘 작동하는 것을 확인할 수 있다. 한편, 미분근사시 세그먼트 상의 임의의 위치에 떨어지는 투영점에서 수직벡터를 정의할 때에는 해당 세그먼트를 90° 회전한 단위벡터를 사용하여 손쉽게 모델링할 수 있다.

경험적인 관점에서 볼 때, 수직벡터가 정확하지 못한 경우, 시간간격 Δt와 계면경계의 곡률과 연관되어 계면경계의

형상이 수치적으로 제어하기 어려운 곡률을 갖게 되거나 세그먼트 꼭지점들이 서로 겹치는 현상(overlap)이 발생되어 수치해석이 불가능해 질 수 있다. 예를 들어, 계면경계가 오목(concave)한 형상을 가지면서 진전하는 경우, Δt의 크기를 너무 크게 잡아 세그먼트 꼭지점이 곡률반경 크기 이상으로 이동하게 되면 꼭지점들이 서로 겹쳐 수치적인 안정성이 깨질 수 있으므로 Δt 결정에도 세심한 주의가 필요하다. 만약, 계면경계가 국부적으로 곡률변화가 심해 세그먼트 꼭지점들의 간격유지가 힘들 경우, 매 해석단계마다 일정한 간격으로 다시 조정할 수 있는 알고리즘의 도입이 필요하다. 더 나아가 동결(freezing) 또는 dendritic 결정구조의 생성(solidification)과 같이 곡률반경이 계속 감소하는 physics를 갖는 문제라면 세그먼트를 적절하게 생성, 병합, 소멸시킬 수 있는 수치기법이 반드시 필요하다.

4. 수치예제

4.1 반무한 공간 융해문제

본 절에서는 이론해가 알려져 있는 1차원 반무한 공간 이동경계문제(Ice melting problem)를 통해 개발된 해석기법의 정확성을 검증한다. 본래 1차원인 문제를 2차원 문제로 고려하기 위해 Fig. 2와 같이 얼음 막대의 윗면과 아래면에 단열(insulation)에 대한 Neumann 경계조건을 부여했다. 해석시 스테판 상수($\alpha = c(u_f - u_{ref})/L$)를 0.2로 가정하여 상당히 빠른 속도로 얼음이 녹아 갈 수 있도록 설정했고, 물 쪽의 온도에 대한 Dirichlet 경계값을 $\overline{u} = f(t) = 1$로 부여했다. 이때, u_f와 u_{ref}는 각각 동결온도와 기준온도를 나타낸다. 이 문제에 대한 이론해는 상사법(similarity method)으로 계산될 수 있는데, Caldwell과 Kwan(2004) 또는 Yoon과 Kim(2007d)을 참고할 수 있다. 400(=40×10)개 절점모델에 대해, Δt = 0.0037를 적용하여 400단계의 해석을 수행했다.

Fig. 3에는 2차원화한 반무한 공간 융해문제를 수치해석하여 얻은 시간에 따른 계면경계의 위치를 이론해와 함께 도시했다. 시간이 경과함에 따라 계면경계의 이동속도가 증가되는 추세가 감소하여 제곱근 함수의 형태를 띠고 있으며, 이론해와 서로 잘 일치하고 있다. Fig. 4는 400개 절점모델 위에 0.05초 간격으로 추출된 계면경계의 위치를 표시했다. 계면경계가 Neumann 경계에 대해 수직을 이루는 동시에 직선모양을 잘 유지하면서 이동하는 것과 계면경계의 이동속도가 점점 감소하는 것을 확인할 수 있다. Fig. 5는 326 단계의 계산이 진행된 후(t=1.2초 경과 후)에서 계산된 온도분포인데, 계면경계에서 온도가 갑작스럽게 변화하는 모습을

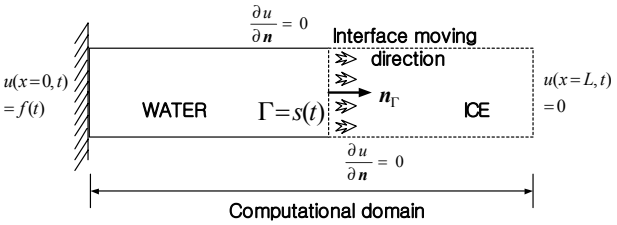

Fig. 2 2-D illustration for 1-D ice melting problem

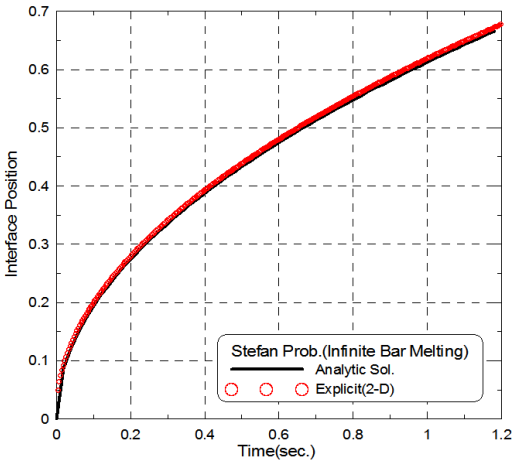

Fig. 3 Interface position with respect to time variation (melting of semi infinite slab)

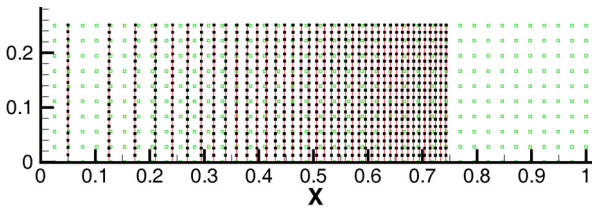

Fig. 4 Trajectories of interface shape with respect to constant time interval(taken at every 0.074 sec.)

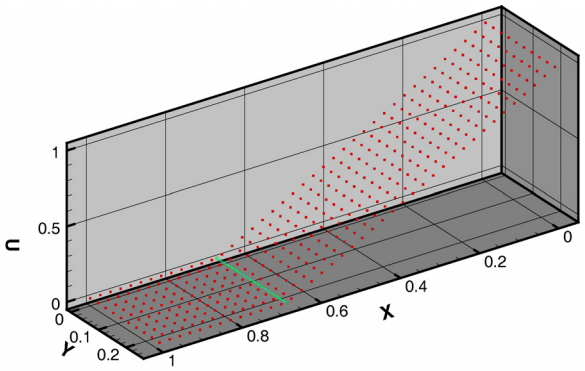

Fig. 5 Surface plot of temperature with the interface position at 1.2 sec. for 400-node model

정확히 묘사하고 있다. 결국, 규칙적으로 분포된 절점만으로도 계면경계가 자유롭게 이동하면서 발생하는 물리현상을 정확하게 모사할 수 있음을 알 수 있다.

4.2 실린더 융해문제

본 절에서는 Fig. 1과 같은 2차원 실린더 형상의 얼음 융해문제를 해석한다. 이 문제는 알려진 이론해가 없기 때문에 기존의 1차원 문제에 대해 검증된 Yoon 등(2009)이 계산한 결과와 비교를 통해 검증했다. 수치계산시 $\alpha=0.2$, 실린더 외부의 Dirichlet 경계조건은 $\bar{u}=0$를 적용했으며, 528개와 2208개의 절점을 사용한 두 가지 모델을 사용했고, 계면경계의 이산화를 위해 각각 50개의 세그먼트와 100개의 세그먼트를 사용했다. Δt는 528 절점모델의 경우 0.0368초, 2208 절점모델의 경우 0.0337초를 적용했다.

Fig. 6에는 검증을 위해 시간에 따른 얼음 실린더의 직경 변화를 41개, 81개 절점모델을 사용한 1차원 해석결과와 함께 비교했으며, 2차원 계산의 경우, 계면경계 세그먼트 꼭지점 반경의 평균값을 직경값으로 사용했다. 1차원, 2차원 그리고 절점의 개수에 관계없이 서로 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 7~8에는 528 절점모델에서 50단계의 계산이 진행된 후($t=1.65$초 경과후)의 해석영역의 온도분포와 그라디언트의 x-방향 성분을 보여준다. 계면경계를 지나면서 온도의 쐐기형상과 그라디언트 성분의 불연속(jump)현상이 진동(oscillation)이나 smearing없이 날카롭게 묘사되는 것을 확인할 수 있다. Fig. 9는 0.184초 간격으로 추출한 계면경계의 형상인데, 시간이 경과하면서 융해속도가 둔화되는 것과 실린더 형상의 얼음이 원형을 잘 유지하면서 안정적으로 녹아 들어가는 것을 볼 수 있다. 만약, 계면경계 세그먼트 꼭지점에서 계산되는 이동속도가 정확하다면, 꼭지점들의 이동속도에 차이가 생겨 계면경계의 위상변화 추적시 오차가 누적되고 수직벡터가 정확히 정의되지 못해 원형을 유지하기 어려우나, 본 절에서는 정확한 계산이 이루어지는 것을 확인할 수 있다.

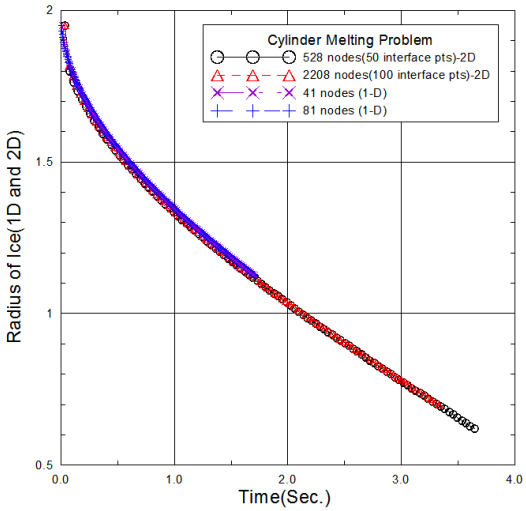

Fig. 6 Comparison of radius changes of the ice cylinder with respect to time variation

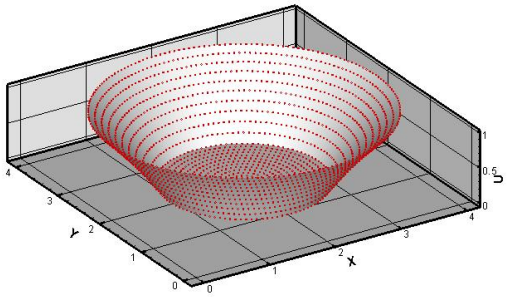

Fig. 7 Surface plot of temperature at 1.65 sec. for 528-node model

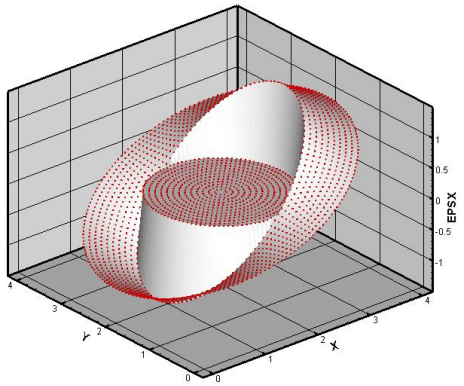

Fig. 8 Surface plot of temperature gradient(x-directional component) at 1.65 sec. for 528-node model

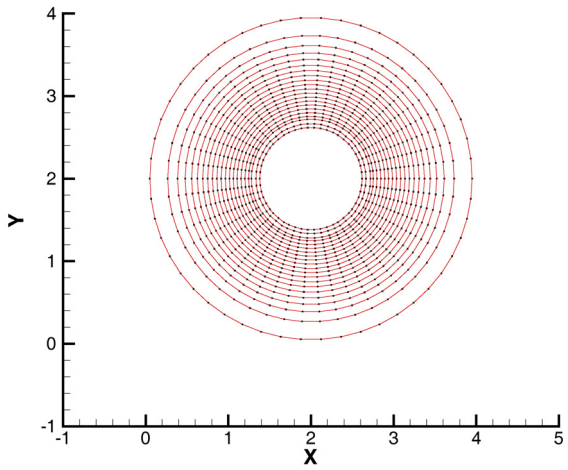

Fig. 9 Trajectories of interface shape with respect to constant time interval for 528-node model (taken at every 0.184 sec.)

4.3 복잡한 계면경계 형상을 갖는 이동경계문제

본 절에서는 보다 복잡한 형상의 계면경계를 갖는 융해문

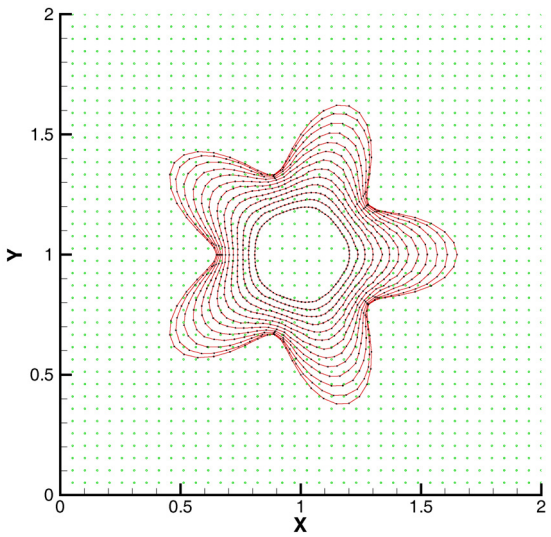

Fig. 10 Trajectories of interface shape with respect to constant time interval(taken at every 0.05 sec.) for 1600-node model

제를 해석했다. Fig. 10과 같이 정사각형 영역에 1600(40×40)개 절점을 배치하고, 계면경계는 80개의 세그먼트로 나눈 후, 가지(branch)가 5개인 별(star) 모양의 초기형상을 갖는 얼음판이 녹아가는 과정을 모사했다. 해석을 위한 각종 파라메터 값들은 4.2절과 동일하게 적용했다. 이와 같은 문제는 일반적인 볼록한(convex) 형상의 계면경계가 아니기 때문에 계면경계의 국부적인 형상 즉, 주로 곡률반경의 부호와 크기에 따라 수직방향의 융해속도에 큰 차이가 발생하고, 매 해석단계에서 수직벡터가 정확하게 계산되지 못하면 계면경계의 위상변화가 일정한 패턴(pattern)을 벗어나 불규칙해지고, 또 세그먼트 꼭지점의 위치가 서로 엉키게 되어 수치해석이 불가능해지기 쉽다.

Fig. 10은 0.05초 간격으로 추출된 계면경계의 형상을 보여준다. 이 문제는 별 모양 초기형상으로 인해 곡률값에 따라 계면경계의 이동속도에 차이가 발생한다. 즉, 돌출된 부분은 빠르게 녹아 들어가는 반면, 오목한 부분은 상대적으로 천천히 녹는 물리적 특성을 갖고 있다. 해석결과를 보면 시간이 경과할수록 볼록한 부분과 오목한 부분의 차이가 줄면서 점차 원형에 가까운 형태로 변해가며 안정적으로 녹아들어 가는 것을 볼 수 있다. 이 문제의 이론해는 알려져 있지 않아 정량적인 수치검증은 어렵지만, 실제 현상(physics)을 고려할 때 예상이 가능한 융해과정이고, 본 절의 수치해석 결과는 그러한 예상과 잘 부합하고 있다. 따라서 본 연구의 수치기법이 이와 같이 복잡한 형상의 계면경계를 갖는 이동경계문제에도 효과적으로 적용될 수 있음을 확인했다.

4. 결 론

본 연구에서는 기존에 1차원 Stefan 문제의 해석을 위해 개발되었던 이동최소제곱 차분법을 2차원 문제로 확장하여 이동경계가 복잡한 기하학적 형상을 갖는 Stefan 문제까지 해석할 수 있는 이동최소제곱 차분법을 개발했다. 2차원 공간상에서도 계면경계의 미분불연속 특이성과 kinetics 관계식을 동시에 만족시킬 수 있도록 이동최소제곱 미분근사식를 제시했다. 유한요소법뿐만 아니라 유한차분법도 이동경계의 kinetics 방정식을 만족시키기 위해 Level Set Method 같은 추가적인 수치기법의 도입이 필요하지만, 본 연구에서는 근사함수가 미분불연속 특이성과 kinetics 조건식을 동시에 만족시키기 때문에 효과적으로 이동경계문제를 해석할 수 있다.

또한, 1차원 문제와 달리 2차원 문제의 경우 계면경계의 위상변화 추적을 위해 세그먼트화(化)된 계면경계의 수직미분 정의와 update 기법이 중요한데, 본 연구에서 제안된 계면경계 모델링방법이 2차원 융해문제에서 성공적으로 작동하는 것을 확인했다. 이동경계문제의 평형방정식은 수치적으로 안정적인 음해법(implicit scheme)을 사용하여 차분했고, 이동경계는 양해법(explicit scheme)으로 update 함으로써 전체 계방정식의 해석 효율성이 극대화될 수 있도록 했다. 즉, 비선형 시스템의 구성되는 것을 효과적으로 피하는 동시에 우수한 정확도를 확보할 수 있도록 해석 알고리즘을 개발했다.

수치예제를 해석한 결과, 이론해가 알려진 문제에 대해 정확히 계산될 뿐만 아니라, 초기의 계면경계 형상이 상당히 복잡한 경우에도 해석의 정확도를 잘 유지하면서 이동경계의 기하학적 위상변화를 효과적으로 추적할 수 있음을 보였다. 본 연구에서 개발된 수치기법은 유체-고체 또는 유체-유체 상호작용 문제와 같은 보다 난이도가 있는 문제에 확장되어 적용이 가능하다고 판단되며 추후에 이에 대한 연구를 진행하고자 한다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단 기초연구사업의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2010-0006050).

참 고 문 헌

Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994) Element-Free Galerkin Methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229~256.

Caldwell, J., Kwan, Y.Y. (2004) Numerical Methods for One-dimensional Stefan Problems, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20, pp.535~545.

Chen, S., Merriman, B. Osher, S., Smereka, P. (1997) A Simple Level Set Method for Solving Stefan Problem, *Journal of Computational Physics*, 135, pp.8~29.

Chessa, J., Smolinski, P., Belytschko, T. (2002) The Extended Finite Element Method (XFEM) for Solidification Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, pp.1959~1977.

Javierre, E., Vuik, C., Vermolen, F.J., van der Zwaag, S. (2006) A Comparison of Numerical Models for One-dimensional Stefan Problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 192, pp.445~459.

Juric D., Tryggvason, G. (1996) A Front-tracking Method for Dendritic Solidification, *Journal of Computational Physics*, 123, pp.127~148.

Kim, D.W., Yoon, Y.-C., Liu, W.K., Belytschko, T. (2007a) Extrinsic Meshfree Approximation Using Asymptotic Expansion for Interfacial Discontinuity of Derivative, *Journal of Computational Physics*, 221, pp.370-394.

Kim, D.W., Yoon, Y.-C., Liu, W.K., Belytschko, T., Lee, S.-H. (2007b) Meshfree Collocation Method with Intrinsic Enrichment for Interface Problems, *Computational Mechanics*, 40(6), pp.1037~1052.

LeVeque, R.J., Li, Z. (1994) The Immersed Interface Method for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients and Singular Sources, *SIAM J. Numer. Anal.* 31, pp.1019~1044.

Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T. (1999) A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1), pp.131~150.

Osher, S., Sethian, J.A. (1988) Fronts Propagating with Curvature-dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations, *Journal of Computational Physics*, 79, pp.12~49

Tu, C., Peskin, C.S. (1992) Stability and Instability in the Computation of Flows with Moving Immersed Boundaries: A Comparison of Three Methods, *SIAM J. SCi. Statist. Comput.* 13, pp.1361~1376.

Voller, V.R., Swenson, J.B., Paola, C. (2004) An Analytical Solution for a Stefan Problem with Variable Latent Heat, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, pp.5387~5390.

Yoon, Y.-C., Kim, D.-J., Lee, S.-H. (2007a) A Gridless Finite Difference Method for Elastic Crack Analysis, *J. Comput. Struct. Eng.*, 20(3), pp.321~327.

Yoon, Y.-C., Kim, D.-W. (2007d) Heat Transfer Analysis of Bi-Material Problem with Interfacial Boundary Using Moving Least Squares Finite Difference Method, *J. Comput. Struct. Eng.*, 20(6), pp.779~787.

Yoon, Y.-C., Kim, D.-W. (2009) Analysis of Moving Boundary Problem Using Extended Moving Least Squares Finite Difference Method, *J. Comput. Struct. Eng.*, 22(4), pp.315~322.

Yoon, Y.-C., Kim, H.-J., Kim, D.-J. Liu, W.K., Belytschko, T., Lee, S.-H. (2007b) Analysis of Stress Concentration Problems Using Moving Least Squares Finite Difference Method (I): Formulation for Solid Mechanics Problem, *J. Comput. Struct. Eng.*, 20(4), pp.493~499.

Yoon, Y.-C., Kim, H.-J., Kim, D.-J. Liu, W.K., Belytschko, T., Lee, S.-H. (2007c) Analysis of Stress Concentration Problems Using Moving Least Squares Finite Difference Method (II): Application to crack and localization band Problems, *J. Comput. Struct. Eng.*, 20(4), pp.501~507.

Yoon, Y.-C., Noh, H.-C. (2011) Extended MLS Difference Method for Potential Problem with Weak and Strong Discontinuities, *J. Comput. Struct. Eng.*, 24(5), pp.577~588.

요 지

본 논문은 기존의 1차원 Stefan 문제를 해석할 수 있는 이동최소제곱 차분법을 확장하여 복잡한 계면경계 형상을 갖는 2차원 문제에 적용할 수 있는 수치기법을 개발한다. 1차원 경우와 달리 2차원 영역에서 임의로 움직이는 이동경계의 위상변화를 효과적으로 모델링할 수 있는 기법을 제안했으며, 이동경계 모사시 절점만 사용하는 이동최소제곱 차분법의 강점을 그대로 살리면서 이동경계의 불연속 특이성과 kinetics 조건을 정확하게 만족시키는 이동최소제곱 미분근사식을 제시했다. 평형방정식은 implicit(음해)법으로 차분하여 수치 안정성을 확보했으며, 이동경계는 explicit(양해)법으로 update하여 계산효율성의 극대화했다. 몇 가지 수치예제를 통해 개발된 이동최소제곱 차분법이 다양한 계면경계 형상을 갖는 2차원 Stefan 문제를 정확하고 효율적으로 풀 수 있음을 검증했다.

핵심용어 : 이동최소제곱 차분법, 이동경계, 위상변화, 음해법, 양해법, 2차원 Stefan 문제