

경사 종동력을 받는 변단면 기하 비선형 캔틸레버 기둥의 수치해석

이 병 구¹ · 오 상 진² · 이 태 은^{1*}

¹원광대학교 토목환경공학과, ²전남도립대학 토목환경과

Geometrical Non-linear Analyses of Tapered Cantilever Column Subjected to Sub-tangential Follower Force

Byoung-Koo Lee¹, Sang-Jin Oh² and Tae-Eun Lee^{1*}

¹Department of Civil and Environmental Engineering, Wonkwang University, Iksan, 570-749, Republic of Korea

²Department of Civil and Environmental Engineering, Jeonnam Provincial College, Damyang, 517-802, Republic of Korea

Abstract

This paper deals with geometrical non-linear analyses of the tapered cantilever column subjected to the sub-tangential follower force at the free end. Cross-sections of the column whose flexural rigidities are functionally varied with the axial coordinate. The differential equations governing the elastica of such column are derived on the basis of the large deformation theory. These differential equations have three unknown parameters of the vertical and horizontal deflections and rotation at the free end. These differential equations are numerically solved by the iteration technique for obtaining three unknowns and elastica of the deformed column. For validating theories developed herein, laboratory scaled experiments are conducted.

Keywords : geometrical non-linear column, tapered column, large deformation theory, sub-tangential follower force, experiments

1. 서 론

기둥은 보, 평판, 곡선부재 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 그에 대한 정적, 동적거동에 관한 연구가 많이 이루어졌다. 구조물에 작용하는 하중은 보존력과 비보존력으로 구분할 수 있다. Fig. 1(a)는 기둥에 작용하는 보존력을 나타내고, Fig. 1(b), (c)는 비보존적인 종동력을 나타낸다. Fig. 1(a)의 하중은 평형을 이룬 후에도 하중방향이 원래의 방향을 유지하는 보존력이다. 중력에 의한 하중은 보존력이며 수압, 풍압 등이 보존력이다. 한편, Fig. 1(b), (c)의 하중은 평형을 이룬 후에 하중방향이 구조물과 이루고 있는 원래의 방향을 유지하며 이러한 하중이 비보존력이다. Fig. 1(b), (c)의 기둥에 작용하는 하중이 비보존적인 종동력이다. Fig. 1(b)의 종동력은 평형상태에서 하중방향과 구조물의 접선방향이 일치하는 접선 종동력(tangential

follower force)이고, Fig. 1(c)의 종동력은 하중과 구조물의 접선방향이 원래의 경사각을 유지하는 경사 종동력(sub-tangential follower force)이다.

Beck(1952)이 Fig. 1(b)에 보인 바와 같이 접선 종동력을 받는 캔틸레버 기둥의 임계하중을 처음으로 구한 이후에 비보존적인 종동력을 받는 기둥의 안정특성에 관한 연구가 이루어졌다(Kounadis *et al.*, 1976; Sankaran *et al.*, 1976; Pedersen 1977; Chen *et al.*, 1992; Kuo *et al.*, 1994; Sato 1996; Ryu *et al.*, 1997; Langthjem *et al.*, 1999; Lee *et al.*, 2005). 그럼에도 불구하고 비보존적인 종동력은 자연계에서는 발생할 수 없기 때문에 종동력의 실현성 여부에 관한 논란들이 끊임없이 제기되었다(Koiter 1996). 그러나 최근에는 정교하게 하중의 방향을 제어할 수 있는 제어 기술의 발달로 실제 구조물에서도 종동력을 구현할 수 있게 되었다(Sugiyama *et al.*, 1999).

* Corresponding author:

Tel: +82-63-850-6718; E-mail: telee@wku.ac.kr
Received May 8 2012; Revised November 12 2012;
Accepted December 13 2012

©2013 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

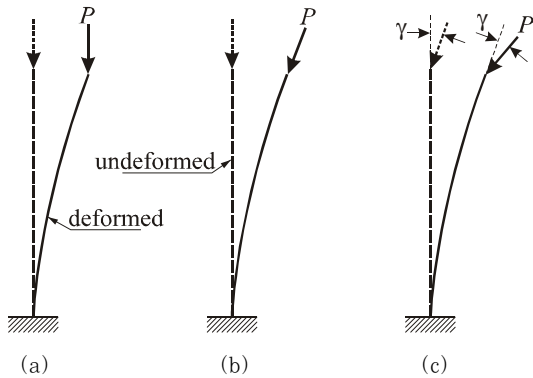


Fig. 1 (a) conservative force, (b) tangential follower force and (c) sub-tangential follower force

이 연구는 Fig. 1(c)와 같이 자유단에 경사 종동력이 작용하는 캔틸레버 기둥의 정적거동에 관한 연구이다. 이 기둥은 경사 하중을 받기 때문에 하중을 받는 순간에 변위가 발생하므로 좌굴하중은 산정할 수 없다. 이러한 관점에서 이 연구는 기둥이 평형상태를 이룬 후에 기하 비선형 거동을 해석하는데 연구목적이 있다. 기둥의 단면은 휨 강성이 부재축을 따라 함수적으로 변화하는 변단면으로 선택하였다. 이러한 기둥의 기하 비선형 거동을 지배하는 미분방정식을 대변형 이론으로 유도하였다. 이 연구에서 미분방정식은 자유단의 수직변위, 수평변위 및 회전각 등 모두 3개의 미지변수를 갖는다. 미지변수가 2개 이상인 구조물에서는 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi법으로 미지변수를 산정할 수 없기 때문에 컴퓨터 언어에서 일반적으로 사용되고 있는 반복법을 이용하여 미지변수를 산정하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였다. 이 연구에서 개발한 이론을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실행하였다. 이 연구에서 기둥의 재료는 선형 탄성체이고, 기둥 축은 비압축성으로 가정하였다.

2. 변단면 부재

Fig. 2는 지간길이가 l 인 캔틸레버 기둥의 변단면 부재를 나타낸다. 하중이 재하되기 이전에는 점선으로 그려진 연직 방향 좌표 x 와 역시 점선으로 표현된 기둥의 축방향 좌표 s 는 서로 일치한다. 기둥의 고정지점 $A(x=s=0)$ 에서 단면2차모멘트는 I_A 이고, 자유단 $B(x=s=l)$ 에서 단면2차모멘트는 I_B 이다. 기둥의 고정단으로부터 기둥의 곡선축을 따라 측정된 임의점 s 에서 단면2차모멘트 I 는 함수식에 따라 변화하는 변단면을 채택하였다.

기둥이 하중을 받아 평형상태를 이루면 기둥의 축은 x 축으로부터 횡방향 변위 y 가 발생하여 정확탄성 곡선을 이룬

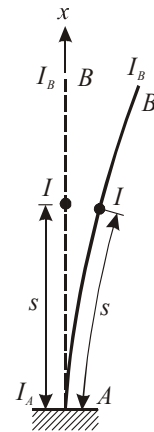


Fig. 2 Moment of inertia of column

다. 따라서 실선으로 표시된 정확탄성곡선의 s 축과 수직축인 x 축은 더이상 일치하지 않지만 기둥의 비압축성 때문에 자유단 $B (s=l)$ 에서 $I=I_B$ 를 유지한다.

축방향길이 s 에서 단면2차모멘트 I 를 함수식으로 나타내기 위하여 단면비 k 를 다음과 같이 정의한다.

$$k = \frac{I_B}{I_A} \leq 1 \tag{1}$$

변단면의 단면2차모멘트 I 는 어떠한 임의의 함수식으로도 채택이 가능하지만, 각종 단면형상에 대하여 일반적으로 적용할 수 있기 때문에 많은 연구자들이 채택하고 있는 다음과 같은 변단면 식을 채택하였다(Gupta 1985).

$$I = I_A \left[(k^{1/e} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^e \tag{2}$$

여기서, e 는 단면형상에 따라 결정되는 형상계수이며, 예로서 직사각형 단면인 경우에 e 는 다음과 같다.

- $e = 1$: 폭 변단면 (3a)
- $e = 3$: 깊이 변단면 (3b)
- $e = 4$: 정방형 변단면 (3c)

3. 수학적 모형

3.1 대변형 이론

Fig. 3은 지간길이가 l 인 캔틸레버 기둥에 경사변수(sub-tangential parameter) 즉, 기둥 축에 대하여 경사각이 γ 인 종동력 P 를 받아 평형상태를 이룬 정확탄성곡선을 나타

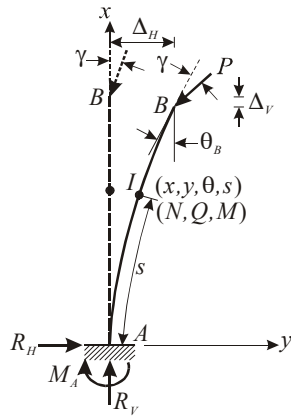


Fig. 3 Parameters of elastica

낸다. 경사 중동력 P 의 방향은 평형상태를 이룬 후에도 자유단 접선방향과 경사각 γ 를 유지한다. 기둥 축은 비압축성이기 때문에 자유단에서 정확탄성곡선의 곡선길이는 l 을 유지한다. 정확탄성곡선은 직교좌표계 (x, y) 에서 정의되며, (x, y) 에서 곡선길이는 s 이고, 회전각은 θ 이다. N, Q, M 은 (x, y) 에서 축방향력, 전단력 및 휨 모멘트를 나타낸다. (x, y) 즉 정확탄성곡선 상의 곡선길이 s 에서 단면2차모멘트 I 는 식 (2)에 표현되어 있다. 고정지점 A에서 수직 반력, 수평반력 및 모멘트 반력은 각각 R_V, R_H, M_A 이다. 정확탄성곡선의 자유단 수직변위, 수평변위 및 회전각은 $\Delta_V, \Delta_H, \theta_B$ 이다.

Fig. 3에서 $\Delta_V, \Delta_H, \theta_B$ 를 미지수로 고정지점 A의 반력 R_V, R_H, M_A 를 구하면 다음과 같다.

$$R_V = P \sin \alpha \tag{4a}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_B - \gamma \tag{4b}$$

$$R_H = P \cos \alpha = \sqrt{P^2 - R_V^2} \tag{5}$$

$$M_A = R_H(l - \Delta_V) - R_V \Delta_H \tag{6}$$

합응력 N, Q, M 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N = R_H \sin \theta + R_V \cos \theta, \quad 0 \leq s \leq l \tag{7}$$

$$Q = R_H \cos \theta - R_V \sin \theta, \quad 0 \leq s \leq l \tag{8}$$

$$M = M_A - R_H x + R_V y, \quad 0 \leq s \leq l \tag{9}$$

Fig. 4는 대변형 이론에 의한 기둥 요소에 대한 휨-곡률 관계를 나타낸다(Gere *et al.*, 1997). 이 그림에서 ρ 는 곡률반경이다. 이 그림으로부터 다음과 같은 기하 비선형 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad 0 \leq s \leq l \tag{10}$$

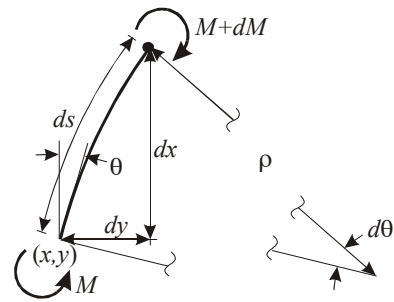


Fig. 4 Bending-Curvature relationship of column element

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta, \quad 0 \leq s \leq l \tag{11}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI}, \quad 0 \leq s \leq l \tag{12}$$

식 (12)의 휨-곡률 관계식에 식 (2), (9)를 대입하면 다음과 같은 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_A - R_H x + R_V y}{EI_A \left[(k^{1/c} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^c}, \quad 0 \leq s \leq l \tag{13}$$

위의 식 (13)에서 R_V, R_H, M_A 는 식 (4)~(6)에 $\theta_B, \Delta_V, \Delta_H$ 를 미지수로 표현되어 있다.

3.2 무차원 지배미분방정식

이 연구에서 기하 비선형 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\lambda = \frac{s}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l} \tag{14} \sim (16)$$

$$\delta_V = \frac{\Delta_V}{l}, \quad \delta_H = \frac{\Delta_H}{l} \tag{17}, (18)$$

$$p = \frac{Pl^2}{EI_A} \tag{19}$$

$$r_V = \frac{R_V l^2}{EI_A} = p \sin \alpha \tag{20}$$

$$r_H = \frac{R_H l^2}{EI_A} = p \cos \alpha = \sqrt{p^2 - r_V^2} \tag{21}$$

$$m_A = \frac{M_A l}{EI_A} = r_H(1 - \delta_V) - r_V \delta_H \tag{22}$$

$$n = \frac{Nl^2}{EI_A} = r_H \sin \theta + r_V \cos \theta \tag{23}$$

$$q = \frac{Ql^2}{EI_A} = r_H \cos \theta - r_V \sin \theta \quad (24)$$

$$m = \frac{Ml}{EI_A} = m_A - r_H \xi + r_V \eta \quad (25)$$

여기서, (λ, ξ, η) 는 (s, x, y) 를 지간길이 l 로 정규화한 무차원 길이변수이며, 정확탄성곡선은 직교좌표계 (ξ, η) 에서 정의된다. δ_V, δ_H 는 자유단의 무차원 수직, 수평 변위이다. p 는 무차원 하중이고, r_V, r_H, m_A 는 무차원 반력, (n, q, m) 은 무차원 합응력이다. 식 (22)~(25)에서 r_V, r_H 는 θ_B 를 미지수로 식 (20), (21)에 표현되어 있다.

이제 식 (10), (11), (13)에 식 (14)~(22)의 무차원 변수를 대입하고 정리하면 경사 종동력을 받는 변단면 기하 비선형 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \cos \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (26)$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = \sin \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (27)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m_A - r_H \xi + r_V \eta}{[(k^{1/e} - 1)\lambda + 1]^c}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (28)$$

위의 식 (28)에는 식 (21)~(22)에서 나타낸 바와 같이 자유단의 미지변수 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 가 포함되어 있다.

3.3 경계조건

식 (26)~(28)의 미분방정식을 수치해석하기 위해서는 경계조건이 필요하다. 먼저, $s=0$ 의 고정지점 A에서 수직 변위 $x=0$, 수평 변위 $y=0$, 회전각 $\theta=0$ 이다. 식 (14)~(16)의 무차원 변수를 이용하면 $\lambda=0$ 에서 다음과 같은 무차원 초기 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\xi_{\lambda=0} = 0, \quad \eta_{\lambda=0} = 0, \quad \theta_{\lambda=0} = 0 \quad (29) \sim (31)$$

미분방정식의 수치적분은 초기치 문제이므로 식 (29)~(31)의 경계조건으로 미분방정식 (26)~(28)의 수치적분을 시행할 수 있다.

둘째로 $s=l$ 의 자유단 B에서 (x, y, θ) 는 각각 $x=l-\Delta_V, y=\Delta_H, \theta=\theta_B$ 이다. 식 (14)~(16)의 무차원 변수를 이용하면 $\lambda=1$ 의 자유단에서 다음과 같은 무차원 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\xi_{\lambda=1} = 1 - \delta_V, \quad \eta_{\lambda=1} = \delta_H, \quad \theta_{\lambda=1} = \theta_B \quad (32) \sim (34)$$

미분방정식에서 미지변수인 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 는 수치해이기 때문에 식 (32)~(34)의 경계조건을 정확하게 만족하는 해를 구할 수 없다. 이 연구에서는 다음과 같은 3개의 수렴한계를 두고 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 의 오차가 이 수렴조건을 만족하면 최종 수치해로 확정하였다.

$$|\xi_{\lambda=1} + \delta_V - 1| \leq 1 \times 10^{-5} \quad (35)$$

$$|\eta_{\lambda=1} - \delta_H| \leq 1 \times 10^{-5} \quad (36)$$

$$|\theta_{\lambda=1} - \theta_B| \leq 1 \times 10^{-5} \quad (37)$$

식 (35)~(37)을 더하면 다음과 같은 통합오차 ER 의 수렴조건식을 얻을 수 있다.

$$ER = |\xi_{\lambda=1} + \delta_V - 1| + |\eta_{\lambda=1} - \delta_H| + |\theta_{\lambda=1} - \theta_B| \leq 3 \times 10^{-5} \quad (38)$$

식 (38)의 통합오차 ER 의 구성이 이 연구의 핵심내용 중에 하나이다.

4. 수치해석 방법 및 수렴해석

이 연구에서 유도한 미분방정식 (26)~(28)은 고정지점 $A(\lambda=0)$ 에서 $\xi_{\lambda=0}, \eta_{\lambda=0}, \theta_{\lambda=0}$ 의 모든 초기조건이 식 (29)~(31)과 같이 알려져 있으므로 수치적분을 할 수 있다. 그러나 미분방정식 속에 포함되어 있는 자유단 B의 변위인 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 가 미지수이다. 즉, 주어진 기둥의 입력조건 k, e, γ, p 에 대해서 미분방정식을 푸는 문제는 결국 식 (38)의 통합 수렴조건식을 만족하는 3개의 미지변수 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 를 찾는 문제로 귀결된다.

미분방정식 (26)~(28)의 수치적분은 Runge-Kutta법 (Carnahan *et al.*, 1969)을 이용하였고, 3개의 미지변수 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 는 반복법을 이용하여 산정하였다. Runge-Kutta법에 의한 미분방정식의 수치적분은 다수의 문헌(Lee *et al.*, 2005)에서 그 효율성이 입증된 바 있으므로 수치적분법의 기술은 생략한다.

미지변수 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 를 산정하기 위하여 이 연구에서 적용한 반복법의 계산과정은 다음과 같다.

- 1) 기둥의 해석조건 k, e, γ, p 를 입력한다.
- 2) 먼저, 수직 변위 δ_V 를 가정한다. 이때 δ_V 의 범위는 $0 < \delta_V < 1$ 이 명백하므로 이 범위에서 δ_V 를 일정 증분

$\Delta\delta_V$ 씩 증가시키며 가정한다.

- 3) 둘째, 수평 변위 δ_H 를 가정한다. 이때 δ_H 의 범위는 $0 < \delta_H < 1$ 이 명백하므로 이 범위에서 δ_H 를 일정 증분 $\Delta\delta_H$ 씩 증가시키며 가정한다.
- 4) 셋째, 회전각 θ_B 를 가정한다. 이때 θ_B 의 범위는 $0 < \theta_B < \pi$ 가 명백하므로 이 범위에서 θ_B 를 일정 증분 $\Delta\theta_B$ 씩 증가시키며 가정한다. 이 연구에서 2), 4)의 단계에서 일정 증분 $\Delta\delta_V, \Delta\delta_H, \Delta\theta_B$ 의 값은 해당범위의 1/10로 채택하였다.
- 5) 이제, 미지변수 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 가 모두 정의되었으므로 식 (26)~(28)의 미분방정식을 식 (29)~(31)의 경계조건을 초기치로 하여 $\lambda=0\sim 1$ 사이에서 수치적분을 시행한다.
- 6) 수치적분의 결과로 식 (38)의 통합오차 ER 을 산정한다.
- 7) 2)~6)의 반복시행에서 통합오차 ER 가 최소 통합오차 ER_m 을 갖게 되는 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 을 찾는다. 만일 산정된 ER_m 이 식 (38)을 만족하면 $(\delta_V, \delta_H, \theta_B), (\xi, \eta, \theta), (n, q, m)$ 을 최종 수치해로 출력한다.
- 8) ER_m 이 식 (38)를 만족하지 않으면 이전 단계보다 더 축소된 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 의 범위를 다음과 같이 새롭게 산정한다.

$$\delta_{Vm} - \Delta\delta_V \leq \delta_V \leq \delta_{Vm} + \Delta\delta_V \quad (39)$$

$$\delta_{Hm} - \Delta\delta_H \leq \delta_H \leq \delta_{Hm} + \Delta\delta_H \quad (40)$$

$$\theta_{Bm} - \Delta\theta_B \leq \theta_B \leq \theta_{Bm} + \Delta\theta_B \quad (41)$$

여기서, $\delta_{Vm}, \delta_{Hm}, \theta_{Bm}$ 은 7) 단계에서 결정된 ER_m 값을 갖는 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 이다.

- 9) 새롭게 축소된 범위 내에서 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 값을 이용하여 2)~9)의 과정을 반복 시행한다.

이상의 수치해석 방법은 2개 및 3개의 미지변수를 갖는 기하 비선형 구조의 수치해석에서도 적용될 수 있음을 확인한 바 있다(Lee *et al.*, 2012a, b).

위에서 적용한 해석방법을 예제를 통하여 수치해석의 수렴 과정을 분석하였다. 해석 예에서 사용한 기둥의 무차원 입력 변수는 다음과 같다.

- 단면: $k=0.5, e=1$ (직사각형 폭 변단면)
- 경사 중동력: $\gamma=0.3, p=1$

Fig. 5는 수치해석의 반복회수 i 에 따라 최소 통합오차 ER_m 이 최종 수치해에 도달하는 수렴과정을 보여준다. i 가 증가할수록 ER_m 은 감소하고, $i=7$ 에서 점선으로 나타낸 식

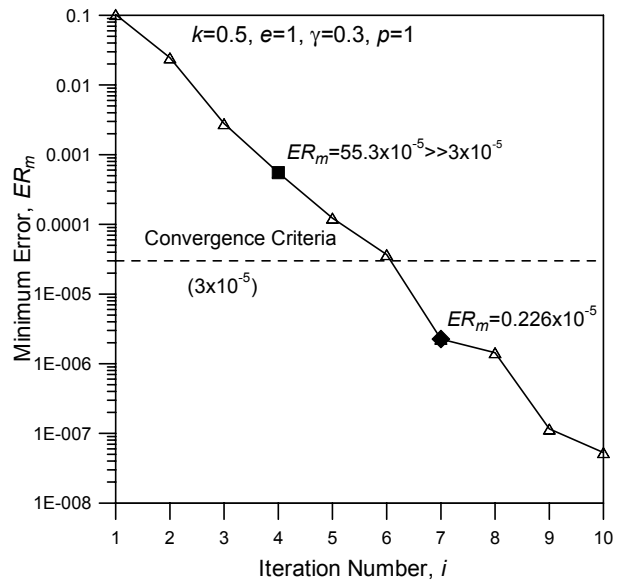


Fig. 5 Convergence of minimum error on iteration number

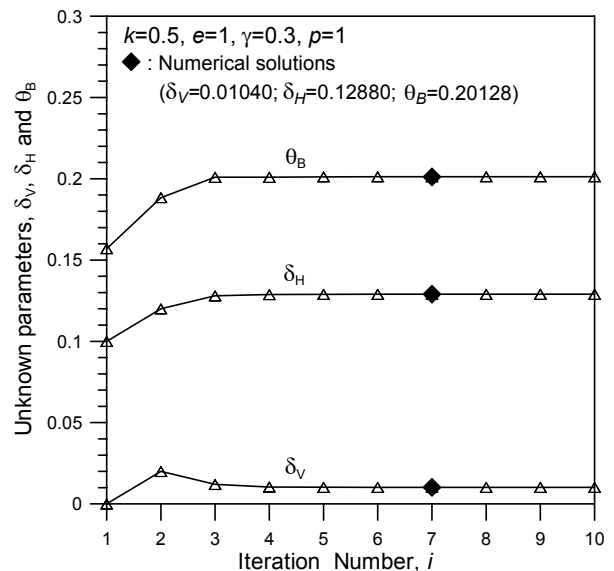


Fig. 6 Convergence of unknown parameters on iteration number

(38)의 수렴한계인 3×10^{-5} 를 넘어선다. 이때 ER_m 은 이 그림에 \blacklozenge 로 나타낸 바와 같이 $ER_m(i=7) = 0.226 \times 10^{-5} < 3 \times 10^{-5}$ 을 보여주고 있다. $i=7$ 이후에도 ER_m 은 계속 감소하여 더 정확한 수치해를 찾을 수 있다. 다른 입력변수들에 대해서도 수치해석을 실행한 결과, $i=6\sim 8$ 회의 반복시행으로 미지변수 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 를 찾을 수 있었다.

Fig. 6은 Fig. 5에서 나타난 반복회수 i 에 따른 미지변수 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 의 수렴과정을 나타낸다. 이 그림에 수렴한계를 최초로 만족하는 $i=7$ 의 최종 수치해를 \blacklozenge 로 표시하였다. 이 그림에서 $i=4$ 에서의 수치해 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 값들도 \blacklozenge 로 표시한

최종 수치해에 거의 수렴한 것을 알 수 있다. 그러나 Fig. 4의 $i=4$ 에서 \blacksquare 로 표시한 $ER_m = 55.3 \times 10^{-5}$ 을 나타내고 있어 수렴한계 3×10^{-5} 에 훨씬 못 미치고 있어서 최종 수치해가 될 수 없다. 이러한 사실은 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 값들의 아주 미세한 차이에도 불구하고 비선형 거동에는 매우 민감하게 작용하여 결과적으로 ER_m 에 큰 영향을 주기 때문이다. Fig. 5에서 $i=8, 9, 10$ 의 ER_m 은 매우 크게 감소하지만 Fig. 6에서 $i=7$ 의 최종 수치해는 $i=10$ 의 수치해에 유효숫자 5자리의 정도로 수렴한 것도 이러한 사실을 뒷받침한다.

5. 수치해석 예 및 토의

이장에서는 기둥의 무차원 변수가 비선형 거동에 미치는 영향을 분석한다.

Table 1은 형상계수 e 가 기둥의 반력 및 변위거동에 미치는 영향을 나타낸다. 이 Table의 왼쪽 난에 기둥의 입력변수를 나타내었다. 반력 r_V 는 $e=1, 3, 4$ 의 순서로 크며, 반력 r_H, m_A 는 이와 반대다. 식 (21)에서와 같이 $p^2 = r_H^2 + r_V^2$ 의 관계의 있으므로 r_V 가 증가하면, r_H 는 감소하기 때문에 r_H 와 r_V 는 기둥의 변수 변화에 대하여 서로 증감에 대한 반대의 거동을 나타낸다. 변위 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 는 $e=1, 3, 4$ 의 순서로 크다. 그러나 이 Table에서 보는 바와 같이 e 의 영향은 매우 작아 반력 및 변위에 미치는 영향은 무시할 만하다.

Fig. 7(a), (b)는 단면비 k 가 반력 및 변위에 미치는 영향을 나타낸다. 이 그림의 상단에 기둥의 입력변수를 나타내었다. Fig. 7(a)에서 k 가 증가하면 반력 r_V 는 증가하고 $r_H,$

Table 1 Effects of shape factor

Given parameter	Responses	$e = 1$	$e = 3$	$e = 4$
$k = 0.5$ $\gamma = 0.3$ $p = 1$	r_V	0.87697	0.87412	0.87374
	r_H	0.48055	0.48571	0.48639
	m_A	0.36251	0.36475	0.36503
	δ_V	0.01020	0.01077	0.01085
	δ_H	0.12901	0.13240	0.13285
	θ_B	0.20128	0.20717	0.20795

m_A 는 감소한다. Fig. 7(b)에서 k 가 증가하면 변위 $\delta_H, \delta_V, \theta_B$ 는 모두 감소한다. 그러나 δ_V 의 감소율은 매우 작아서 그 영향력은 크지 않다.

Fig. 8(a), (b)는 경사변수 γ 가 반력 및 변위에 미치는 영향을 나타낸다. Fig. 8(a)에서 γ 가 증가하면 반력 r_H, m_A 는 증가하고 r_V 는 감소한다. Fig. 8(b)에서 γ 가 증가하면 변위 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 는 모두 증가한다. 이 그림에서와 같이 모든 곡선의 증가율 또는 감소율은 비교적 크기 때문에 γ 가 기둥 거동에 미치는 영향력은 비교적 크다. 따라서 γ 값의 적절한 조절을 통하여 반력과 변위의 기둥거동을 제어하는 것이 유리하다.

Fig. 9(a), (b)는 하중 p 가 반력 및 변위에 미치는 영향을 나타낸다. 하중 p 가 증가하면 모든 거동값들은 증가한다. 따라서 r_H 와 r_V 의 관계에서 Fig. (7), (8)에서와는 다르게 p 가 증가하면 r_H 가 증가하면 r_V 는 감소하지 않고 증가한다. Fig. 9(a)에서 p 가 증가함에 따라 r_H, r_V 는 크게 증가하지만 m_A 는 그 증가율이 현저하게 감소하는 특징을 보인다. Fig. 9(b)에서 p 가 증가함에 따라서 변위 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 는 모두

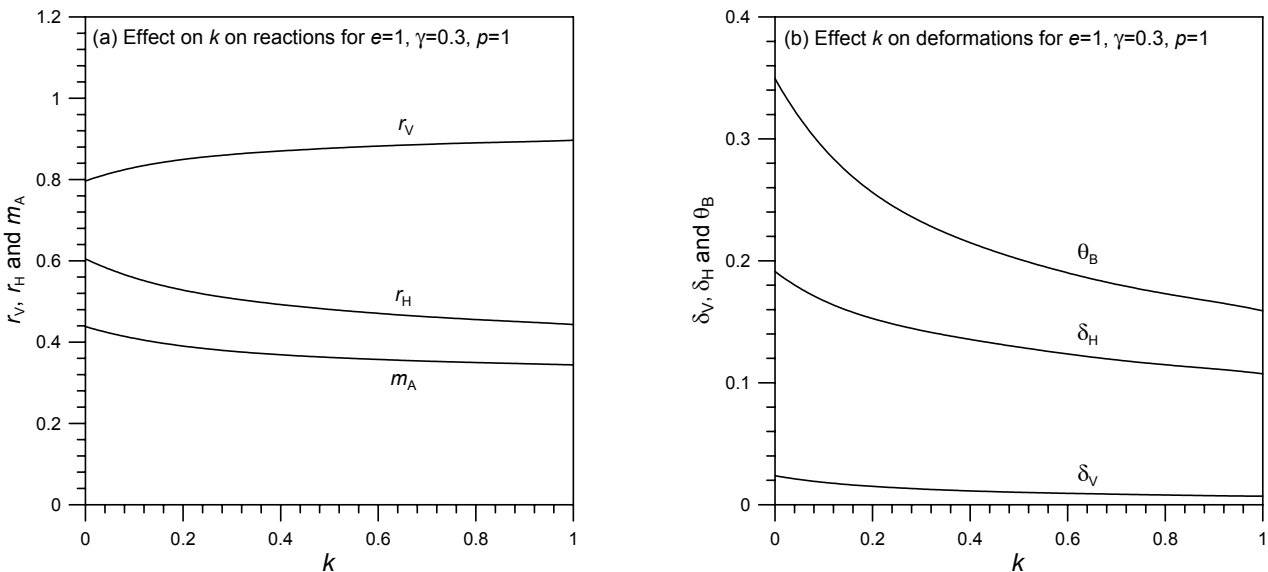


Fig. 7 Section ratio versus reponses curves

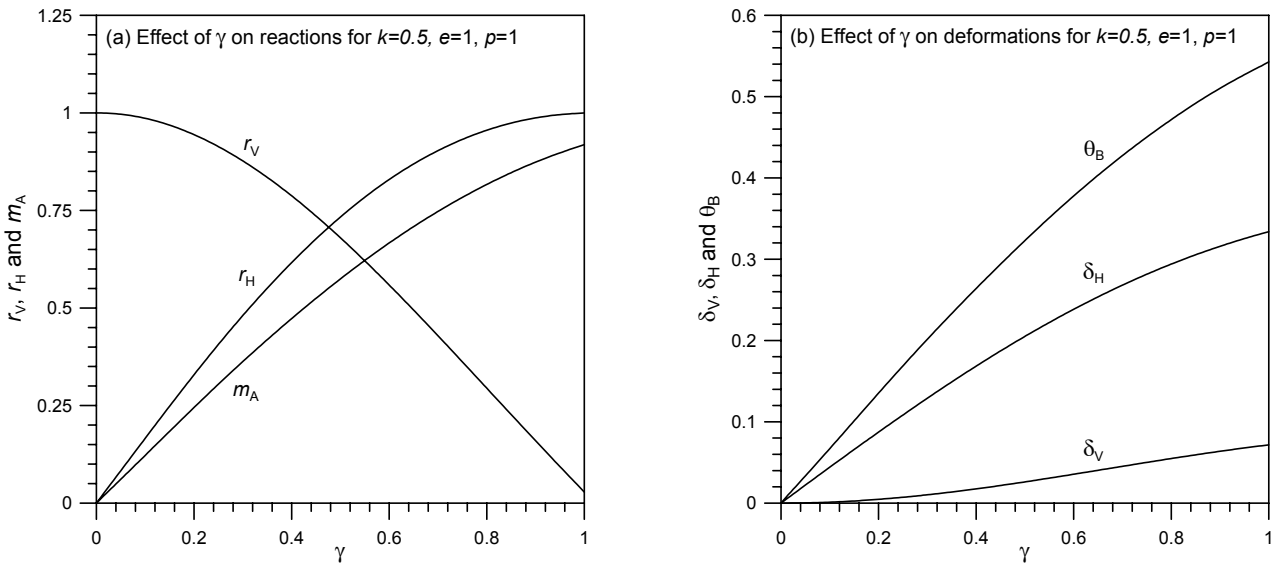


Fig. 8 Sub-tangential parameter versus responses curves

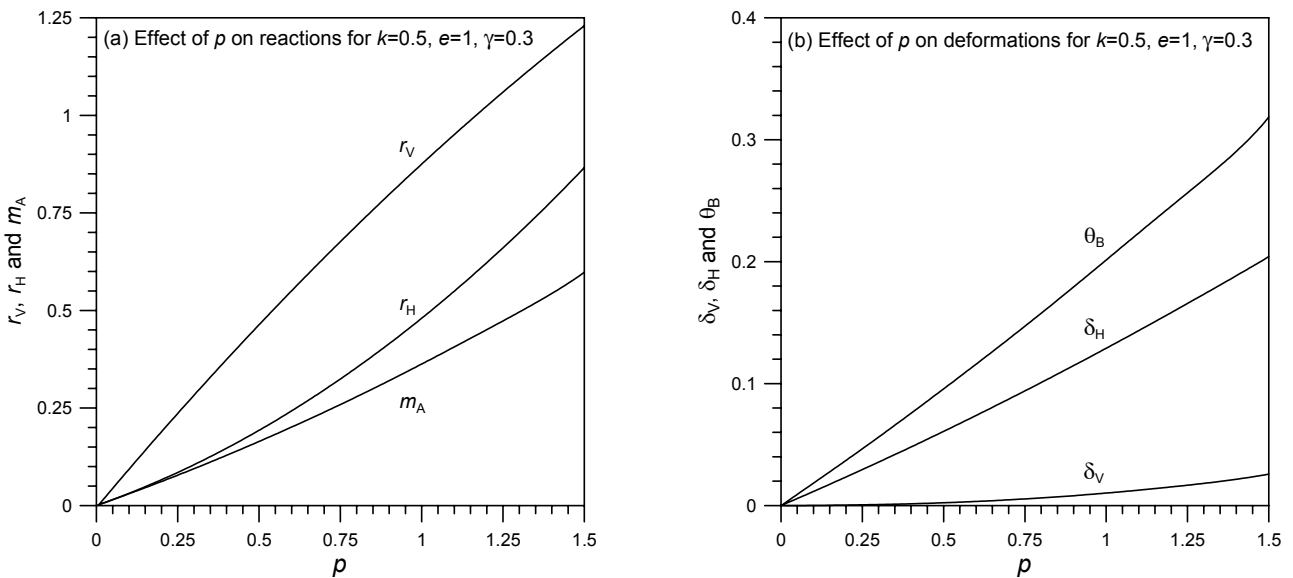


Fig. 9 Load parameter versus responses curves

증가하며 그 증가율들도 계속 증가하는 하중-변위의 관계 즉 기하적 비선형 거동을 나타낸다.

Fig. 10(a), (b)는 각각 경사변수 γ 와 하중 p 가 기둥의 정확탄성곡선에 미치는 영향을 나타낸다. 그림 하단에 기둥의 입력변수를 나타내었다. 이 Fig. 10(a)에서 $\gamma=0.3, 0.5, 0.8$ 로 증가함에 따라서 Fig. 8(b)에서 이미 토의한 바와 같이 변위는 증가하여 주어진 γ 의 순서로 더 크게 처진 정확탄성곡선을 나타낸다. Fig. 10(b)에서 $p=0.5, 1, 1.5$ 로 증가함에 따라서 같은 순서로 더 크게 처진 정확탄성곡선을 나타낸다. 이 그림에서 $p=1.5=0.5+1$ 이지만 중첩의 원리가 적용되지 않는다.

Fig. 11은 접선 종동력을 받는 기둥에 작용하는 합응력 n, q, m 을 나타낸다. 이 기둥의 상단에 기둥의 입력변수를 나타내었다. 이러한 합응력도는 기둥의 단면설계에 매우 중요한 자료이다. 이 연구에서와 같이 과대처짐이론에 적용되는 부재는 세장비가 매우 큰 부재이므로 전단변형의 영향 즉 전단력 q 의 영향은 중요하지 않으므로 단면설계는 축방향력 n 과 휨 모멘트 m 의 지배를 받는다. 이 그림에서 보는 바와 같이 최대 n, m 값은 고정지점에서 발생하지만 식 (2)에서와 같이 단면2차모멘트 I 는 고정지점 A에서 가장 크기 때문에 고정지점에서 가장 큰 수직응력이 발생하지 않을 수도 있다. 따라서 식 (2)의 I 를 이용하여 이 그림의 합응력 n, m

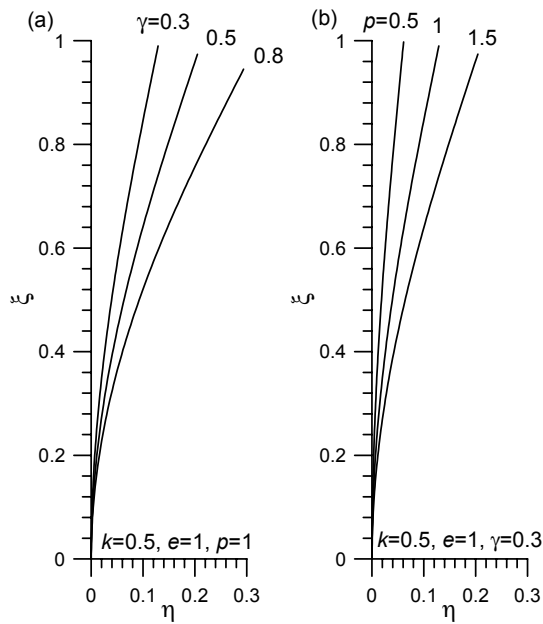


Fig. 10 Elastica

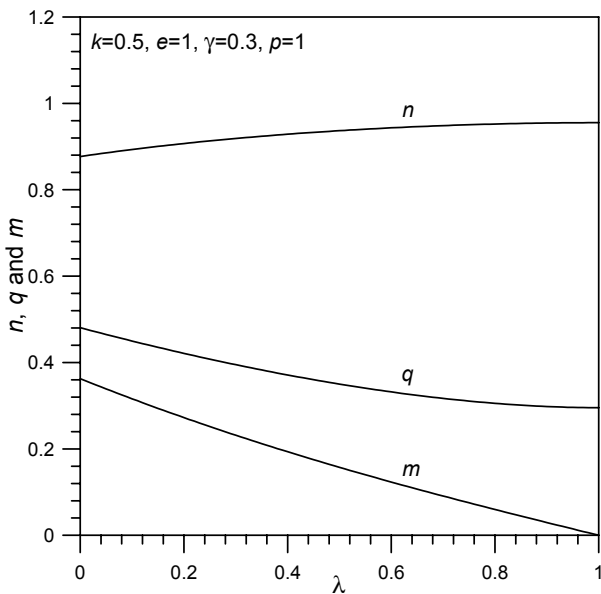


Fig. 11 Stress resultants

으로부터 조합응력을 산정하고 설계응력을 만족하는 I_A , $I_B (=kI_A)$ 를 결정하는 것이 합리적이다.

6. 실험

이 연구에서 전개한 이론, 수치해석 방법 및 컴퓨터 프로그램을 검증하기 위하여 [A], [B] 2조의 모형기둥을 제작하여 실험실 규모의 실험을 실시하고 비선형 거동값을 측정하였다. 실험에 사용한 재료는 모형실험에 적당한 휨 강성을 갖는 플라스틱을 사용하였다. 기둥의 단면은 변단면의 제작

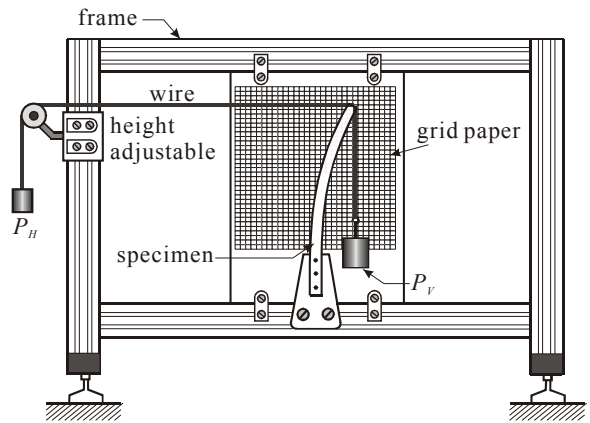


Fig. 12 Schematic diagram of experimental system

Table 2 Comparison of responses between this study and experiment

Specimen	Responses	This study	Experiment	Deviation(%)
[A]	Δ_V (mm)	3.57	4.0	12.0
	Δ_H (mm)	45.15	48.0	7.31
	θ_B (rad)	0.2013	0.215	7.82
[B]	Δ_V (mm)	21.59	23.0	6.53
	Δ_H (mm)	133.05	140.3	5.44
	θ_B (rad)	0.3988	0.425	6.57

이 용이한 변화폭 직사각형 단면을 채택하였다. Fig. 12에 실험장치의 개략도를 나타내었다.

경사 종동력 P 의 구현은 저자들의 실험 장비로는 불가능하다. 따라서 이 연구의 이론을 이용하여 자유단 회전각 θ_B 를 먼저 계산하고 경사 종동력 P 의 수직성분 $P_V = P \sin \alpha$, 수평성분 $P_H = P \cos \alpha$ 를 자유단에 각각 재하하여 경사종동력 P 를 구현하였다. Fig. 12에서와 같이 수직성분 P_V 는 중량추를 이용하여 재하하였고, 수평성분 P_H 는 높낮이 조절이 가능한 도르래를 이용하여 하중 방향을 바꾸어 중량추로 재하하였다. 하중은 매우 천천히 재하하여 모형기둥이 급격하게 변형하지 않고 충분한 안정상태를 유지하며 평형상태에 도달하도록 하였다. 수평, 수직 변위 Δ_V, Δ_H 는 모눈종이를 이용하여 측정하였고, 회전각 θ_B 는 각도기를 이용하여 측정하였다. 이상의 실험방법은 실험장비가 충분치 못한 환경에서 실험을 시행할 수 있는 매우 실용적인 실험법이라 생각한다. 이 실험과 유사한 실험 방법들이 문헌(Wilson, 1993)에 기술되어 있다.

모형기둥 [A], [B]의 제원은 다음과 같다. 기둥의 단면은 변화폭 직사각형 단면 ($e=1$)이고, 기둥 재료의 탄성계수 $E = 3.3 \times 10^3 \text{N/mm}^2$ 이다.

[A] $l = 350 \text{ mm}$

$$I_A = \frac{30 \times 5^3}{12} = 312.5 \text{ mm}^4$$

$$I_B = \frac{15 \times 5^3}{12} = 156.25 \text{ mm}^4 \quad (k=0.5)$$

$$\gamma = 0.3, P = 8.4 \text{ N} \quad (p=1)$$

[B] $l = 500 \text{ mm}$

$$I_A = I_B = \frac{50 \times 5^3}{12} = 520.8 \text{ mm}^4 \quad (k=1)$$

$$\gamma = 0.5, P = 10.5 \text{ N} \quad (p=1.5)$$

위의 조건으로 모형실험을 실시하고 $\Delta_V, \Delta_H, \theta_B$ 을 실차원으로 측정하였다. 위의 입력조건으로 이 연구에서 작성한 프로그램을 이용하여 $\delta_V, \delta_H, \theta_B$ 를 계산하고 무차원 변수인 δ_V, δ_H 은 식 (17), (18)을 이용하여 Δ_V, Δ_H 의 실차원 값으로 환산하였다.

Table 2는 이 연구와 실험으로 얻어진 비선형 거동값을 비교한 Table이다. 모형기둥 [A], [B]의 실험에서 이론과 실험 사이의 평균 오차는 약 7.6%로 근사하게 접근하여 이 연구에서 유도한 미분방정식, 개발된 수치해석 방법 및 작성된 컴퓨터 프로그램의 타당성을 입증할 수 있었다.

6. 결 론

이 연구는 자유단에 경사 종동력을 받는 기하 비선형 변단면 캔틸레버 기둥의 수치해석에 관한 연구이다. 이러한 기둥의 기하 비선형 거동을 지배하는 연립 미분방정식을 대변형 이론을 이용하여 유도하였다. 이 미분방정식을 반복법을 이용하여 미지변수를 산정할 수 있는 수치해석 방법을 개발하였다. 자유단의 경계조건에 대한 각각의 수렴조건식을 하나의 통합 수렴조건식으로 유도하였다. 이 수렴조건식을 이용하여 수치해석한 결과, 8회 미만의 반복시행에서 미지변수의 수치해를 찾을 수 있었다. 이 연구에서 전개한 이론 및 수치해석 방법을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실행하였으며 두 결과는 매우 근접하였다.

참 고 문 헌

- Beck, M.** (1952) Die Knicklast Des Einseitig Eigen-spannten, Tangential Gedruckten Stabes. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, 3, pp. 225~228.
- Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.O.** (1969) Applied Numerical Methods, John Wiley and Sons, USA.
- Chen, L.W., Ku, D.M.** (1992) Eigenvalue Sensitivity in Stability Analysis of Beck's Column with a Concentrated Mass at the Free End, *Journal of Sound and Vibration*, 153, pp.403~411.
- Gere, J.M., Timoshenko, S.P.** (1997) Mechanics of Materials, PWS Publishing Company, USA.
- Gupta, A.K.** (1985) Free Vibrations of Tapered Beam, *Journal of the Structural Division*, ASCE, 11(1), pp.19~36.
- Koiter, W.T.** (1996) Unrealistic Follower Forces, *Journal of Sound and Vibration*, 194, pp.403~411.
- Kounadis, A., Katsikadelis, J.T.** (1976) Shear and Rotatory Inertia Effects on Beck's Column, *Journal of Sound and Vibration*, 49, pp.171~178.
- Kuo, S.R., Yang, Y.B.** (1994) Critical Load Analysis of Undamped Non-conservative Systems using Bi-eigenvalue Curves, *AIAA Journal*, 32 pp.2462~2468.
- Langthjem, A., Sugiyama, Y.** (1999) Optimal Shape Design Against Flutter of a Cantilevered Column with an End-mass of Finite Size Subjected to a Non-conservative Load, *Journal of Sound and Vibration*, 226, pp.1~23.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., Kim, I.J.** (2005) Buckling Loads of Columns with Constant Volume, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 296, pp.381~387.
- Lee, B.K., Oh, S.J., Lee, T.E.** (2012a) Geometrical Non-linear Analyses of Tapered Variable-Arc-Length Beam subjected to Combined Load, *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 25(2), pp.129~138.
- Lee, B.K., Oh, S.J., Lee, T.E.** (2012b) Novel Method for Numerical Analyses of Tapered Geometrical Non-linear Beam with Three Unknown Parameters, *Journal of the Korean Society of Civil Engineers*, 33(1), pp.13~22.
- Lee, B.K., Oh, S.J., Lee, T.E., Kang, H.J.** (2005) Stability Analysis of Tapered Beck Columns with a Tip Mass and an Elastic Spring at the Free End, *Journal of the Korean Society of Civil Engineers*, 25(6A), pp.1157~1162.
- Pedersen, P.** (1977) Influence of Boundary Conditions on the Stability of a Column Under Non-conservative Load, *International Journal of Solids and Structures*, 13, pp.445~455.

- Ryu, B.J., Sugiyama, Y., Lee, G.S.** (1997) The Influence of an Intermediate Support on the Dynamic Stability of Cantilevered Timoshenko Beams Subjected to Sub-tangential Forces, Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference '97, Kyoungju, Korea, pp.163~168.
- Sankaran, G.V., Rao, G.V.** (1976) Stability of Tapered Cantilever Columns Subjected Follower Forces, *Computer & Structures*, 6, pp.217~220.
- Sato, K.** (1996) Instability of an Clamped-elasticly Restrained Timoshenko Column Carrying a Tip Load Subjected to a Follower Force, *Journal of Sound and Vibration*, 194, pp.623~630.
- Sugiyama, Y., Langthjem, M.A., Ryu, B.J.** (1999) Realistic Follower Forces, *Journal of Sound and Vibration*, 225, pp.779~782.
- Wilson, J.F.** (1993) Experiments of the Strength of Solids, McGraw Hill, Inc., USA.

요 지

이 연구는 자유단에 경사 종동력을 받는 변단면 기하 비선형 캔틸레버 기둥의 수치해석에 관한 연구이다. 기둥의 단면은 휨 강성이 부재축을 따라 함수적으로 변화하는 변단면으로 선택하였다. 이러한 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 대변형 이론을 이용하여 유도하였다. 이 미분방정식은 자유단 수직변위, 수평변위 및 회전각의 3개의 미지변수를 갖는다. 이 미분방정식을 반복법으로 수치해석하여 기둥의 미지변수와 정확탄성곡선을 산정하였다. 이 연구의 이론을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실행하였다.

핵심용어 : 기하 비선형 기둥, 변단면 기둥, 대변형 이론, 경사 종동력, 실험