

# 취성재료의 동적파괴 거동 해석을 위한 페리다이나믹 해석

## Peridynamic Analysis for Dynamic Fracture Simulations of Brittle Materials



하 윤 도\*

\*군산대학교 조선공학과 조교수

### 1. 서 론

재료의 파괴 및 손상 예측은 공학 및 과학분야에서 도전적인 문제이며 전산역학 해석분야에서 중요한 연구분야이다. 많은 실험들을 통해 분기 균열, 연쇄 분기 균열, 2차 균열전파 등 다양하고 복잡한 동적취성 파괴 현상들이 보고되어 왔다(Bowden 등, 1967; Ramulu 등, 1983; Ramulu 등, 1985; Ravi-Chandar 등, 1984a, b; Ravi-Chandar, 2004). 취성(brittle) 재료의 균열은 초기에 선형 균열방향으로 일직선으로 전파하다가 균열선단의 조건에 따라 휘어지거나 둘 이상의 가지로 분기하게 된다. 전파하는 균열은 높은 응력 상태에서 연속적인 다중 분기 형태로 전파되면서 때때로 삼각주 패턴으로 파쇄가 일어나기도 한다. 또한 응력파의 간섭으로 균열전파 경로가 변화되거나 이미 존재하는 균열면에 수직으로 2차 균열이 발생하기도 한다.

페리다이나믹(Peridynamic) 해석(Silling, 2000)은 원거리 상관관계(long-range interaction)에 기반을 둔 연속체 기반의 전산해석 방법론으로 취성재료의 동적파괴 해석에 많이 적용되고 있다(Bobaru 등, 2012; Ha 등, 2010, 2011; Hu 등, 2011, 2012, 2013; 하윤도 등, 2011, 2012). 일반적인 연속체 기반 전산역학 해석 방법론과 달리 페리다이나믹 모델에서는 응답의 공간미분을 가정하지 않고, 인접한 영역의 정보를

적분하여 정식화하고 해석한다. 따라서 페리다이나믹 해석은 변위 및 응력의 불연속성이 시간에 따라 변화하는 불연속 문제를 수학적으로 모순없이 정식화하고 해석할 수 있다. 최근의 연구들을 통해 페리다이나믹 해석이 실험적으로 도출된 다양한 동적 균열전파 거동을 엄밀하게 모사하고 설명할 수 있음이 확인되었다.

본 고에서는 페리다이나믹 해석 방법론과 파괴 모델에 대해 소개한다. 페리다이나믹 동적파괴 해석을 통해 응력파가 분기 균열각도와 균열전파 속도에 미치는 영향에 대해 분석하고 실험결과와 비교한다. 또한 페리다이나믹 모델이 실험을 통해 제안된 균열형상, 균열전파 속도, 연쇄 분기 균열, 2차 균열현상 등과 잘 부합됨을 확인한다.

### 2. 페리다이나믹 해석

페리다이나믹 이론은 운동 방정식에서 응력의 미분 대신에 그림 1과 같이 유한한 영역( $H_x$ ) 내에서 절점들의 상호작용력  $f(x, x')$ 를 적분하여 지배방정식을 구성한다(Silling, 2000). 따라서 절점  $x$ 와 시간  $t$ 에서 페리다이나믹 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} f(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

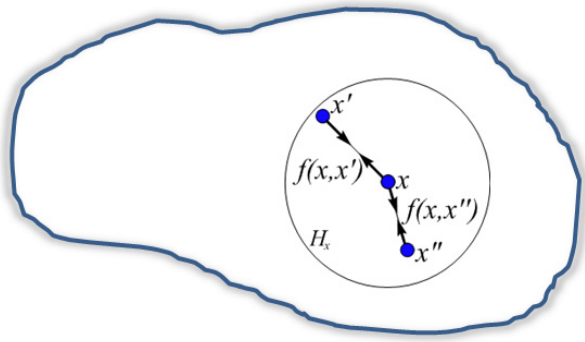


그림 1 페리다이나믹 상호작용과 비국부 영역

여기서,  $f$  는 영역  $H_x$  에 속한 두 절점  $x$  와  $x'$  으로 구성되는 페리다이나믹 결합(bond)에 대한 짝힘(pairwise force) 함수이며,  $u$  는 변위 벡터이다. 또한  $b$  는 체적력,  $\rho$  는 밀도이다. 적분이 정의되는 영역  $H_x$  는 “Horizon”이라고 부르며, 반경  $\delta$  를 가지는 원 또는 일반적으로 임의의 형상을 가질 수 있다. 결론적으로 페리다이나믹 모델은 미분 대신 적분을 사용함으로써 응답의 불연속성을 수학적으로 모순없이 정식화하고 해석할 수 있다. 또한 절점의 특성이 인접한 절점들뿐만 아니라 유한한 범위 내에 흩어져 있는 절점들의 상호 작용으로 구성되는 비국부 모델이 된다.

선형 탄성체에 대한 페리다이나믹 모델에서 각 결합의 재료특성을 결정하는 미소탄성(micro-elastic) 재료는 짝힘  $f$  와 미소탄성 포텐셜(micro-elastic potential)  $\omega$  의 관계로부터 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$f(\eta, \xi) = \frac{\partial \omega(\eta, \xi)}{\partial \eta} \quad (2)$$

여기서,  $\xi$  와  $\eta$  는 각각 두 절점  $x$  와  $x'$  의 상대 위치  $\xi = x' - x$  와 상대 변위  $\eta = u' - u$  가 된다. 또한 임의의 절점에서 변형 에너지 밀도(strain energy density)는 다음과 같다.

$$W(x) = \frac{1}{2} \int_H \omega(\eta, \xi) dV_\xi \quad (3)$$

여기서, 1/2이 고려된 이유는 한 결합에서 변형 에너지가 그 절점에 연결된 다른 절점과 공유되기 때문이다. 취성재료는 항복 혹은 파괴되기 전까지 탄성변형이 지배적이므로 다음과 같은 선형 미소탄성 포텐셜을 고려할 수 있다.

$$\omega(\eta, \xi) = \frac{c(\xi) s^2 \|\xi\|}{2} \quad (4)$$

여기서,  $s$  는 상대 신장(relative elongation) 값이며,  $s = (\|\eta - \xi\|$

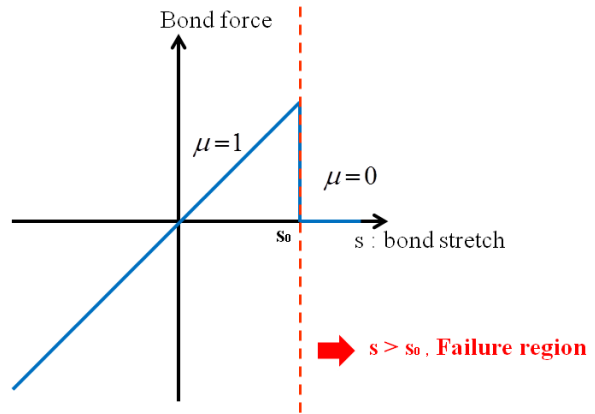


그림 2 PMB 재료의 하중-변형 관계

$-\|\xi\|/\|\xi\|$  로 정의된다. 따라서 짝힘은 식 (2)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$f(\eta, \xi) = \begin{cases} \frac{\eta + \xi}{\|\eta + \xi\|} c(\xi) s, & \|\xi\| \leq \delta \\ 0, & \|\xi\| > \delta \end{cases} \quad (5)$$

여기서,  $c(\xi)$  는 미소재료상수(micro-modulus) 함수이다. 미소재료상수는 등방향으로 연신(isotropic extension)하는 균질 탄성체의 이론적 변형 에너지 밀도와 식 (3)으로 계산되는 페리다이나믹 변형 에너지 밀도를 동일하도록 설정하여 결정할 수 있다(Silling 등, 2005; Ha 등, 2010).

페리다이나믹 모델에서는 결합의 상대 신장값  $s$  가 임계값  $s_0$  을 넘어가는 경우에 그 결합을 끊어서 파괴 모델을 구성한다(Silling 등, 2005; Ha 등, 2010). 한 번 끊어진 결합은 더 이상 인장력을 유지할 수 없고 재결합은 허용되지 않는다. 이를 프로토타입 미소탄성 취성(prototype micro-elastic brittle, PMB) 재료라고 하며 다음의 식을 통해 그림 2와 같이 정의한다.

$$f(\eta, \xi) = \mu(t, \xi) c(\xi) s \quad (6)$$

여기서,  $\mu$  는 0 또는 1의 값을 가지는 상수 함수이다.

$$\mu(t, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } s(t', \xi) < s_0 \text{ for all } 0 \leq t' < t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

PMB 모델에서 임계 상대 신장값  $s_0$  는 균열면을 통해 해당 결합이 수용할 수 있는 최대 변형 에너지 밀도, 즉 에너지 해방률(energy release rate)에서의 상대 신장값이 되며, 이론적으로 엄밀하게 계산될 수 있다(Silling 등, 2005; Ha 등, 2010). 에너지 해방률은 취성재료의 파괴로부터 계속

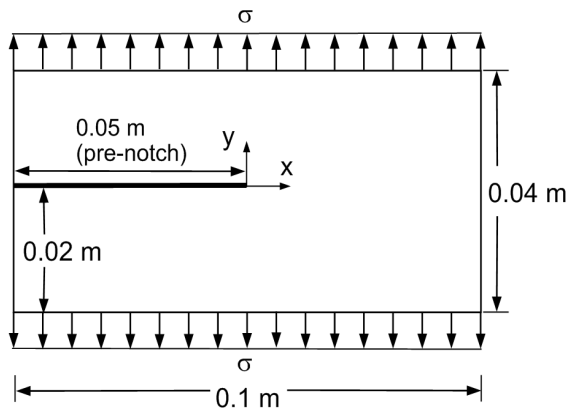


그림 3 인장 조건에 놓인 pre-notch가 있는 직사각형 판

가능한 물성치이다. 따라서 PMB 모델은 인위적인 파괴 조건을 도입하지 않고 동적파괴 거동을 표현한다. 또한 등방성 PMB 재료를 사용하더라도 균열진전에 따라 결합이 특정한 방향성을 가지고 끊어지게 되면 비등방성이 나타날 수 있다. 결합 레벨에서 파괴 모델을 구성하게 되면 다음과 같이 명료하게 국부손상을 표현할 수 있다는 장점이 있다.

$$\phi(\mathbf{x}, t) = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu(\mathbf{x}, t, \xi) dV_\xi}{\int_{H_x} dV_\xi} \quad (8)$$

$\phi$ 를 손상지수라고 하며 손상이 없는 재료에서는 0이 되고, 다른 절점과의 결속이 모두 끊어진 절점에 대해서는 1이 된다.

### 3. 동적 취성 파괴 시뮬레이션

#### 3.1 문제 구성

그림 3에서 보이는 바와 같이 길이 0.1m, 폭 0.04m인 얇은 직사각형 판을 고려한다. 판은 0.05m의 선형 수평 균열을 가지고 있고 수평 균열방향에 대칭이 되는 인장 하중 조건에 놓여 있다. 모든 시뮬레이션 결과는 과도 동역학 해석을 통해 계산된다. 시뮬레이션 동안 동일한 시간 간격을 사용하며 이 시간 간격은 절점 간격과 물성치를 고려해서 계산된 안정된 시간 간격이다(Silling 등, 2005). 공간 적분을 위해 중점 법칙을 사용하였다. 모든 수치해석 결과는 일정한 절점 간격을 가지는 균일격자에 대해 수행되었다. 모든 해석에서 horizon 크기  $\delta$ 와 절점 간격의 비는 분기 균열 시뮬레이션의 수렴성 연구(Ha 등, 2010)를 통해 대략 4로 정한다. 수치해석을 위해 사용된 취성재료는 Duran 50 유

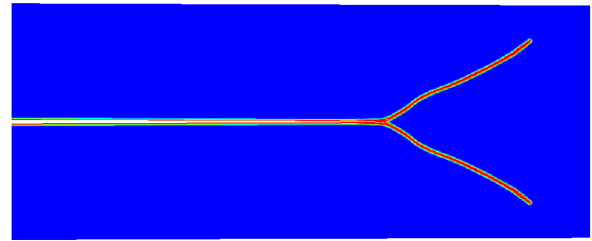


그림 4 페리다이나믹 균열 형상( $\sigma = 12\text{MPa}$ , 충격파 하중)

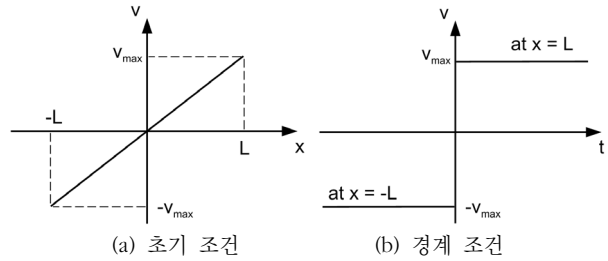


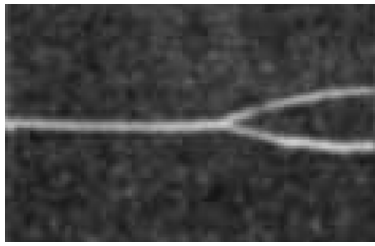
그림 5 속도장 초기 조건과 경계 조건 (유사 준정적 하중)

리로서 실험적으로 주어진 물성치(Doll, 1975)는 밀도  $2235 \text{ kg/m}^3$ , 영률  $65\text{GPa}$ , 포아송비 0.2, 분기 균열시 파괴 에너지,  $G_0$   $204 \text{ J/m}^2$ 이다.

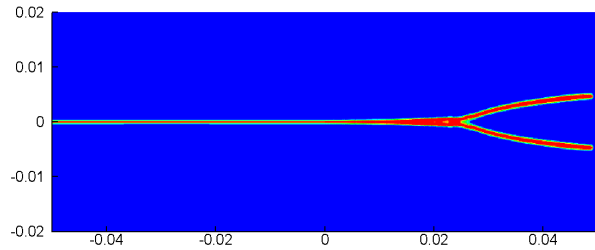
#### 3.2 분기 균열각도와 균열전파 속도

하윤도 등(2011)은 충격파 하중과 준정적 하중 하에서 분기 균열 각도와 균열전파 속도를 페리다이나믹 해석을 통해 계산하고 실험과 비교하였다. 그림 3과 같이 직사각형 판의 상, 하면에 하중을 갑자기 가하고 동적 시뮬레이션 동안 일정하게 유지한다. 이러한 하중조건은 하중 경계 주변에서 충격파를 생성하게 되고 충격파들은 선형 수평 균열에서 서로 만나고 간섭하게 된다. 그 결과로 발생하는 인장 응력은 선형 균열이 전파되게 하고, 이는 충분한 응력 확대 계수(stress intensity factor)에 도달하게 되면 분기 균열로 진행된다(그림 4). 페리다이나믹 균열형상에서 색상은 손상지수를 표현한 것으로 청색은 0, 즉 손상이 없는 상태, 적색은 0.4이상, 즉 해당 절점의 초기 대비 40%이상의 결합이 끊어진 상태를 나타낸다. 예를 들어 선형 수평 균열 바로 위에 있는 절점은 대략 50%정도의 손상을 가지고 그림에서와 같이 적색으로 나타낸다.

대부분의 취성 파괴 실험들은 준정적(quasi-static) 하중을 가해 동적 균열전파를 관측한다(Bowden 등, 1967). 수치해석에서 충격파의 영향을 배제하고 유사 준정적 하중조건을 효율적으로 구성하기 위해 하중 대신 일정한 인장 속도장  $4\text{m/s}$ 를 하중 경계에 부과하며 초기 조건으로 판의 상부로부터 하부까지 선형적으로 속도장을 변화시킨다(그림 5).

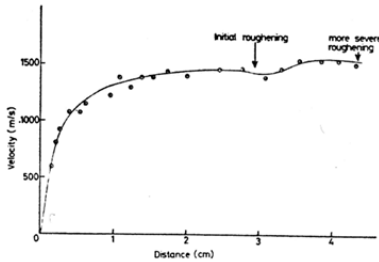


(a) 실험결과(Bowden 등, 1967)

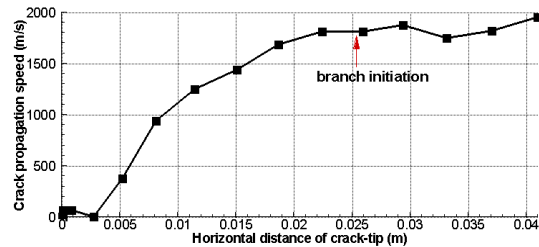


(b) 페리다이나믹스 해석결과

그림 6 균열 형상: 실험 결과와 페리다이나믹스 결과 비교(준정적 하중)

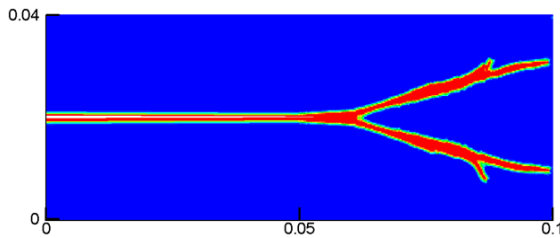


(a) 실험적 균열전파 속도(Field 등, 1971)

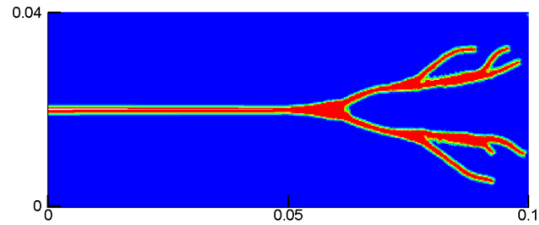


(b) 페리다이나믹스 균열전파 속도

그림 7 균열전파 속도: 실험 결과와 페리다이나믹스 결과 비교



(a) Duran 50 유리



(b) Soda-lime 유리

그림 8 균열경로 비교: 서로 다른 재료 사용, 동일 모델, 동일 충격하중 32MPa

그림 6에서 준정적 하중 상태에서 실험적으로 도출된 분기 균열형상(Bowden, 1967)과 페리다이나믹 해석결과를 비교하였다. 유사 준정적 하중조건을 통해 실험에 보다 근접한 해석결과를 얻을 수 있었다.

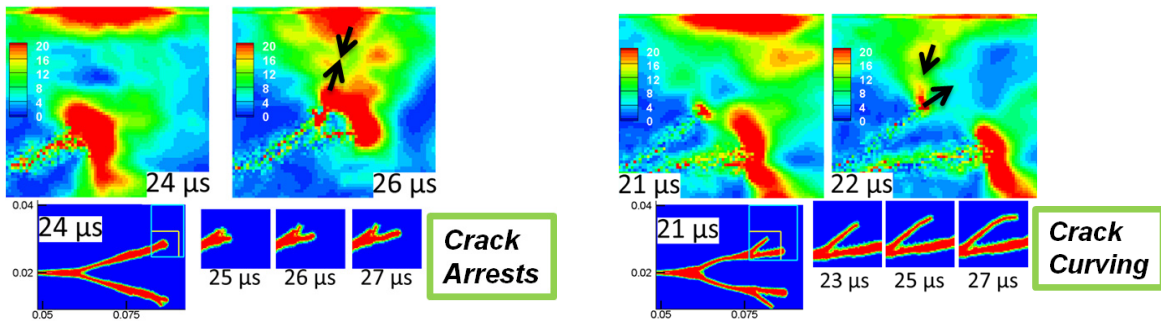
그림 7에서는 유사 준정적 하중조건 하에서 분기된 균열의 균열전파 속도를 실험결과와 비교하였다. 실험결과와 페리다이나믹 해석결과로부터 얻어진 균열전파 속도 프로파일이 매우 유사함을 확인할 수 있다. 특히 균열전파 속도가 분기 직후 약간 떨어지는 것을 실험과 수치해석에서 공통으로 확인할 수 있다. 동일한 현상이 여러 실험들로부터 공통적으로 확인된 바 있다(Field, 1971; Ramulu 등, 1985; Ramulu 등, 1983; Ravi-Chandar, 2004).

### 3.3. 균열경로에 대한 응력과 간섭효과

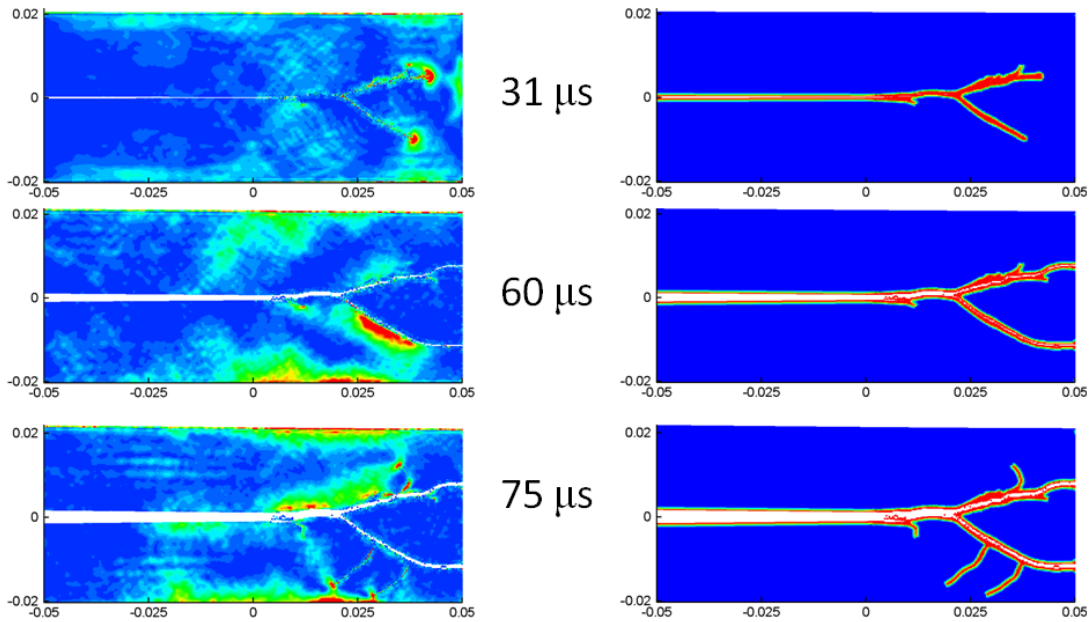
응력파의 간섭이 균열 경로에 미치는 영향은 여러 실험에서 보고된 바 있다(Ravi-Chandar 등, 1984b, 1985). 그림 8

과 9는 충격파 하중조건에서 페리다이나믹 해석결과로 응력파의 간섭에 따라 균열경로가 구속(arrest)되거나 회전(curving)되는 것을 보여준다(Ha 등, 2010). 두 시편은 그림 3과 동일한 형상이며 충격파 하중의 크기도 두 시편에 대해서 32MPa로 동일하다. 두 시편은 사용 재료만 유일하게 다르며, 그림 8(a)는 Duran 50 유리이고, (b)는 Soda-lime 유리이다. Soda-lime 유리의 밀도는  $2440\text{kg/m}^3$ , 영률 72GPa, 포아송비 0.22, 분기 균열시 파괴 에너지,  $G_0$   $135\text{J/m}^2$ 이다(Doll, 1975).

그림 8에서 관찰할 수 있듯이 Duran 50 유리 시편에서는 재차 분기된 균열 중 일부가 전파되지 못하고 구속되는 반면 Soda-lime 유리 시편에서는 휘어져 전파된다. 그림 9에서 균열선단 주변의 변형 에너지 밀도 분포를 분석하였다. Duran 50 유리는 균열선단에서 전파되는 변형 에너지(하단에 집중된 에너지)와 경계에서 반사된 에너지(상단에 집중된 에너지)가 서로 반대 방향으로 만나게 되면서 변형 에너지가 대부분 손실되어서 해당 방향으로 균열이 진전하지



(a) Duran 50 유리 (b) Soda-lime 유리  
 그림 9 균열선단 주변의 변형 에너지 밀도 분포와 균열경로 비교: 서로 다른 재료, 동일 모델, 동일 충격하중 32MPa



(a) 변형 에너지 밀도 분포 (b) 균열 경로  
 그림 10 2차 균열전파 경로와 변형 에너지 밀도 분포

못한다. 반면 Soda-lime 유리는 균열선단에서 전파되는 에너지를 반사파가 아래로 누르게 되면서 균열이 아래로 휘어져 전파되는 모습을 보인다.

### 3.4 2차 균열전파

2차 균열은 기존 균열에 수직으로 발생하는 균열로써, 응력파와 반사파의 간섭에 의해 형성되는 것이며(Ha 등, 2011) 또한 실험적으로 증명된 바 있다(Ravi-Chandar 등, 1984b). 그림 10은 충격파 하중조건에서 2차 균열발생 과정을 변형 에너지 밀도 분포와 비교하여 보여준다. 분기된 균열이 우측 경계에 도달한 후 하단 균열면의 일부에 변형 에너지가 집중(60μs)되는 것을 확인할 수 있다. 에너지가 집중된 곳에서 기존 균열면에 수직으로 2차 균열이 생성되면서 에너지가 다시 전파(75μs)된다.


## 4. 향후과제

취성 물질에 대한 동적파괴 해석을 위해서는 해결되어야 할 많은 난제들이 있다. 본 고에서는 페리다이나믹 모델이 실험적으로 관측된 다양한 동적파괴 특성들을 엄밀하게 해석해 낼 수 있음을 보였다. 또한 분기 균열각도와 균열전파 속도에 응력파가 미치는 영향에 대해서도 분석하였다. 더하여 다양한 재료와 하중조건에 대해서 연쇄 분기 균열, 2차 균열 등의 현상도 페리다이나믹 모델로 해석이 가능함을 확인하였다. PMB 재료를 사용한 페리다이나믹 파괴 모델은 하나의 손상 파라미터(상대 신장값)만을 사용한다. 페리다이나믹 해석을 통해 계산된 변형으로부터 어떤 결합의 상대 신장값이 임계값을 넘어서게 되면 국부적으로 그 결합에 대해 손상이 발생한다. 한 번 손상된 결합은 더 이상 인장력을 유지할 수 없고 재결합은 허용되지 않는다. 따라

서 손상된 결합 주변의 재료가 약해지게 되어 연쇄적으로 손상이 발생할 수 있게 되어 자연스럽게 균열면이 생성된다. 임계 상대 신장값 역시 인위적으로 계산되지 않고 실제 파괴 현상에 관계된 물성치인 에너지 해방률로부터 유도된다. 결론적으로 페리다이나믹 모델은 다양한 동적 균열을 해석하기 위해 어떠한 인위적인 조건도 사용하지 않는다. 따라서 페리다이나믹 해석에서 균열 현상은 페리다이나믹 수치해의 일부일 뿐이다.

페리다이나믹 해석 방법론은 비교적 최근에 개발된 해석 이론으로서 복합재, 연성(ductile) 재료, 금속 등 다양한 재료들에 대해 보다 엄밀한 재료 거동을 모델링하기 위해서는 지속적인 연구가 필요하다. 또한 해석 모델의 대형화, 병렬화 등은 보다 완전한 동적파괴 거동 예측 모델을 개발하기 위한 연구의 다음 단계가 될 것이다.

### 참 고 문 헌

1. Bobaru, F., Ha, Y.D., Hu, W. (2012) Damage progression from impact in multilayered glass modeled with peridynamics, *Central European Journal of Engineering*, 2(4), pp.551~561.
2. Bowden, F., Brunton, J., Field, J., Heyes, A. (1967) Controlled fracture of brittle solids and interruption of electrical current. *Nature*, 216, pp.38~42.
3. Doll, W. (1975) Investigations of the crack branching energy. *International Journal of Fracture*, 11(1), pp.184~186.
4. Field, J. (1971) Brittle fracture: its study and application. *Contemporary Physics*, 12(1), pp.1~31.
5. Ha, Y.D., Bobaru, F. (2010) Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. *International Journal of Fracture*, 162(1), pp.229~244.
6. Ha, Y.D., Bobaru, F. (2011) Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(6), pp.1156~1168.
7. Hu, W., Ha, Y.D., Bobaru, F. (2011) Modeling dynamic fracture and damage in fiber-reinforced composites with peridynamics, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(6), pp.635~660.
8. Hu, W., Ha, Y.D., Bobaru, F. (2012) Peridynamic model for dynamic fracture in unidirectional fiber-reinforced composites, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 217, pp.247~261.
9. Hu, W., Wang, Y., Yu, J., Yen, C.F., Bobaru, F. (2013) Impact damage on a thin glass with a thin polycarbonate backing, *International Journal of Impact Engineering*, 62, pp.152~165.
10. Ramulu, M., Kobayashi, A. S. (1985) Mechanics of crack curving and branching a dynamic fracture analysis. *International Journal of Fracture*, 27(3), pp.187~201.
11. Ramulu, M., Kobayashi, A., Kang, B., Barker, D. (1983) Further studies on dynamic crack branching. *Experimental Mechanics*, 23(4), pp.431~437.
12. Ravi-Chandar, K. (2004) *Dynamic Fracture*. Elsevier.
13. Ravi-Chandar, K., Knauss, W. (1984a) An experimental investigation into dynamic fracture: III. on steady-state crack propagation and crack branching. *International Journal of Fracture*, 26(2), pp.141~154.
14. Ravi-Chandar, K., Knauss, W. (1984b) An experimental investigation into dynamic fracture: IV. on the interaction of stress waves with propagating cracks. *International Journal of Fracture*, 26(3), pp.189~200.
15. Silling, S. (2000) Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(1), pp.175~209.
16. Silling, S., Askari, E. (2005) A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Computers and Structures*, 83(17-18), pp.1526~1535.
17. 하윤도, 조선희 (2011) 페리다이나믹스 해석법을 통한 동적 취성 파괴 거동 해석: 분기 균열 각도와 균열 전파 속도, *한국전산구조공학회 논문집*, 24(6), pp.637~643.
18. 하윤도, 조선희 (2012) 섬유강화 복합재의 동적 취성 파괴 현상 규명을 위한 비국부 페리다이나믹스 해석법 개발: 비대칭 하중 연구, *한국전산구조공학회 논문집*, 25(4), pp.279~285. 

[담당 : 김현규 편집위원]