

3개의 미지변수를 갖는 변단면 기하 비선형 보의 수치해석 방법

이병구* · 오상진** · 이태은***

Lee, Byoung Koo*, Oh, Sang Jin**, Lee, Tae Eun***

Novel Method for Numerical Analyses of Tapered Geometrical Non-linear Beam with Three Unknown Parameters

ABSTRACT : This paper deals with a novel method for numerical analyses of the tapered geometrical non-linear beam with three unknown parameters, subjected a floating point load. The beams with hinged-movable end constraint are chosen as the objective beam. Cross sections of the beam whose flexural rigidities are functionally varied with the axial coordinate. The first order simultaneous differential equations governing the elastica of such beam are derived on the basis of the Bernoulli-Euler beam theory. A novel numerical method for solving these equations is developed by using the iteration technique. The processes of the solution method are extensively discussed through a typical numerical example. For validating theories developed herein, laboratory scaled experiments are conducted.

Key words : geometrical non-linear beam, tapered beam, Bernoulli-Euler beam, floating point load, iteration technique, experiments

초 록 : 이 연구는 3개의 미지변수를 갖는 변단면 기하 비선형 보의 수치해석 방법에 관한 연구이다. 3개의 미지변수를 갖는 보를 변화위치 집중하중이 작용하는 회전-이동지점 보로 선택하였다. 보의 변단면은 휨 강성이 부재축을 따라 함수적으로 변화하는 변단면으로 선택하였다. 이러한 보의 기하 비선형 거동을 지배하는 연립 1계 미분방정식들을 Bernoulli-Euler 보 이론으로 유도하였다. 이 미분방정식들을 반복법을 이용하여 미지변수들을 산정할 수 있는 수치해석 방법을 개발하였다. 전형적인 수치해석 예를 통하여 새로운 수치해석 방법의 과정을 분석하였다. 이 연구의 이론을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실행하였다.

검색어 : 기하 비선형 보, 변단면 보, Bernoulli-Euler 보, 변화위치 집중하중, 반복법, 실험

1. 서 론

보는 기둥, 평판, 곡선 부재 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 정적 거동에 대한 연구가 많이 이루어졌다. 보는 수직하중에 대하여 휨에 저항하는 구조이므로 휨 거동에 관한 많은 연구들이 이루어졌지만 대부분 작은 처짐 이론에 의한 연구들이 대부분이다.

* 정희원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 (bkleest@wku.ac.kr)

** 정희원 · 전남도립 남도대학 토목환경과 (sjoh@dorip.ac.kr)

*** 정희원 · 원광대학교 (Corresponding Author · Wonkwang University · telee@wku.ac.kr)

Received November 23 2011, Revised January 5 2012, Accepted November 21 2012

최근 재료공학의 발달로 탄성이 매우 큰 재료로 이루어진 구조물이 가능하여, 큰 처짐에 대해서도 구조적 안정성을 확보할 수 있게 되었다. 이러한 구조에서는 작은 처짐 이론에 의한 선형 구조해석은 큰 오차를 가져와 불합리하다. 이러한 점에서 큰 처짐이 발생하는 구조에서는 Bernoulli-Euler 보 이론에 의한 구조물의 기하 비선형 해석이 필수적이다(이병구 등, 2009).

구조물의 비선형 거동에 관한 연구방법으로는 1) 정확형태해(closed form solution), 2) 급수해(series solution), 3) 수치해석해(numerical solution), 4) 실험해(experimental solution) 등 4가지 형태의 해들이 있다(Lee와 Wilson, 1993). 정확형태해는 미분방정식을 타원적분법(elliptical integration method)으로 풀어 정확탄성곡선(elastica)을 닫힌 해(closed solution)의 함수식으로 산출한다. 이 방법은 매우 난해하기 때문에 대상 구조물이 등단면이고 초기 경계조건이 모두 알려져 있는 캔틸레버 보와 같이 간단한 형태의 기하 비선형 해석에 국한되고 있다(Rojahan, 1968; Solano, 2009; Jan, 2010). 이 방법은 미지변수가 3개인 구조에서는 그 해석 방법이 알려져 있지 않다. 급수해는 정확탄성곡선 식을 급수의 형태로 나타내고 그 미지계수를 대수적 방법으로 푸는 방법이다. 이 해 역시 급수항을 작게 취하면 해를 용이하게 산정할 수 있지만 그 정도는 매우 떨어진다. 공학적으로 허용될만한 정도의 해를 얻기 위해서는 매우 많은 급수항을 필요로 하며 이 경우에는 미지계수를 얻기가 불가능하다(Lau, 1982; Liao, 2009). 수치해석해는 부정정력을 미지수로 힘 모멘트 식을 산정하고 이식을 Bernoulli-Euler 보 이론에 적용하고 경계조건을 이용하여 부정정력을 산정하는 방법이다. 이 방법에 의한 캔틸레버 보에 대한 연구로는 Dado와 Al-Sadder(2005), Yi(2011) 등의 논문이 있고, 기동에 관한 기하 비선형 거동을 수치해석법으로 연구한 논문으로는 Jung과 Kang(2005), Lee 등(2006), Huang과 Luo(2011) 등의 연구를 들 수 있다. 뼈대구조에 관한 비선형 해석 논문으로는 Shatarat 등(2009)의 연구가 있다. 실험적 연구에는 Wilson 등(1971), 안대순(2006)의 논문을 들 수 있으며, 앞에서 언급한 1), 2), 3)의 이론적 연구의 검증에 이용되고 있다.

이 논문은 3개의 미지변수를 갖는 변단면 기하 비선형 보의 수치해석에 관한 연구이다. 위와 같은 보의 조건으로 변화위치 집중하중이 작용하는 회전-이동지점으로 지지된 변단면 보를 선택하였다. Bernoulli-Euler 보 이론의 지배를 받는 이 비선형 보의 미분방정식은 초기회전각, 하중의 수평변위, 이동지점의 수평변위 등 3개의 미지변수를 갖게 된다. 앞의 연구동향에서 언급한 수치해석해는 1개의 미지변수를 갖는 비선형 보이므로 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi 법으로 미지변수를 산정할 수 있다. 그러나 2개 이상의 미지변수를 갖는 비선형 보는

Regula-Falsi 법으로는 해석이 불가능하다. 따라서 이 연구에서는 3개의 미지변수를 갖는 비선형 보를 해석할 수 있는 수치해석 방법을 개발하는 데 연구목적이 있다.

이를 위하여 Bernoulli-Euler 보 이론을 이용하여 정확탄성곡선을 지배하는 연립 미분방정식들을 유도하였다. 이때 이 연구의 미지변수 중에 하나인 집중하중의 수평변위를 산정하기 위하여 수평방향 좌표인 x 에 관한 미분방정식을 유도하였다. 이제까지 비선형 보의 지배 미분방정식은 보의 곡선(축)방향 길이 좌표인 s 에 관한 미분방정식으로 유도되었으며 x 에 관한 연립 미분방정식의 유도는 이 논문이 최초이다. 3개의 미지변수를 갖는 이 미분방정식들은 Regula-Falsi 법으로는 풀 수가 없기 때문에 컴퓨터 언어에서 일반적으로 많이 사용되고 있는 반복법(iteration method)을 이용하여 미지변수를 산정하였다. 연립 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법을 이용하였다. 이 연구에서 개발한 이론을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실행하였다. 이러한 관점에서 이 연구는 앞에서 분류한 3), 4)의 연구범주에 속한다. 이 연구에서 보의 재료는 선형 탄성체로, 보축은 비확장성으로 가정하였다.

2. 변단면 부재

Fig. 1은 지간길이가 l 인 변단면 보를 나타낸다. 부재좌단 A는 회전지점이고, 우단 B는 이동지점이다. 하중이 작용하면 지점 B는 좌측 방향으로 수평변위가 발생할 수 있다. 이 그림에서 하중이 재하되기 이전에는 점선으로 그려진 수평방향 좌표 x 와 역시 점선으로 표현된 축방향 좌표 s 는 서로 일치한다. 좌측 지점 A($s=0$)에서 단면2차모멘트는 I_A 이고, 우측 지점 B($s=l$)에서 단면2차모멘트는 I_B 이다. 지점 A, B 사이의 임의 점 s 에서 단면2차모멘트 I 는 주어지는 함수식에 따라서 변화하는 변단면을 채택하였다.

보의 s 에서 단면2차모멘트 I 를 함수식으로 나타내기 위하여 단면비 k 를 다음과 같이 정의한다.

$$k = \frac{I_B}{I_A} \quad (1)$$

변단면의 단면2차모멘트 I 는 어떠한 임의 함수식도 가능하지만, 여러 단면형상들에 대하여 일반적으로 적용할 수 있어 많은 연구자들이 이용하고 있는 다음의 변단면 식을 채택하였다(Gupta, 1985).

$$I = I_A \left[(k^{1/c} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^c \quad (2)$$

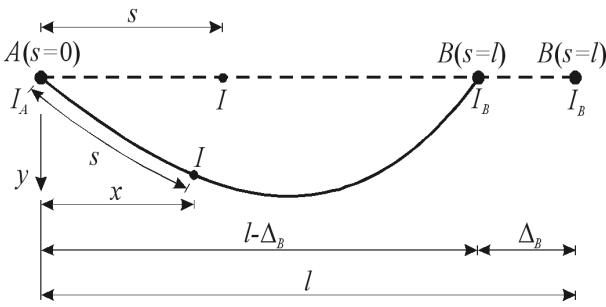


Fig. 1. Second moment of inertia on elastica

여기서 e 는 단면형상에 따라 결정되는 형상계수이며, 예로서 단면의 형상이 직사각형 단면인 경우에 e 는 다음과 같다.

$$e = 1: \text{ 폭 변단면} \quad (3.1)$$

$$e = 3: \text{ 깊이 변단면} \quad (3.2)$$

$$e = 4: \text{ 정방형 변단면} \quad (3.3)$$

Fig. 1에서 실선은 하중을 받기 전에 직선보가 하중을 받은 후에 최종적으로 평형상태를 이룬 정확탄성곡선을 나타낸다. 하중을 받기 전에 직선보는 점선으로 하중을 받은 후에 정확탄성곡선 보는 실선으로 나타내었다. 보축은 비확장성이기 때문에 이동지점인 B 지점은 좌측으로 수평변위 Δ_B 가 발생한다. 이 그림에 나타낸 바와 같이 하중을 받기 전에는 수평방향 축인 x 축과 정확탄성곡선의 곡선 방향축인 s 축이 서로 일치하여, B 지점에서 $x = s = l$ 이다. 보가 하중을 받게 되면 부재축이 x 축을 이탈하게 되므로 이제 $x \neq s$ 가 되고 정확탄성곡선의 B 지점에서 $x = l - \Delta_B$, $s = l$ 이 된다. 직교좌표계 (x, y) 에서 정확탄성곡선의 곡선길이는 s 가 되고, 여기에서 단면2차모멘트 I 는 앞에서 나타낸 식 (2)과 같다. 한편, 작은 처짐 이론에서는 Δ_B 가 발생하지 않으며 탄성곡선(elastic curve)에서 $I_s = I_x$ 로 취급한다.

3. 수학적 모형

3.1 Bernoulli-Euler 보 이론

Fig. 2는 보가 변화위치 집중하중 P 를 받아 최종적으로 평형상태를 이룬 정확탄성곡선의 변수들을 나타낸다. 변화위치 집중하중은 하중을 받기 전에 점선으로 표시된 집중하중이 하중을 받은 후에 실선으로 표시된 집중하중과 같이 하중의 작용선이 좌측으로 평행이동하는 하중으로 정의한다. 지간길이는 l 이고, P 의 재하위치는 a 이다. 지점 A는 회전지점이고 지점 B는 이동지점이다. 정확탄성곡선은 직교좌표계 (x, y) 에

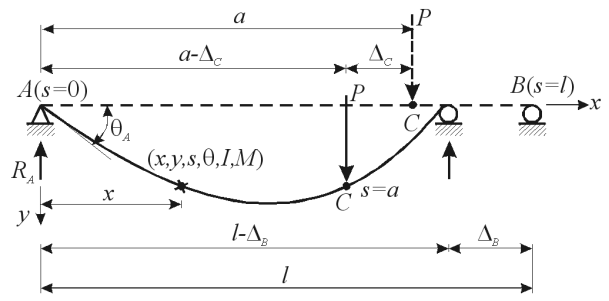


Fig. 2. Geometric parameters on elastica

서 정의되며, 정확탄성곡선의 곡선길이는 s 이고, 회전각은 θ 이다. N , Q , M 은 축방향력, 전단력 및 휨 모멘트를 나타낸다. (x, y, s) 에서 변단면 보의 단면2차모멘트 I 는 식 (2)에 표현되어 있다. 좌측지점 A에서 초기 회전각과 수직반력은 θ_A , R_A 이다. 최종 평형상태인 정확탄성곡선에서 P 의 수평변위는 Δ_C 이고, 우측지점 B의 수평변위는 Δ_B 이다. 보축은 비확장성이므로 정확탄성곡선의 B 지점에서 $s = l$, $x = l - \Delta_B$ 이다.

Fig. 2에서 평행방정식을 이용하여 수평변위 Δ_B , Δ_C 를 미지수로 하여 수직반력 R_A 및 합응력 N , Q , M 을 구하면 다음과 같다.

$$R_A = P \left(1 - \frac{a - \Delta_C}{l - \Delta_B} \right) \quad (4)$$

$$N = R_A \sin \theta, 0 \leq x \leq a - \Delta_C \quad (5.1)$$

$$N = (R_A - P) \sin \theta, a - \Delta_C < x \leq l - \Delta_B \quad (5.2)$$

$$Q = R_A \cos \theta, 0 \leq x \leq a - \Delta_C \quad (6.1)$$

$$Q = (R_A - P) \cos \theta, a - \Delta_C < x \leq l - \Delta_B \quad (6.2)$$

$$M = R_A x, 0 \leq x \leq a - \Delta_C \quad (7.1)$$

$$M = R_A x - P(x - a + \Delta_C), a - \Delta_C < x \leq l - \Delta_B \quad (7.2)$$

Fig. 3은 Bernoulli-Euler 보 이론에 의한 정확탄성곡선의 미소요소에 대한 휨-곡률 관계를 나타낸다. 이 그림에서 ρ 는 곡률반경이다. 이 그림으로부터 다음과 같은 기하 비선형 관계식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta, 0 \leq x \leq l - \Delta_B \quad (8)$$

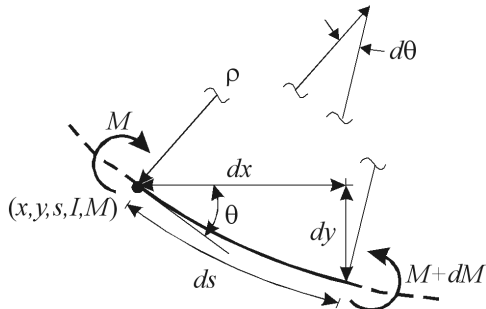


Fig. 3. Small element of Bernoulli-Euler beam

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\theta}, 0 \leq x \leq l - \Delta_B \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}, 0 \leq x \leq l - \Delta_B \quad (10)$$

식 (10)의 휨곡률 관계식은 $ds = \rho d\theta$, $ds = dx / \cos\theta$ 의 기하학적 관계와 식 (2), (7)을 이용하면 다음과 같이 x 에 관한 미분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{P \left(1 - \frac{a - \Delta_C}{l - \Delta_B}\right) x}{EI_A \left[(k^{1/e} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^e \cos\theta}, \quad 0 \leq x \leq a - \Delta_C \quad (11.1)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{P \left(1 - \frac{a - \Delta_C}{l - \Delta_B}\right) x - P(x - a + \Delta_C)}{EI_A \left[(k^{1/e} - 1) \frac{s}{l} + 1 \right]^e \cos\theta}, \quad a - \Delta_C < x \leq l - \Delta_B \quad (11.2)$$

3.2 무차원 지배미분방정식

이 연구에서 기하 비선형 보의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \lambda = \frac{s}{l} \quad (12)-(14)$$

$$\alpha = \frac{a}{l}, \quad \delta_B = \frac{\Delta_B}{l}, \quad \delta_C = \frac{\Delta_C}{l}, \quad (15)-(17)$$

$$p = \frac{Pl^2}{EI_A}, \quad r_A = \frac{R_A l^2}{EI_A} \quad (18), (19)$$

$$n = \frac{Ml^2}{EI_A}, \quad q = \frac{Ql^2}{EI_A}, \quad m = \frac{Ml}{EI_A} \quad (20)-(22)$$

여기서 (ξ, η, λ) 는 정확탄성곡선을 정의해 주는 무차원 좌표계이며, $(\alpha, \delta_B, \delta_C)$ 는 (a, Δ_B, Δ_C) 를 지간길이 l 로 정규화한 무차원 변수들이다. (p, r_A, n, q, m) 은 무차원 하중변수들이다.

이제 식 (8), (9), (11)에서 유도한 식들에 식 (12)-(22)의 무차원 변수들을 대입하고 정리하면 3개의 미지변수 $\theta, \delta_B, \delta_C$ 를 갖는 변단면 기하 비선형 보의 정확탄성곡선을 지배하는 연립 1계 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \tan\theta, 0 \leq \xi \leq 1 - \delta_B \quad (23)$$

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{1}{\cos\theta}, 0 \leq \xi \leq 1 - \delta_B \quad (24)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{p \left(1 - \frac{\alpha - \delta_C}{1 - \delta_B}\right) \xi}{[(k^{1/e} - 1)\lambda + 1]^e \cos\theta}, 0 \leq \xi \leq \alpha - \delta_C \quad (25.1)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{p \left(1 - \frac{\alpha - \delta_C}{1 - \delta_B}\right) \xi - p(\xi - \alpha + \delta_C)}{[(k^{1/e} - 1)\lambda + 1]^e \cos\theta}, \quad \alpha - \delta_C < \xi \leq 1 - \delta_B \quad (25.2)$$

이상에서 유도한 미분방정식들은 변화위치 집중하중 p 의 수평변위 δ_C 를 산정하기 위하여 특별히 ξ 에 관한 미분방정식들로 유도하였으며, 비선형 보의 미분방정식을 ξ 에 관한 연립 1계 미분방정식들로 유도한 논문은 이 논문이 최초이다.

3.3 경계조건

유도한 식 (23)-(25)의 미분방정식에서 수평변위 δ_B, δ_C 와 지점 A의 회전각 θ_A 가 미지수이다. 3개의 미지변수들을 수치해석 방법에 의하여 산출하기 위해서는 경계조건이 필요하다.

먼저, $x=0$ 의 지점 A는 회전지점이므로 수직변위 $y=0$ 이고, 곡선길이 $s=0$ 이다. 식 (12)-(14)의 무차원 변수들을 이용하면 $\xi=0$ 에서 다음과 같은 무차원 초기 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\eta_A = 0 \quad (26)$$

$$\lambda_A = 0 \quad (27)$$

둘째로, 보 축은 비확장성이므로 집중하중이 작용하는 C 점 즉, $x=l-\Delta_C$ 에서 $s=a$ 이어야 하므로 식 (12)-(14)를 이용하면 $\xi=1-\delta_C$ 에서 다음과 같은 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\lambda_C - \alpha = 0 \tag{28}$$

마지막으로 $x=l-\Delta_B$ 의 지점 B는 이동지점이므로 수직변위 $y=0$ 이다. 보 축은 비확장성이므로 지점 B에서 곡선길이 $s=l$ 이다. 식 (12)-(14)의 무차원 변수들을 이용하면 $\xi=1-\delta_B$ 에서 다음과 같은 무차원 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\eta_B = 0 \tag{29}$$

$$\lambda_B - 1 = 0 \tag{30}$$

미지변수 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 에 대한 해는 수치해이기 때문에 식 (28)-(30)의 경계조건들을 정확하게 만족하는 해를 구할 수 없다. 이 연구에서는 다음과 같은 3개의 수렴한계를 두고 3개의 미지변수 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 의 오차가 이 수렴조건들을 만족하면 최종 수치해로 확정하였다.

$$|\lambda_C - \alpha| \leq 10^{-5} \tag{31}$$

$$|\eta_B| \leq 10^{-5} \tag{32}$$

$$|\lambda_B - 1| \leq 10^{-5} \tag{33}$$

식 (31)-(33)을 더하면 다음과 같은 통합오차 ER의 수렴조건식을 만들 수 있다.

$$ER = |\lambda_C - \alpha| + |\eta_B| + |\lambda_B - 1| \leq 3 \times 10^{-5} \tag{34}$$

식 (34)의 통합오차 ER의 구성이 이 연구의 핵심내용 중에 하나이다.

4. 수치해석 방법

4.1 수렴해석

이 연구에서 유도한 연립 1계 미분방정식 (23)-(25)의 수치적분은 초기치 문제이므로 지점 A($\xi=0$)에서 모든 초기조건 $\theta_A, \eta_A, \lambda_A$ 가 알려져 있어야만 수치적분을 시행할 수 있다. 식 (26), (27)의 경계조건에서와 같이 θ_A 는 알려져 있지 않으

로 수치적분을 시작할 수 없다. 미분방정식 속에 포함되어 있는 수평변위 δ_B, δ_C 도 미지수이다. 즉, 주어진 보의 입력조건 k, e, α, p 에 대해서 유도한 연립 미분방정식들을 푸는 문제는 결국 식 (34)의 통합 수렴조건식을 만족하는 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 를 찾는 문제로 귀결된다.

연립미분방정식 (23)-(25)를 풀기 위하여 수치적분은 Runge-Kutta 법(Carnahan 등, 1969)을 이용하였고, 3개의 미지변수 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 는 반복법을 이용하여 산정하였다. Runge-Kutta 법에 의한 미분방정식의 수치적분은 다수의 문헌들(Lee 등, 2006)에서 그 효율성이 입증된 바 있으므로 수치적분법의 기술은 생략한다.

3개의 미지변수 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 를 산정하기 위하여 이 연구에서 개발한 반복법의 계산과정은 다음과 같다.

- 1) 보의 조건 k, e, α, p 를 입력한다.
- 2) 먼저, 초기 회전각 θ_A 를 가정한다. 이때 θ_A 의 범위는 $0 < \theta_A < \pi/2$ 가 명백하므로 이 범위에서 θ_A 를 일정 증분 $\Delta\theta_A$ 씩 증가시키며 가정한다.
- 3) 둘째, 수평변위 δ_B 를 가정한다. 이때 δ_B 의 범위는 $0 < \delta_B < 1-\alpha$ 가 명백하므로 이 범위에서 δ_B 를 일정 증분 $\Delta\delta_B$ 씩 증가시키며 가정한다.
- 4) 셋째, 수평변위 δ_C 를 가정한다. 이때 δ_C 의 범위는 $0 < \delta_C < 1-\alpha$ 가 명백하므로 이 범위에서 δ_C 를 일정 증분 $\Delta\delta_C$ 씩 증가시키며 가정한다. 이 연구에서 2), 3), 4)의 단계에서 일정 증분 $\Delta\theta_A, \Delta\delta_B, \Delta\delta_C$ 의 값들은 해당범위의 1/10로 채택하였다.
- 5) 이제, 미지변수 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 가 모두 정의되었으므로 식 (23)-(25)의 미분방정식을 $\xi=0$ 에서 $\xi=1-\delta_B$ 사이에서 수치적분을 시행한다.
- 6) 수치적분의 결과로 식 (34)의 통합오차 ER을 산정한다.
- 7) 2)-6)의 반복시행에서 통합오차 ER가 최소 통합오차 ER_m 을 갖게 되는 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 를 찾는다. 만일 산정된 ER_m 이 식 (34)를 만족하면 ($\theta_A, \delta_B, \delta_C$), ($\xi, \eta, \theta, \lambda$), (n, q, m)을 최종 수치해로 출력하고 해석을 종료한다.
- 8) ER_m 이 식 (34)를 만족하지 않으면 이전 단계보다 축소된 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 의 범위를 다음과 같이 새롭게 산정한다.

$$\theta_{Am} - \Delta\theta_A \leq \theta_A \leq \theta_{Am} + \Delta\theta_A \tag{35}$$

$$\delta_{Bm} - \Delta\delta_B \leq \delta_B \leq \delta_{Bm} + \Delta\delta_B \tag{36}$$

$$\delta_{Cm} - \Delta\delta_C \leq \delta_C \leq \delta_{Cm} + \Delta\delta_C \tag{37}$$

여기서 $\theta_{Am}, \delta_{Bm}, \delta_{Cm}$ 은 7) 단계에서 결정된 ER_m 값을 갖는 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 값들이다.

9) 새롭게 축소된 범위 내에서 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 값들을 이용하여 2)-8)의 과정을 반복시행한다.

이상의 수치해석 방법을 FORTRAN 컴퓨터어로 프로그램 하여 수치해석을 시행한 결과, 변단면 기하 비선형 보의 미지변수 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 를 성공적으로 찾을 수 있었다.

4.2 수치해석 예제 및 토의

이 절에서는 위에서 개발한 수치해석 방법을 전형적인 수치해석 예를 통하여 수치해석의 처리과정을 심도있게 분석하였다. 수치해석 예에서 사용한 비선형 보의 무차원 입력 변수들은 다음과 같다.

- 단면비: $k=1.5$
- 형상계수: $e=3$ (직사각형의 깊이 변단면)
- 무차원 하중 위치: $\alpha=0.5$
- 무차원 집중하중: $p=50$

위의 입력변수들을 이용하여 수치해석을 실시하고 그 처리과정의 해석 결과를 분석하여 이 연구에서 개발한 수치해석 방법의 효율성을 토의하였다.

Fig. 4는 수치해석의 반복회수 i 에 따라 최소통합오차 ER_m 이 최종 수치해에 도달하는 수렴과정을 보여준다. 반복회수 i 가 증가할수록 ER_m 값은 급속하게 감소하고, ER_m 은 $i=7$ 에서 그림에서 점선으로 나타낸 식 (34)의 수렴한계인 3×10^{-5} 에 도달하였다. 이 때 $ER_{m(i=7)} = 1.80 \times 10^{-5}$ 을 보였다. $i=7$ 이후에 ER_m 값은 매우 완만하게 감소하여 더 정확한 수치해를 찾는 데 기여하지 못했다. 여러 가지 다른 입력변수들에 대해서도 수치해석을 실행한 결과, 대부분 $i=5 \sim 10$ 회의 반복시행으로 미지변수들을 찾을 수 있었다.

Fig. 5는 Fig. 4에서 나타낸 반복회수에 따른 미지변수 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 의 수렴과정을 나타낸 것이다. 이 그림에 수렴한계를 최초로 만족하는 $i=7$ 의 최종 수치해를 ■로 표시하였다. 이 그림에서 보는 바와 같이 $i=2$ 에서 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 의 값들도 ■로 표시한 최종 수치해에 이미 거의 수렴한 것을 알 수 있다. 그러나 Fig. 4의 $i=2$ 에서 ▲로 표시한 $ER_m=1291 \times 10^{-5}$ 을 나타내고 있어 아직 수렴한계 3×10^{-5} 에 훨씬 못 미치고 있어 최종 수치해가 될 수는 없다. 이러한 사실은 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 값들의 아주 미소한 차이에도 불구하고 보의 비선형 거동에는 매우 민감하게 작용하며, 결과적으로 ER_m 에 큰 영향을 주기 때문이다. 따라서 수치해의 수렴문제에서 일반적으로 식 (31)-(33)의

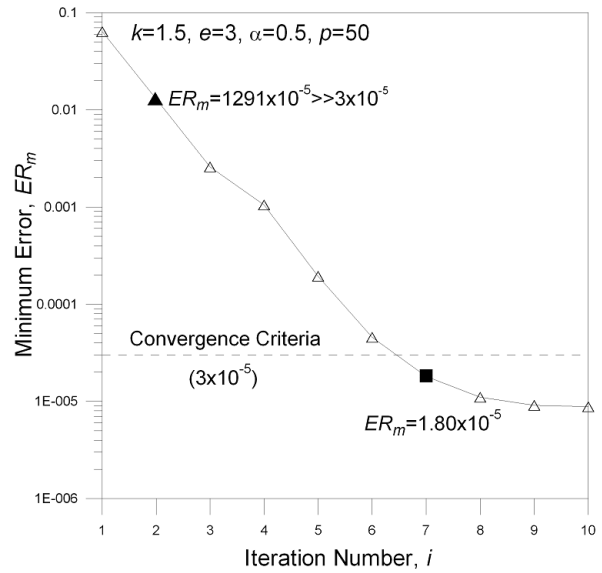


Fig. 4. Convergence of ER_m on iteration number

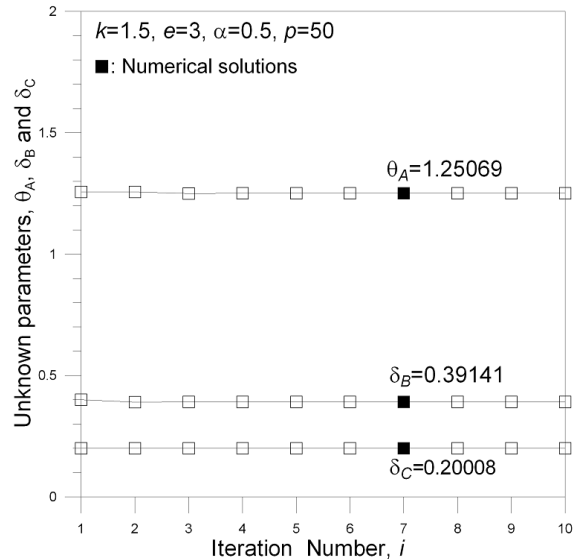


Fig. 5. Convergence of unknown parameters on iteration number

수렴한계식과 함께 사용하는 다음의 수렴한계식은 이 연구의 비선형 해석에서는 무의미한 것을 알 수 있다.

$$\left| \frac{\theta_{A(i)} - \theta_{A(i-1)}}{\theta_{A(i)}} \right| \leq \text{수렴한계} \quad (38)$$

$$\left| \frac{\delta_{B(i)} - \delta_{B(i-1)}}{\delta_{B(i)}} \right| \leq \text{수렴한계} \quad (39)$$

$$\left| \frac{\delta_{C(i)} - \delta_{C(i-1)}}{\delta_{C(i)}} \right| \leq \text{수렴한계} \quad (40)$$

위의 사실을 보완설명하기 위하여 반복회수 i 에 따른 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 와 최소통합오차 ER_m 의 $i=7$ 의 최종 수치해에 대한 비율을 Table 1에 나타내었다. 이 표에서 $i=7$ 의 괄호 속의 수치는 Fig. 5에 나타난 최종 수치해의 결과들을 나타낸다. Fig. 4에서 설명한 바와 같이 $i=2$ 의 $\theta_A, \delta_B, \delta_C$ 값들은 모두 $i=7$ 의 최종 수치해에 0.5% 이내로 수렴하였지만 $i=2$ 의 ER_m 은 $i=7$ 의 ER_m 에 717배를 보이고 있다. 이후 ER_m 은 Fig. 4에 보인 바와 같이 급속하게 감소하여 $i=7$ 에서 수렴한게 인 3×10^{-5} 보다 작아지게 되어 최종 수치해가 된다. 이후 $i=8, 9, 10$ 의 계속된 반복시행에서도 ER_m 값은 감소하기는 하였지만 감소율은 현저하게 작아졌다. $i=8, 9, 10$ 에 대한 $i=7$ 의 수치해에 대한 수렴비율은 유효숫자의 표현한계 때문에 모두 1.00000을 나타내고 있지만 수치해의 정도는 더 정해에 수렴한다. $i=10$ 에서 $ER_m = 0.98 \times 10^{-5} (= 0.544 \times 1.80 \times 10^{-5})$ 으로 수치해의 정도가 더 높아진 것을 알 수 있다.

Fig. 6은 반복회수 $i=1, 3, 5, 7$ 에 따른 정확탄성곡선의 수렴 과정을 보여준다. 이 그림에서 $i=1$ 의 첫 번째 반복시행에서 얻어진 정확탄성곡선은 우단인 지점 B의 경계조건 $\eta=0$ 를 만족시키지 못하는 것을 명확하게 알 수 있다. $i=3, 5$ 의 정확탄성곡선은 최종 수치해인 $i=7$ 의 정확탄성곡선에 거의 수렴한 것을 알 수 있다. 수렴한계를 적당히 완화하면 $i=3, 5$ 의 수치해를 최종 수치해로 산정할 수 있다. 예를 들어서 앞의 Table 1에서 보는 바와 같이 $i=3$ 의 $ER_m = 2.59 \times 10^{-3} (= 144 \times 1.8 \times 10^{-5})$ 이므로 식 (35)에서 나타난 수렴한계 1.8×10^{-5} 를 2.6×10^{-3} 으로 완화하면 Fig. 6에서 $i=3$ 의 정확탄성곡선이

최종 수치해로 산정된다.

Fig. 7은 정확탄성곡선($\xi-\eta$ 곡선)과 $\xi-\lambda$ 곡선을 한 그림에 나타낸 것이다. 정확탄성곡선에서 ■로 표시한 우측지점 B의 최종 좌표는(0.60859, 0)이므로 수평변위는 $\delta_B = 0.39141 (= 1 - 0.60859)$ 이다. $\xi-\lambda$ 곡선에서 지점 B 즉 $\xi = 0.60859$ 에서 $\lambda = 1.0$ 으로 수치해석의 실행에서 비확장성의 가정이 충실하게 구현되었음을 알 수 있다. 이 수치해석 예에서 변화위치 집중하중 p 의 재하위치는 $\alpha = 0.5$ 이므로 $\xi-\lambda$ 곡선에 ▲로 표시한 좌표 (0.29992, 0.5)의 $\xi = 0.29992$ 가 p 의 최종 위치가 된다. 따라서 변화위치 집중하중 p 의 수평변위 $\delta_C = 0.20008 (= \alpha(0.5) - 0.29992)$ 이다. 정확탄성곡선에 ▲로 표시되어 있

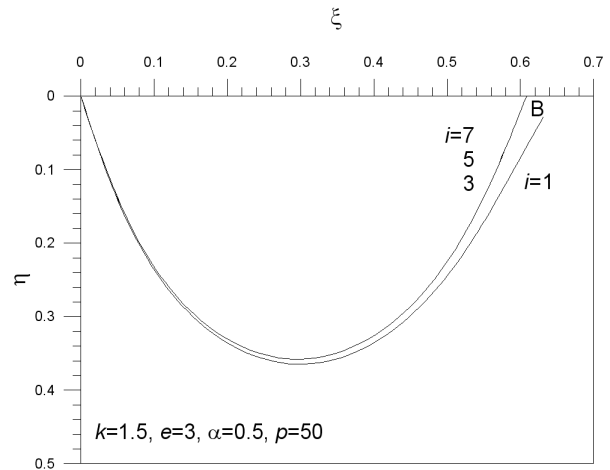


Fig. 6. Convergence of elastica on iteration number

Table 1. Convergence ratio of unknown parameters on iteration number

i	Convergence ratio*			
	θ_A	δ_B	δ_C	ER_m
1	1.004245	1.021946	0.999600	3550
2	1.004245	0.996398	0.999600	717
3	0.999222	1.001533	0.999600	144
4	1.000232	0.999463	0.999600	58.3
5	1.000024	1.000077	1.000399	10.8
6	1.000024	1.000000	1.000100	2.53
7**	1.000000 (1.25069)	1.000000 (0.39141)	1.000000 (0.20008)	1.00 (1.8e-5)
8	1.000000	1.000000	1.000000	0.611
9	1.000000	1.000000	1.000000	0.567
10	1.000000	1.000000	1.000000	0.544

* Convergence ratio=(Numerical result of i th)/(Numerical result of 7th)

** Number in (): Final numerical result

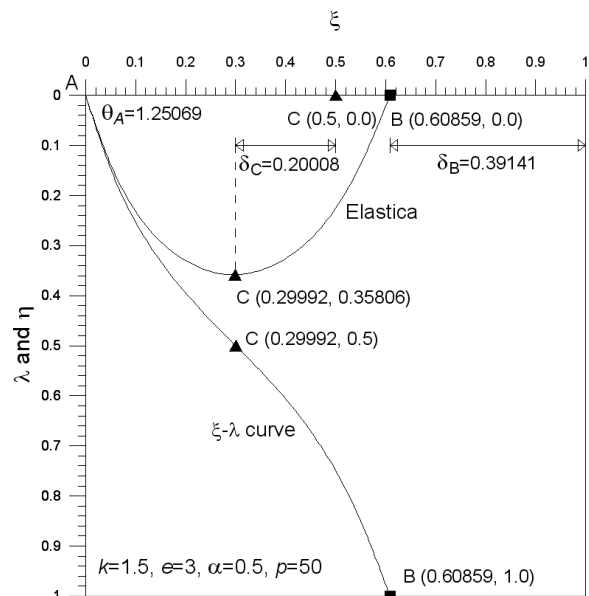


Fig. 7. Elastica and $\xi-\lambda$ curve

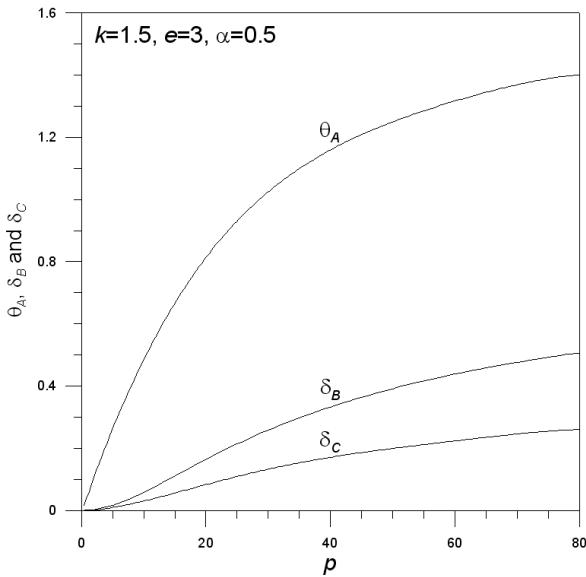


Fig. 8. Load-parameters curve

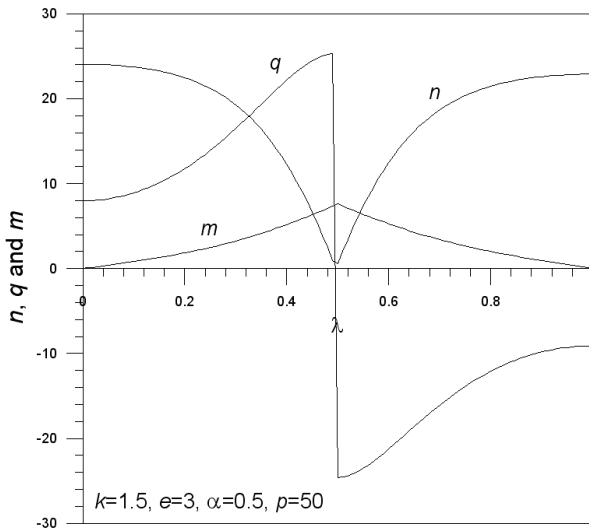


Fig. 9. Stress resultant diagram on λ

는 최종적인 p 의 재하위치인 C 점 $\xi = 0.29992$ 에서 수직변위 $\eta = 0.35806$ 이다. 좌측지점인 A에서 회전각 $\theta_A = 1.25069$ 이다.

Fig. 8은 하중과 변위의 관계를 나타낸 것이다. 무차원 하중 p 가 증가함에 따라 변위 θ_A , δ_B 및 δ_C 는 증가하며, 모두 강한 비선형의 관계를 보인다.

4.3 합응력

정확탄성곡선에 작용하는 합응력들은 비선형 보의 단면을 설계하는 데 반드시 필요한 자료이다. Fig. 9는 위의 수치해석 예에서 보인 $k = 1.5$, $e = 3$, $\alpha = 0.5$, $p = 50$ 의 입력조건에 대한

합응력 n , q , m 을 나타낸다. 보의 단면을 설계하기 위해서는 수평방향 좌표 ξ 보다는 축방향 좌표인 λ 에 대한 합응력의 값들이 더 중요하다. 따라서 Fig. 9에서는 λ 좌표계에 대한 합응력도를 나타내었다.

먼저, 예상한 바와 같이 축방향력 n 은 모두 인장력이며 양단 지점 A, B에서부터 크기가 감소하여 하중 작용점인 $\lambda (= \alpha) = 0.5$ 에서 그 값은 “0”이 된다. 전단력 q 는 양단인 지점 A, B에서부터 크기가 증가하여 하중 작용점인 $\lambda = 0.5$ 에서 전단력의 단락현상을 보이며, 단락의 크기는 예상한 바와 같이 하중 크기인 $p = 50$ 와 정확하게 일치한다. 휨 모멘트 m 은 양단 지점 A, B에서 “0”이고 하중 작용점 $\lambda = 0.5$ 에서 최대가 되며, 모두 “+” 부호 즉, 상단압축의 휨 모멘트가 발생한다.

5. 실험

이 연구에서 전개한 이론, 수치해석 방법 및 컴퓨터 프로그램을 검증하기 위하여 [A], [B] 2조의 회전-이동지점 보를 제작하여 실험실 규모의 실험을 실시하여, 비선형 거동값들을 측정하였다. 실험에 사용한 재료는 모형실험에 적당한 휨 강성을 갖는 플라스틱을 사용하였다. 보의 단면은 변단면의 제작이 용이한 변화폭 직사각형 단면을 채택하였다. Photo 1에 실험장치 및 진경을 나타내었다.

구조모형 실험 틀에 제작된 모형보를 거치하고 변화위치 집중 하중은 중량추를 이용하여 구현하였다. Photo 1에서 같이 중량 추에 의한 하중재하는 강선에 매달린 상태로 집중하중의 수평변위를 유발할 수 있게 한다. 중량추의 하중재하는 매우 천천히 재하여 모형보가 급격하게 평형상태에 도달하지 않고 충분히 안정상태를 유지하며 평형상태에 도달하도록 하였다. 미지변수인 좌측지점 A의 초기 회전각 θ_A , 우측지점 B의 수평변위 Δ_B , 집중하중의 수평변위 Δ_C 는 각도기와 자를 이용하여 측정하였다. 또한 보의 축방향 곡선길이의 중앙점 $s = l/2$ 에서 수직 변위 $y_{s=l/2}$ 는 dial gauge를 이용하여 측정하였다. 이 실험과 매우 유사한 실험 방법들이 문헌(Wilson, 1993)에 기술되어 있다.

모형보 [A], [B]의 제원은 다음과 같다.

[A] 변화폭 직사각형 단면 ($e = 1$)

$$l = 350 \text{ mm}, a = 175 \text{ mm} \quad (\alpha = a/l = 0.5)$$

$$I_A = \frac{30 \times 5^3}{12} = 312.5 \text{ mm}^4$$

$$I_B = \frac{45 \times 5^3}{12} = 468.75 \text{ mm}^4 \quad (k = I_B/I_A = 1.5)$$

$$E = 3.3 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$P = 50 \text{ N} \quad (p = Pl^2/EI_A = 5.939)$$

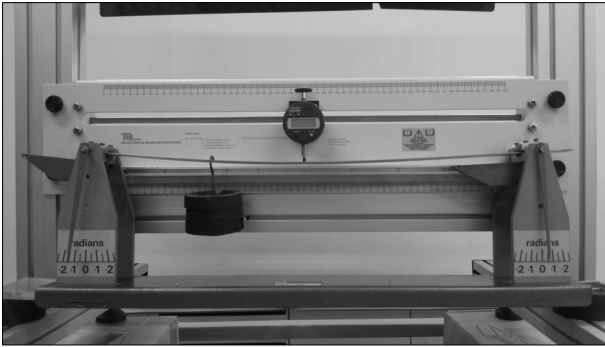


Photo 1. Laboratory scale experiment

Table 2. Comparison of results between this study, MIDAS and experiment

Specimen	Behavior parameter	This study	MIDAS	Experiment	Deviation (%)*
[A]	θ_A (rad)	0.2995	0.301	0.319	6.51
	Δ_B (mm)	7.793	7.832	8.05	3.30
	Δ_C (mm)	3.995	4.017	4.21	5.38
	$y_{s=1/2}$ (mm)	3.346	3.365	3.48	4.01
[B]	θ_A (rad)	0.5876	0.589	0.624	6.19
	Δ_B (mm)	42.22	42.69	43.9	3.98
	Δ_C (mm)	21.76	21.98	22.8	4.78
	$y_{s=1/2}$ (mm)	90.73	91.42	94.8	4.48

* Deviation(%)=(This study-Experiment) / This study \times 100

[B] 변화폭 직사각형 단면 ($e = 1$)

$$l = 500 \text{ mm}, a = 200 \text{ mm} \quad (\alpha = a/l = 0.4)$$

$$I_A = \frac{50 \times 5^3}{12} = 520.8 \text{ mm}^4$$

$$I_B = \frac{30 \times 5^3}{12} = 312.5 \text{ mm}^4 \quad (k = I_B/I_A = 0.6)$$

$$E = 3.3 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$P = 60 \text{ N} \quad (p = P^2/EI_A = 8.728)$$

위의 조건으로 모형실험을 실시하고 $\theta_A, \Delta_B, \Delta_C, y_{s=1/2}$ 을 실차원으로 측정하였다. 위의 입력조건으로 이 연구에서 작성한 컴퓨터 프로그램을 이용하여 $\theta_A, \delta_B, \delta_C, \eta_{\lambda=0.5}$ 를 계산하고 식 (13), (16), (17)을 이용하여 $\Delta_B, \Delta_C, y_{s=1/2}$ 의 실차원 값으로 환산하였다.

Table 2는 이 연구와 범용구조해석 프로그램인 MIDAS 및 실험으로 얻어진 비선형 거동값들을 비교한 표이다. 이 표에 보인 바와 같이 본 연구와 MIDAS의 결과는 매우 우수하게 일치한다. 또한 모형보 [A], [B]의 실험에서 이론과 실험 사이의

평균 오차는 약 4.83 %로 매우 근사하게 접근하고 있어 이 연구에서 유도한 지배 미분방정식, 개발된 수치해석 방법 및 작성된 컴퓨터 프로그램의 타당성을 입증할 수 있었다.

이론과 실험 사이의 오차는 다음의 3가지가 주요 원인으로 생각된다. 첫째, 모형보의 제작 오차, 둘째, 좌측 및 우측지점의 마찰력에 의한 오차, 셋째, 재료의 비선형성에 의한 오차 등을 들 수 있다.

이 표에서와 같이 비선형 거동은 이론값보다 실험 값이 더 크게 측정되고 있다. 이는 재료의 과도한 변형으로 인하여 항복점 이상의 응력을 받게 되어 재료의 탄성이 비선형 영역으로 진입하고 따라서 변위가 더 크게 발생한 때문으로 생각된다. 지점 A, B에 대한 마찰효과를 고려하면 이론 거동값이 더 크게 산정되어야 한다. 그럼에도 불구하고 실험값이 더 크게 측정된 것은 이 연구에서 고려하지 않은 재료의 비선형성이 변위의 증가효과로 크게 작용하고, 이러한 변위 증가효과가 마찰에 의한 감소효과 보다 더 크게 작용했기 때문이다.

6. 결론

이 연구는 3개의 미지변수를 갖는 변단면 기하 비선형 보의 수치해석 방법에 관한 연구이다. 연구의 대상 보로 변화위치 집중하중이 작용하는 회전-이동지점 변단면 보를 선택하였다. 이 보에서 3개의 미지변수들은 초기 회전각, 이동지점의 수평변위, 집중하중 위치의 수평변위이다. Bernoulli-Euler 보 이론을 이용하여 보의 기하 비선형 거동을 지배하는 연립 1계 미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식들을 반복법을 이용하여 미지변수들을 산정할 수 있는 수치해석 방법을 개발하였다.

하중 작용점 및 우측지점의 경계조건에 대한 각각의 수렴조건식을 하나의 통합 수렴조건식으로 유도하였다. 이 수렴조건식을 이용하여 기하 비선형 보를 수치해석한 결과로 10회 미만의 반복시행에서 수렴조건식을 만족하여 수치해를 찾을 수 있었다.

미지변수들은 보의 비선형 거동에 매우 민감하게 작용하여 최소 통합오차에 큰 영향을 주는 것을 알 수 있었다. 따라서 수치해의 수렴문제에서 일반적으로 식 (31)-(33)과 같은 경계조건들에 대한 수렴관계식 함께 사용하는 식 (38)-(40)과 같은 초기조건들에 대한 수렴관계식은 3개의 미지변수를 갖는 비선형 보의 해석 문제에서는 적용할 수 없는 것을 알 수 있었다.

이 연구에서 전개한 이론 및 수치해석 방법을 검증하기 위하여 실험실 규모의 실험을 실행하였으면 두 결과는 매우 근접하였다. 이론과 실험의 거동값 비교에서 구조물의 비선형 해석에 재료의 비선형성을 반드시 고려해야하는 물리적 근거를 확인할 수 있었다.

References

- Ahn, D.S. (2006) Buckling load and post-buckling behavior of tapered column. Dissertation of Engineering, Wonkwang University, Korea.
- Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O. (1969) Applied numerical methods. John Wiley and Sons, USA.
- Dado, M. and Al-Sadder, S. (2005) A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beam. Mechanics Research Communication, Vol. 32, No. 6, pp. 692-703.
- Gupta, A. K. (1985) Free vibrations of tapered beam. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 11, No. 1, pp. 19-36.
- Huang, Y. and Luo, Q. Z. (2011) A simple method to determine the critical buckling loads for axially in homogeneous beam with elastic restraints, Vol. 61, No. 9, pp. 2510-2517.
- Jan, J. D. (2010) Closed-form solution of large deflection for a guyed cantilever column pulled by an inclined cable. Journal of Material Science and Technology, Vol. 19, No. 1, pp. 130-136.
- Jung, J. H. and Kang, T. J. (2005) Large deflection analysis of fibers with non-linear elastic properties. Textile Research Journal, Vol. 75, No. 10, pp. 715-723.
- Lau, J. H. (1982) Large deflections of beams with combined loads. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 108, No. EM1, pp. 180-185.
- Lee, B. K., Carr, A. J., Lee, T. E. and Kim, I. J. (2005) Buckling loads of columns with constant volume. International Journal of Structural Stability and Dynamics. Vol. 296, pp. 381-387.
- Lee, B.K., Kim S.K., Lee, T.E. and Kim, G.S. (2009) Geometrical nonlinear analyses of post-buckled column with variable cross-section. Journal of the Korean Society of Civil Engineers, Vol. 29, No. 1A, pp. 53-60.
- Lee, B.K., Wilson, J.F. and Oh, S.J. (1993) Elastica of cantilevered beams with variable cross sections. International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 28, Issue 5, pp. 579-589.
- Liao, S. (2009) Series solution of large deformation of a beam with arbitrary variable cross section with an axial load. ANZIAM Journal Vol. 51, No. 1, pp. 10-33.
- Rojahan, C. (1968) Large deformations of elastic beams. Thesis for the degree of engineer, Stanford University.
- Shatarat, N., Al-Sadder, S., Katkhuda, H., Qabian, A. and Shatnawi, A. (2009) Behavior of a rhombus frame of non-linear elastic material under large deflection. International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 51, No. 2, pp. 166-177.
- Solano, C. E. (2009) Semi-exact solutions for large deflections of cantilever beam of non-linear elastic behavior. International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 28, No. 11, pp. 1359-1363.
- Wilson, J. F., Holloway, D. M. and Biggers, S. B. (1971) Stability experiments on the strongest column and circular arch. Experimental Mechanics, Vol. 11, pp. 303-308.
- Wilson, J. F. (1993) Experiments of the strength of solids, McGraw Hill, Inc., USA.
- Yi, X. (2011) Large deflection of tip loaded beam with differential transformation method. Advanced Material Research, Vol. 250-253, pp. 1232-1235.