

두 가지 유형의 보험청구가 있는 확산과정 리스크 모형의 파산확률[†]

원호정¹ · 최승경² · 이의용³

¹²³숙명여자대학교 통계학과

접수 2012년 10월 22일, 수정 2012년 11월 14일, 게재확정 2012년 12월 3일

요약

본 논문에서는 잉여금이 양의 추세모수를 갖는 확산과정을 따라 움직이고, 두 가지 유형의 보험청구가 있는 리스크 모형을 소개한다. 두 유형의 보험청구 금액은 서로 독립이고, 각각 지수분포를 따른다고 가정한다. 유형 I의 보험청구는 잦은 빈도로 발생하지만 청구 금액은 적고, 유형 II의 보험청구는 상대적으로 드물게 발생하지만 청구 금액이 많다고 가정한다. 적미분 방정식을 세워 잉여금이 없어지는 파산확률을 구하고, 각 유형에 의한 파산확률과 확산과정에 의해 자연적으로 파산이 이루어지는 확률을 함께 구한다. 또한 예제를 통해 두 유형의 보험청구와 확산과정이 전체 파산확률에 미치는 영향을 수치적으로 비교 분석한다.

주요용어: 리스크 모형, 잉여금, 적미분 방정식, 파산확률, 확산과정.

1. 서론

본 논문에서는 잉여금이 양의 추세모수를 갖는 확산과정을 따라 움직이고, 두 가지 유형의 보험청구가 있는 리스크 모형이 소개된다. 보험 상품의 잉여금은 $u > 0$ 에서 시작해서 추세모수 $c > 0$ 와 확산모수 σ^2 을 갖는 확산과정을 따라 움직이며, 포아송 과정을 따라 발생하는 두 가지 유형의 보험청구에 의해 감소한다. 유형 I에 인한 보험청구는 발생률 λ_1 인 포아송 과정 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 을 따라 발생하고, i 번째 청구 금액인 Y_i 는 서로 독립이고 평균이 $\mu_1 > 0$ 인 지수분포 $G(y) = 1 - e^{-y/\mu_1}, y > 0$ 를 따른다고 가정한다. 반면에 유형 II에 인한 보험청구는 발생률 λ_2 ($\lambda_2 < \lambda_1$)인 또 다른 포아송 과정 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 을 따라 발생하고, j 번째 청구 금액인 Z_j 는 서로 독립이고 평균이 $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 > \mu_1$)인 지수분포 $H(z) = 1 - e^{-z/\mu_2}, z > 0$ 를 따른다고 가정한다. 이때 두 포아송 과정 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 과 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 는 서로 독립이고, Y_i 들과 Z_j 들도 서로 독립이라고 가정한다. 잉여금의 움직임을 나타내는 확산과정의 추세모수는 $c = (1 + \theta)(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)$ 로 표현될 수 있다. 여기서 $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ 는 두 가지 유형의 보험청구에 의해 단위시간당 빠져나가는 기대 금액이고, $\theta > 0$ 는 상대적인 보완 부가금이다. θ 로 인해 잉여금의 추세모수 c 는 보험금의 지급률인 $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ 보다 크게 된다. 보험 상품의 잉여금 과정을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$U(t) = u - \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i - \sum_{j=1}^{N_2(t)} Z_j + W(t).$$

[†] 본 연구는 숙명여자대학교 2011학년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

¹ (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 석사.

² (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 박사.

³ 교신저자: (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 교수.

E-mail : eylee@sookmyung.ac.kr

여기서, $\{W(t), t \geq 0\}$ 은 추세모수가 $c > 0$ 이고, 확산 모수가 σ^2 인 브라운 운동 (Brownian motion)이다. 즉, $W(t)$ 는 정규분포 $N(ct, \sigma^2 t)$ 를 따른다.

잉여금 과정 $U(t)$ 의 표본경로 (sample path)를 그리면 Figure 1.1과 같고, 여기서는 잉여금이 확산과정에 의해 자연스럽게 파산되는 경우를 나타내고 있다.

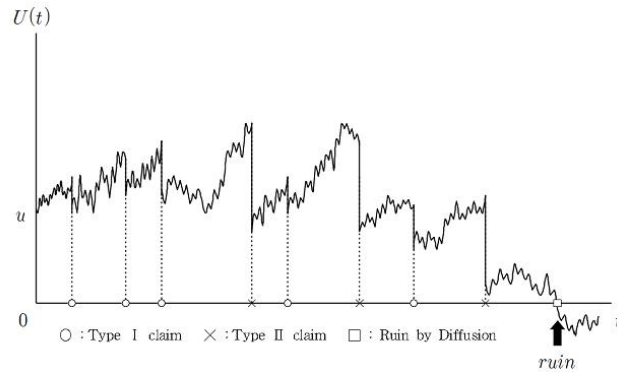


Figure 1.1 A sample path of surplus process $U(t)$

다양한 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률에 대한 연구는 많은 연구자들에 의해 수행되어왔다. 한 가지 유형의 보험청구가 있는 고전적인 리스크 모형에서의 파산확률에 대한 연구 결과는 Klugman 등 (2004)에 잘 요약되어 있다. Dufresne와 Gerber (1991)는 잉여금이 확산과정을 따라 움직이고, 한 가지 유형의 보험청구가 있는 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률을 연구하였다. 잉여금이 확산과정을 따라 움직인다는 가정은 향후 잉여금 움직임의 불확실성을 반영한 것으로, 이후 많은 연구자들의 연구 대상이 되었다.

예를 들어, Wang과 Wu (2000)는 Dufresne와 Gerber (1991)의 모형과 같은 리스크 모형에서 파산이 있기까지 잉여금의 최대치에 관련된 확률적 성질을 구하고, 파산 시 잉여금 수준의 분포에 대한 연구를 하였고, Zhang과 Wang (2003)은 파산까지의 시간, 파산 직전의 잉여금 수준, 파산 시 결손액의 결합확률분포를 구하였다. 또, Tsai (2009)는 확산과정이 있는 리스크 모형에서 보험청구의 빈도와 크기를 바꿔가면서 이들이 파산확률에 미치는 영향을 알아보았고, Tsai와 Lu (2010)는 확산과정이 있는 리스크 모형에서 파산확률의 바운드를 연구하였다. 하지만 이들 연구에서는 한 가지 유형의 보험청구만 고려되었다.

최근 들어, 두 가지 유형의 보험청구가 있는 리스크 모형이 연구되었다. Chan 등 (2003)은 두 가지 잉여금 과정이 있는 이 차원 리스크 모형을 제시하고, 이 차원 파산확률이 만족하는 적미분 방정식을 유도하였다. 하지만 명확한 해를 구하지는 못했다. Guo 등 (2007)도 두 개의 잉여금 과정을 고려하고, 이들의 합으로 표현되는 잉여금 과정의 파산확률을 연구하였다. Li와 Garrido (2005)와 Lv 등 (2010)은 두 가지 유형의 보험청구가 있는 리스크 모형을 좀 더 일반화하여, 한 유형은 포아송 과정을 따라 발생하고, 다른 유형은 재생과정을 따라 발생하는 경우에 전체 잉여금 과정의 파산확률을 연구하였다. Li와 Garrido (2005)는 파산확률의 라플라스 변환을 유도하였고, Lv 등 (2010)은 파산확률의 지수적 바운드를 구하였다.

두 가지 유형의 보험청구가 있는 리스크 모형의 예는 자동차 보험을 들 수 있다. 자동차 보험에서 보험청구는 대인보상의 유무에 따라 두 가지 유형으로 나눌 수 있다. 대물보상만 있는 보험청구는 빈도는

높지만 청구액이 작은 확률이 높고, 대인보상이 포함된 보험청구는 빈도는 낮지만 청구액이 상대적으로 클 확률이 높다.

보험수리에 관한 연구는 최근 들어 우리나라에서도 활발히 연구되기 시작하였다. 예를 들면, Hyeon과 Cha (2010)는 예정 수명분포와 예정 이자율이 보험료와 손실 확률에 미치는 영향력을 분석하였고, Yi 등 (2010)은 확장된 Buhlmann-Straub 모형에서 신뢰도 (credibility)를 추정하는 비모수적인 방법을 제시하였고, Jung (2011)은 이분형 로지스틱 회귀분석을 사용하여 비대면채널을 선호하는 고객의 유형을 분석하고, 이를 비대면채널 전략에 활용하는 연구를 수행하였다.

본 논문에서는 앞에서 소개하였듯이 잉여금이 확산과정을 따라 움직이고, 두 가지 유형의 보험청구가 함께 있는 리스크 모형이 연구된다. 이러한 리스크 모형은 기존의 리스크 모형과는 다른 새로운 모형으로, 본 논문 2절에서는 적미분 방정식을 세워 전체 잉여금의 파산확률을 구하고, 3절에서는 각 유형에 의한 파산확률과 확산과정에 의한 자연적인 파산확률을 같은 방법으로 구한다. 끝으로, 4절에서는 예제를 통해 두 유형의 보험청구와 확산과정이 전체 파산확률에 미치는 영향을 수치적으로 비교 분석한다.

2. 전체 잉여금 과정의 파산확률

이 절에서는 전체 잉여금의 파산확률에 대한 적미분 방정식을 유도하고, 이를 풀어 전체 잉여금의 파산확률을 구한다. 초기 잉여금이 $u > 0$ 일 때, 잉여금의 파산확률은 다음과 같이 정의된다.

$$\psi(u) = Pr\{U(t) \leq 0, \text{ 어떤 } t > 0 | U(0) = u\}.$$

작은 구간 $(0, h)$ 에서 발생할 수 있는 서로 배타적인 (mutually exclusive) 사건은 아래와 같이 총 6가지이다. 즉, 보험청구가 발생하지 않는 경우, 한 개의 유형 I 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 큰 경우, 한 개의 유형 II 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 큰 경우, 한 개의 유형 I 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 작은 경우, 한 개의 유형 II 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 작은 경우, 두 개 이상의 보험청구가 발생하는 경우이다. 각 경우에서 $\psi(u)$ 는 다음의 관계를 만족한다.

(i) 보험청구가 발생하지 않는 경우

$$P(\text{no claim}) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)h + o(h),$$

$$\psi(u) = \psi(u + W(h)).$$

(ii) 한 개의 유형 I 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 큰 경우

$$P(\text{a type I claim}) = \{\lambda_1 h + o(h)\}\{1 - \lambda_2 h + o(h)\},$$

$$\psi(u) = 1.$$

(iii) 한 개의 유형 II 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 큰 경우

$$P(\text{a type II claim}) = \{\lambda_2 h + o(h)\}\{1 - \lambda_1 h + o(h)\},$$

$$\psi(u) = 1.$$

(iv) 한 개의 유형 I 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 작은 경우

$$P(\text{a type I claim}) = \{\lambda_1 h + o(h)\}\{1 - \lambda_2 h + o(h)\},$$

$$\psi(u) = \psi(u - Y + W(h)).$$

(v) 한 개의 유형 II 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 작은 경우

$$P(a \text{ type II claim}) = \{\lambda_2 h + o(h)\}\{1 - \lambda_1 h + o(h)\},$$

$$\psi(u) = \psi(u - Z + W(h)).$$

(vi) 두 개 이상의 보험청구가 발생하는 경우

$$P(\text{two or more claims}) = o(h).$$

위의 6가지 가능한 경우로부터 파산확률 $\psi(u)$ 에 대한 식을 세우면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \{1 - (\lambda_1 + \lambda_2)h + o(h)\}E[\psi(u + W(h))] \\ &+ \{\lambda_1 h + o(h)\}\{1 - \lambda_2 h + o(h)\}E[Pr(Y \geq u + W(h))] \times 1 \\ &+ \{\lambda_2 h + o(h)\}\{1 - \lambda_1 h + o(h)\}E[Pr(Z \geq u + W(h))] \times 1 \\ &+ \{\lambda_1 h + o(h)\}\{1 - \lambda_2 h + o(h)\}E\left[\int_0^{u+W(h)} \psi(u - y + W(h))dG(y)\right] \\ &+ \{\lambda_2 h + o(h)\}\{1 - \lambda_1 h + o(h)\}E\left[\int_0^{u+W(h)} \psi(u - z + W(h))dH(z)\right] + o(h). \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서 $E[\psi(u + W(h))]$ 를 Taylor 급수를 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[\psi(u + W(h))] &= E\left[\psi(u) + \frac{\psi'(u)}{1!}W(h) + \frac{\psi''(u)}{2!}W(h)^2 + o(h)\right] \\ &= \psi(u) + ch\psi'(u) + \frac{\sigma^2}{2}h\psi''(u) + o(h). \end{aligned}$$

위 식을 식 (2.1)에 대입하고, 양변을 h 으로 나누고, $h \rightarrow 0$ 이면 아래의 적미분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} -c\psi'(u) &= -(\lambda_1 + \lambda_2)\psi(u) + \frac{\sigma^2}{2}\psi''(u) + \lambda_1\bar{G}(u) + \lambda_2\bar{H}(u) \\ &+ \lambda_1 \int_0^u \psi(u - y)dG(y) + \lambda_2 \int_0^u \psi(u - z)dH(z). \end{aligned} \quad (2.2)$$

식 (2.2)에 $G(y) \equiv 1 - e^{-y/\mu_1}$, $H(z) \equiv 1 - e^{-z/\mu_2}$ 를 대입하고, $x = u - y$, $t = u - z$ 로 치환한 뒤 $t = x$ 로 놓으면, 식 (2.3)과 같은 파산확률 $\psi(u)$ 에 대한 적미분방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{c}\psi(u) - \frac{\sigma^2}{2c}\psi''(u) - \frac{\lambda_1}{c}e^{-u/\mu_1} - \frac{\lambda_2}{c}e^{-u/\mu_2} \\ &- \frac{\lambda_1}{\mu_1 c}e^{-u/\mu_1} \int_0^u \psi(x)e^{x/\mu_1} dx - \frac{\lambda_2}{\mu_2 c}e^{-u/\mu_2} \int_0^u \psi(x)e^{x/\mu_2} dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

식 (2.3)을 u 에 대해 미분하면 식 (2.4)와 같다.

$$\begin{aligned} \psi''(u) &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{c}\psi'(u) - \frac{\sigma^2}{2c}\psi'''(u) + \frac{\lambda_1}{\mu_1 c}e^{-u/\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2 c}e^{-u/\mu_2} \\ &+ \frac{\lambda_1}{\mu_1^2 c}e^{-u/\mu_1} \int_0^u \psi(x)e^{x/\mu_1} dx + \frac{\lambda_2}{\mu_2^2 c}e^{-u/\mu_2} \int_0^u \psi(x)e^{x/\mu_2} dx \\ &- \frac{\lambda_1}{\mu_1 c}\psi(u) - \frac{\lambda_2}{\mu_2 c}\psi(u). \end{aligned} \quad (2.4)$$

첫 번째 적분 항을 없애기 위해서 식 (2.3)과 식 (2.4)을 $(2.3) \times \frac{1}{\mu_1} + (2.4)$ 와 같이 연립하여 풀면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\sigma^2}{2\mu_1 c}\right) \psi''(u) &= \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{c} - \frac{1}{\mu_1}\right) \psi'(u) + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_1 c} - \frac{\lambda_2}{\mu_2 c}\right) \psi(u) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{2c} \psi'''(u) + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2 c} - \frac{\lambda_2}{\mu_1 c}\right) e^{-u/\mu_2} \\ &\quad + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2^2 c} - \frac{\lambda_2}{\mu_1 \mu_2 c}\right) e^{-u/\mu_2} \int_0^u \psi(x) e^{x/\mu_2} dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

식 (2.5)를 u 에 대해서 미분하면 식 (2.6)과 같다.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\sigma^2}{2\mu_1 c}\right) \psi'''(u) &= \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{c} - \frac{1}{\mu_1}\right) \psi''(u) + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_1 c} - \frac{\lambda_2}{\mu_2 c}\right) \psi'(u) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{2c} \psi''''(u) + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_1 \mu_2 c} - \frac{\lambda_2}{\mu_2^2 c}\right) e^{-u/\mu_2} \\ &\quad - \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2^3 c} - \frac{\lambda_2}{\mu_1 \mu_2^2 c}\right) e^{-u/\mu_2} \int_0^u \psi(x) e^{x/\mu_2} dx + \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2^2 c} - \frac{\lambda_2}{\mu_1 \mu_2 c}\right) \psi(u). \end{aligned} \quad (2.6)$$

두 번째 적분 항을 없애기 위해서 식 (2.5)과 식 (2.6)을 $(2.5) \times \frac{1}{\mu_2} + (2.6)$ 과 같이 연립하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2c} \psi''''(u) + \left(1 + \frac{\sigma^2}{2\mu_1 c} + \frac{\sigma^2}{2\mu_2 c}\right) \psi'''(u) \\ - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \frac{\sigma^2}{2\mu_1 \mu_2 c}\right) \psi''(u) - \left(\frac{\lambda_1}{\mu_2 c} + \frac{\lambda_2}{\mu_1 c} - \frac{1}{\mu_1 \mu_2}\right) \psi'(u) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

식 (2.7)은 $\psi'(u)$ 에 대한 3차 선형 미분방정식 (third-order linear differential equation)이다. 이 미분방정식을 풀기 위해 보조방정식 (auxiliary equation)을 구하면 식 (2.8)과 같고, 해 m_1, m_2, m_3 는 3차 방정식 근의 공식을 이용해 풀면 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2c} m^3 + \left(1 + \frac{\sigma^2}{2\mu_1 c} + \frac{\sigma^2}{2\mu_2 c}\right) m^2 \\ - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \frac{\sigma^2}{2\mu_1 \mu_2 c}\right) m - \left(\frac{\lambda_1}{\mu_2 c} + \frac{\lambda_2}{\mu_1 c} - \frac{1}{\mu_1 \mu_2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

따라서 미분방정식 (2.7)의 일반해는 다음과 같다. (Kreyszig, 2007, pp. 53-58, 105-111)

$$\psi'(u) = c_1 e^{m_1 u} + c_2 e^{m_2 u} + c_3 e^{m_3 u}. \quad (2.9)$$

c_1, c_2, c_3 를 구하기 위해 $\psi'(0), \psi''(0), \psi'''(0)$ 를 먼저 유도한다. 식 (2.2)의 양변에 라플라스 변환을 취하면

$$\begin{aligned} -c\{s\psi^*(s) - \psi(0)\} &= -(\lambda_1 + \lambda_2)\psi^*(s) + \frac{\sigma^2}{2}\{s^2\psi^*(s) - s\psi(0) - \psi'(0)\} \\ &\quad + \frac{\lambda_1}{s}\{1 - g^*(s)\} + \frac{\lambda_2}{s}\{1 - h^*(s)\} \\ &\quad + \lambda_1\psi^*(s)g^*(s) + \lambda_2\psi^*(s)h^*(s) \end{aligned}$$

이 되고, $\psi^*(s)$ 에 대해 정리하면 식 (2.10)과 같다.

$$\psi^*(s) = \frac{-c\psi(0) + \frac{\lambda_1}{s}\{1 - g^*(s)\} + \frac{\lambda_2}{s}\{1 - h^*(s)\} - \frac{\sigma^2}{2}\{s\psi(0) + \psi'(0)\}}{-cs + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 g^*(s) - \lambda_2 h^*(s) - \frac{\sigma^2}{2}s^2}. \quad (2.10)$$

여기서, $\psi(0)$ 는 잉여금이 확산과정을 따라 움직이므로 $\psi(0) = 1$ 이다. $\psi'(0)$ 을 구하기 위해 $s \rightarrow 0$ 으로 보내면, 분모는 0으로 수렴한다. 따라서 $\psi^*(0)$ 이 존재하기 위해서는 분자도 0으로 수렴해야 한다. $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-g^*(s)}{s} = \mu_1$ 과 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-h^*(s)}{s} = \mu_2$ 임을 이용하여 $\psi'(0)$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\psi'(0) = \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2}{c} - 1 \right). \quad (2.11)$$

이를 이용하면 식 (2.3)으로부터

$$\psi''(0) = - \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2}{c} - 1 \right) \quad (2.12)$$

임을 알 수 있고, 식 (2.4)으로부터

$$\psi'''(0) = \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} + \frac{2c}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2}{c} - 1 \right) \quad (2.13)$$

임을 알 수 있다. 따라서 우리는 다음의 경계값 조건 (boundary condition)들을 얻을 수 있다.

$$\psi'(0) = c_1 + c_2 + c_3 = \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2}{c} - 1 \right). \quad (2.14)$$

$$\psi''(0) = c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3 = - \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2}{c} - 1 \right). \quad (2.15)$$

$$\psi'''(0) = c_1 m_1^2 + c_2 m_2^2 + c_3 m_3^2 = \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} + \frac{2c}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2}{c} - 1 \right). \quad (2.16)$$

식 (2.14), (2.15), (2.16)을 연립하면 c_1, c_2, c_3 를 구할 수 있다.

식 (2.9)를 적분하면 아래와 같이 파산확률 $\psi(u)$ 를 구할 수 있다.

$$\psi(u) = \frac{c_1}{m_1} (e^{m_1 u} - 1) + \frac{c_2}{m_2} (e^{m_2 u} - 1) + \frac{c_3}{m_3} (e^{m_3 u} - 1) + 1. \quad (2.17)$$

참고로, 전체 잉여금의 파산확률은 한 가지 유형의 보험청구가 있는 리스크 모형에서, 보험 청구가 발생률 $\lambda_1 + \lambda_2$ 인 포아송 과정을 따라오고 청구금액 X 가 G 와 H 의 혼합분포 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} G(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} H(x)$ 로 주어지는 경우와 접근 방법은 다르지만 같은 결과가 나온다.

다음 절에서는 각 유형에 의한 파산확률과 확산과정에 의해 자연적으로 파산이 이루어지는 확률을 각각 분리해 구한다.

3. 각 요인에 의한 파산확률

이 절에서는 각 요인에 의한 잉여금 과정의 파산확률을 유도해본다. $\psi_1(u)$ 는 유형 I의 보험청구에 의해 잉여금이 파산할 확률이고, $\psi_2(u)$ 는 유형 II의 보험청구에 의해 잉여금이 파산할 확률이고, $\psi_d(u)$ 는 잉여금이 확산과정에 의해 자연적으로 파산할 확률이다. 2절에서 언급한 바와 같이 작은 구간 $(0, h)$ 에서 발생할 수 있는 서로 배타적인 사건은 총 6가지이다. 각 경우에 $\psi_1(u), \psi_2(u), \psi_d(u)$ 는 다음의 관계를 만족한다.

(i) 보험청구가 발생하지 않는 경우

$$P(\text{no claim}) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)h + o(h),$$

$$\psi_1(u) = \psi_1(u + W(h)), \psi_2(u) = \psi_2(u + W(h)), \psi_d(u) = \psi_d(u + W(h)).$$

(ii) 한 개의 유형 I 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 큰 경우

$$P(\text{a type I claim}) = \{\lambda_1 h + o(h)\}\{1 - \lambda_2 h + o(h)\},$$

$$\psi_1(u) = 1, \psi_2(u) = 0, \psi_d(u) = 0.$$

(iii) 한 개의 유형 II 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 큰 경우

$$P(\text{a type II claim}) = \{\lambda_2 h + o(h)\}\{1 - \lambda_1 h + o(h)\},$$

$$\psi_1(u) = 0, \psi_2(u) = 1, \psi_d(u) = 0.$$

(iv) 한 개의 유형 I 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 작은 경우

$$P(\text{a type I claim}) = \{\lambda_1 h + o(h)\}\{1 - \lambda_2 h + o(h)\},$$

$$\psi_1(u) = \psi_1(u - Y + W(h)), \psi_2(u) = \psi_2(u - Y + W(h)), \psi_d(u) = \psi_d(u - Y + W(h)).$$

(v) 한 개의 유형 II 보험청구가 발생하되 청구 금액이 $u + W(h)$ 보다 작은 경우

$$P(\text{a type II claim}) = \{\lambda_2 h + o(h)\}\{1 - \lambda_1 h + o(h)\},$$

$$\psi_1(u) = \psi_1(u - Z + W(h)), \psi_2(u) = \psi_2(u - Z + W(h)), \psi_d(u) = \psi_d(u - Z + W(h)).$$

(vi) 두 개 이상의 보험청구가 발생하는 경우

$$P(\text{two or more claims}) = o(h).$$

위 관계로부터 먼저 유형 I의 보험청구에 의한 파산확률 $\psi_1(u)$ 를 구해보자. 위의 6가지 가능한 경우로부터 파산확률 $\psi_1(u)$ 에 대한 식을 세우면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= \{1 - (\lambda_1 + \lambda_2)h + o(h)\}E[\psi_1(u + W(h))] \\ &+ \{\lambda_1 h + o(h)\}\{1 - \lambda_2 h + o(h)\}E[Pr(Y \geq u + W(h))] \times 1 \\ &+ \{\lambda_2 h + o(h)\}\{1 - \lambda_1 h + o(h)\}E[Pr(Z \geq u + W(h))] \times 0 \\ &+ \{\lambda_1 h + o(h)\}\{1 - \lambda_2 h + o(h)\}E\left[\int_0^{u+W(h)} \psi_1(u - y + W(h))dG(y)\right] \\ &+ \{\lambda_2 h + o(h)\}\{1 - \lambda_1 h + o(h)\}E\left[\int_0^{u+W(h)} \psi_1(u - z + W(h))dH(z)\right] + o(h). \end{aligned} \quad (3.1)$$

2절에서 $\psi(u)$ 에 대한 적미분방정식을 유도할 때와 같은 방법으로 정리하면 다음과 같은 $\psi_1(u)$ 에 대한 적미분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} -c\psi_1'(u) &= -(\lambda_1 + \lambda_2)\psi_1(u) + \frac{\sigma^2}{2}\psi_1''(u) + \lambda_1\bar{G}(u) \\ &+ \lambda_1 \int_0^u \psi_1(u - y)dG(y) + \lambda_2 \int_0^u \psi_1(u - z)dH(z). \end{aligned} \quad (3.2)$$

식 (3.2)에 $G(y) \equiv 1 - e^{-y/\mu_1}$, $H(z) \equiv 1 - e^{-z/\mu_2}$ 를 대입하고, $x = u - y$, $t = u - z$ 로 치환한 뒤 $t = x$ 로 놓으면, 식 (3.3)과 같은 파산확률 $\psi_1(u)$ 에 대한 적미분방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \psi_1'(u) &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{c}\psi_1(u) - \frac{\sigma^2}{2c}\psi_1''(u) - \frac{\lambda_1}{c}e^{-u/\mu_1} \\ &- \frac{\lambda_1}{\mu_1 c}e^{-u/\mu_1} \int_0^u \psi_1(x)e^{x/\mu_1} dx - \frac{\lambda_2}{\mu_2 c}e^{-u/\mu_2} \int_0^u \psi_1(x)e^{x/\mu_2} dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

2절에서와 같은 방법으로 두 적분 항을 제거하면

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{2c} \psi_1''''(u) + \left(1 + \frac{\sigma^2}{2\mu_1 c} + \frac{\sigma^2}{2\mu_2 c}\right) \psi_1'''(u) \\ & - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \frac{\sigma^2}{2\mu_1 \mu_2 c}\right) \psi_1''(u) - \left(\frac{\lambda_1}{\mu_2 c} + \frac{\lambda_2}{\mu_1 c} - \frac{1}{\mu_1 \mu_2}\right) \psi_1'(u) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

이 된다. 식 (3.4)는 $\psi_1'(u)$ 에 대한 3차 선형 미분방정식이고, 일반해는 다음과 같다.

$$\psi_1'(u) = c_{11}e^{m_1 u} + c_{12}e^{m_2 u} + c_{13}e^{m_3 u}. \quad (3.5)$$

c_{11}, c_{12}, c_{13} 를 구하기 위해 $\psi_1'(0), \psi_1''(0), \psi_1'''(0)$ 를 먼저 유도한다. 식 (3.2)의 양변에 라플라스 변환을 취하면

$$\begin{aligned} -c\{s\psi_1^*(s) - \psi_1(0)\} &= -(\lambda_1 + \lambda_2)\psi_1^*(s) + \frac{\sigma^2}{2}\{s^2\psi_1^*(s) - s\psi_1(0) - \psi_1'(0)\} \\ &+ \frac{\lambda_1}{s}\{1 - g^*(s)\} + \lambda_1\psi_1^*(s)g^*(s) + \lambda_2\psi_1^*(s)h^*(s) \end{aligned}$$

이 되고, $\psi_1^*(s)$ 에 대해 정리하면 식 (3.6)과 같다.

$$\psi_1^*(s) = \frac{-c\psi_1(0) + \frac{\lambda_1}{s}\{1 - g^*(s)\} - \frac{\sigma^2}{2}\{s\psi_1(0) + \psi_1'(0)\}}{-cs + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 g^*(s) - \lambda_2 h^*(s) - \frac{\sigma^2}{2}s^2}. \quad (3.6)$$

여기서, 잉여금이 확산과정을 따라 움직이므로 $\psi_d(0) = 1$ 이 되고, $\psi_1(0) = 0$ 이 된다. $\psi_1'(0)$ 을 구하기 위해 $s \rightarrow 0$ 으로 보내면, 분모는 0으로 수렴한다. 따라서 $\psi_1^*(0)$ 이 존재하기 위해서는 분자도 0으로 수렴해야 한다. 즉,

$$\psi_1'(0) = \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{c}\right)$$

이 된다. 이를 이용하면 식 (3.3)으로부터

$$\psi_1''(0) = -\left(\frac{2c}{\sigma^2}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{c}\right) - \left(\frac{2c}{\sigma^2}\right) \left(\frac{\lambda_1}{c}\right)$$

임을 알 수 있고, 또 2절에서와 같은 방법으로

$$\psi_1'''(0) = \frac{2c}{\sigma^2} \left\{ \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{c}\right) \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} + \frac{2c}{\sigma^2}\right) + \frac{\lambda_1}{\mu_1 c} + \frac{2c}{\sigma^2} \frac{\lambda_1}{c} \right\}$$

임을 알 수 있다. 따라서 우리는 다음의 경계값 조건 (boundary condition)들을 얻을 수 있다.

$$\psi_1'(0) = c_{11} + c_{12} + c_{13} = \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{c}\right). \quad (3.7)$$

$$\psi_1''(0) = c_{11}m_1 + c_{12}m_2 + c_{13}m_3 = -\left(\frac{2c}{\sigma^2}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{c}\right) - \left(\frac{2c}{\sigma^2}\right) \left(\frac{\lambda_1}{c}\right). \quad (3.8)$$

$$\psi_1'''(0) = c_{11}m_1^2 + c_{12}m_2^2 + c_{13}m_3^2 = \frac{2c}{\sigma^2} \left\{ \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{c}\right) \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} + \frac{2c}{\sigma^2}\right) + \frac{\lambda_1}{\mu_1 c} + \frac{2c}{\sigma^2} \frac{\lambda_1}{c} \right\}. \quad (3.9)$$

식 (3.7), (3.8), (3.9)를 연립하면 c_{11}, c_{12}, c_{13} 를 구할 수 있다.

식 (3.5)를 적분하면 아래와 같이 유형 I의 보험청구에 의한 파산확률 $\psi_1(u)$ 를 구할 수 있다.

$$\psi_1(u) = \frac{c_{11}}{m_1}(e^{m_1 u} - 1) + \frac{c_{12}}{m_2}(e^{m_2 u} - 1) + \frac{c_{13}}{m_3}(e^{m_3 u} - 1). \quad (3.10)$$

마찬가지 방법으로 유형 II의 보험청구에 의한 파산확률 $\psi_2(u)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\psi_2(u) = \frac{c_{21}}{m_1}(e^{m_1 u} - 1) + \frac{c_{22}}{m_2}(e^{m_2 u} - 1) + \frac{c_{23}}{m_3}(e^{m_3 u} - 1). \quad (3.11)$$

확산과정에 의한 자연적인 파산확률 $\psi_d(u)$ 또한 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

$$\psi_d(u) = \frac{c_{d1}}{m_1}(e^{m_1 u} - 1) + \frac{c_{d2}}{m_2}(e^{m_2 u} - 1) + \frac{c_{d3}}{m_3}(e^{m_3 u} - 1) + 1. \quad (3.12)$$

식 (2.17), (3.10), (3.11), (3.12)로부터 우리는 $\psi(u) = \psi_1(u) + \psi_2(u) + \psi_d(u)$ 이 됨을 알 수 있다.

끝으로, $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{d1}, c_{d2}, c_{d3}$ 을 구하는 행렬 방정식을 요약하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{d1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{d2} \\ c_{13} & c_{23} & c_{d3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1'(0) & \psi_2'(0) & \psi_d'(0) \\ \psi_1''(0) & \psi_2''(0) & \psi_d''(0) \\ \psi_1'''(0) & \psi_2'''(0) & \psi_d'''(0) \end{pmatrix}.$$

이때, $\psi_1'(0), \psi_1''(0), \psi_1'''(0), \psi_2'(0), \psi_2''(0), \psi_2'''(0), \psi_d'(0), \psi_d''(0), \psi_d'''(0)$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \psi_1'(0) &= \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{c} \right), \quad \psi_1''(0) = - \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{c} \right) - \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\lambda_1}{c} \right), \\ \psi_1'''(0) &= \frac{2c}{\sigma^2} \left\{ \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{c} \right) \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} + \frac{2c}{\sigma^2} \right) + \frac{\lambda_1}{\mu_1 c} + \frac{2c \lambda_1}{\sigma^2 c} \right\}, \\ \psi_2'(0) &= \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_2 \mu_2}{c} \right), \quad \psi_2''(0) = - \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2 \mu_2}{c} \right) - \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\lambda_2}{c} \right), \\ \psi_2'''(0) &= \frac{2c}{\sigma^2} \left\{ \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_2 \mu_2}{c} \right) \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} + \frac{2c}{\sigma^2} \right) + \frac{\lambda_2}{\mu_2 c} + \frac{2c \lambda_2}{\sigma^2 c} \right\}, \\ \psi_d'(0) &= - \frac{2c}{\sigma^2}, \quad \psi_d''(0) = \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right)^2 + \left(\frac{2c}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} \right), \\ \psi_d'''(0) &= \frac{2c}{\sigma^2} \left\{ - \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} + \frac{2c}{\sigma^2} \right) - \frac{2c}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c} \right) - \frac{\lambda_1}{\mu_1 c} - \frac{\lambda_2}{\mu_2 c} \right\}. \end{aligned}$$

4. 파산확률의 수치적 비교

이 절에서는 초기 잉여금을 $u = 10$ 으로, 잉여금의 확산과정의 추세모수를 $c = 2.5$ 로 가정하고, 앞 절에서 유도한 네 가지의 파산확률 $\psi(u), \psi_1(u), \psi_2(u), \psi_d(u)$ 를 구하고, 이들을 수치적으로 비교하여, 잉여금의 파산확률에 미치는 모수들의 영향을 살펴본다. $\lambda_1 \mu_1$ 은 단위시간 당 유형 I의 보험청구에 의해 빠져나가는 기대손실금액이고, $\lambda_2 \mu_2$ 는 단위시간 당 유형 II의 보험청구에 의해 빠져나가는 기대손실 금액이므로, 유형 I과 유형 II의 보험청구의 형평성을 맞추기 위해 $\lambda_1 \mu_1 = \lambda_2 \mu_2 = 1$ 로 놓는다. 모수 $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \sigma^2$ 의 값을 변화시키며 전체 파산확률 $\psi(u)$ 에서 $\psi_1(u), \psi_2(u), \psi_d(u)$ 이 차지하는 비중을 살펴본다. 여기서, 유형 I의 보험청구는 잦은 빈도로 발생하지만 청구 금액은 적고, 유형 II의 보험청구는 상대적으로 드물게 발생하지만 청구 금액이 크므로 $\lambda_1 > \lambda_2, \mu_1 < \mu_2$ 를 가정한다. 아래의 표에서 괄호 안의 숫자는 해당 파산확률이 전체 파산확률에서 차지하는 비율이다. 먼저, $\sigma^2 = 0.1$ 일 때, 파산확률을 구해보면 Table 4.1과 같다.

Table 4.1 Ruin probability when $\sigma^2 = 0.1$

σ^2	λ_1	μ_1	λ_2	μ_2	$\psi(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$	$\psi_d(u)$
0.1	1	1	0.5	2	0.2155	0.0637 (29.54)	0.1491 (69.18)	0.0028 (1.29)
			0.2	5	0.3954	0.0513 (12.96)	0.3418 (86.43)	0.0024 (0.61)
			0.05	20	0.5798	0.0200 (3.46)	0.5588 (96.38)	0.0010 (0.17)
			0.01	100	0.6482	0.0053 (0.82)	0.6427 (99.14)	0.0002 (0.04)
	1.5	0.67			0.0775	0.0285 (36.83)	0.0471 (60.84)	0.0018 (2.33)
	2	0.5	1	1	0.0615	0.0179 (29.17)	0.0420 (68.29)	0.0016 (2.55)
	5	0.2			0.0377	0.0048 (12.62)	0.0318 (84.41)	0.0011 (2.97)
	10	0.1			0.0315	0.0020 (6.43)	0.0285 (90.46)	0.0010 (3.11)

Table 4.1에서 $\lambda_1 = \mu_1 = 1$ 로 고정되어 있고, λ_2, μ_2 를 변화시킬 때를 살펴보자. μ_2 가 증가함에 따라 λ_2 는 감소함에도 불구하고 전체 파산확률 $\psi(u)$ 가 증가함을 알 수 있다. 즉, 전체 파산확률에 미치는 영향은 발생률 λ_2 보다 평균 청구 금액 μ_2 가 더 크다는 것을 알 수 있다. 또한 유형 I의 보험청구에 의한 파산확률 $\psi_1(u)$ 과 확산과정에 의한 자연적인 파산확률 $\psi_d(u)$ 는 감소하는데, 유형 II의 보험청구에 의한 파산확률 $\psi_2(u)$ 이 상대적으로 빠르게 증가하면서 전체 파산확률 $\psi(u)$ 를 증가시킴을 알 수 있다. 이제 $\lambda_2 = \mu_2 = 1$ 로 고정되어 있고 λ_1, μ_1 을 변화시킬 때를 살펴보자. μ_1 이 감소함에 따라 λ_1 이 증가함에도 불구하고 전체 파산확률 $\psi(u)$ 가 감소함을 알 수 있다. 여기서도 전체 파산확률에 미치는 영향이 발생률 λ_1 보다는 평균 청구 금액 μ_1 이 더 크다는 것을 알 수 있다. 또한 두 경우에서 모두 잉여금 과정의 확산 모수 $\sigma^2 = 0.1$ 이 매우 작아 $\psi_d(u)$ 가 $\psi(u)$ 에서 차지하는 비중은 상대적으로 작음을 알 수 있다.

이번에는 $\sigma^2 = 1$ 일 때, 네 가지 파산확률을 알아보자. 결과는 Table 4.2에 나타나 있다.

Table 4.2 Ruin probability when $\sigma^2 = 1$

σ^2	λ_1	μ_1	λ_2	μ_2	$\psi(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$	$\psi_d(u)$
1	1	1	0.5	2	0.2517	0.0672 (26.71)	0.1548 (61.52)	0.0296 (11.77)
			0.2	5	0.4168	0.0520 (12.47)	0.3405 (81.70)	0.0243 (5.83)
			0.05	20	0.5864	0.0205 (3.50)	0.5561 (94.84)	0.0097 (1.66)
			0.01	100	0.6499	0.0059 (0.91)	0.6415 (98.71)	0.0025 (0.39)
	1.5	0.67			0.1172	0.0358 (30.54)	0.0581 (49.59)	0.0233 (19.87)
	2	0.5	1	1	0.0996	0.0239 (24.01)	0.0543 (54.56)	0.0213 (21.43)
	5	0.2			0.0705	0.0073 (10.33)	0.0459 (65.11)	0.0173 (24.56)
	10	0.1			0.0619	0.0033 (5.27)	0.0428 (69.06)	0.0159 (25.67)

Table 4.2에서도 Table 4.1에서와 비슷한 해석과 결론을 내릴 수 있다.

끝으로, $\sigma^2 = 10$ 일 때의 파산확률을 알아보자. 결과는 Table 4.3에 나타나 있다.

Table 4.3 Ruin probability when $\sigma^2 = 10$

σ^2	λ_1	μ_1	λ_2	μ_2	$\psi(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$	$\psi_d(u)$
10	1	1	0.5	2	0.5252	0.0671 (12.78)	0.1429 (27.20)	0.3152 (60.02)
			0.2	5	0.5899	0.0523 (8.86)	0.2912 (49.36)	0.2465 (41.78)
			0.05	20	0.6603	0.0307 (4.64)	0.4935 (74.73)	0.1362 (20.63)
			0.01	100	0.6880	0.0209 (3.04)	0.5827 (84.69)	0.0844 (12.26)
	1.5	0.67			0.4699	0.0486 (10.34)	0.0748 (15.92)	0.3465 (73.74)
	2	0.5	1	1	0.4613	0.0363 (7.87)	0.0756 (16.39)	0.3494 (75.74)
	5	0.2			0.4447	0.0144 (3.23)	0.0768 (17.27)	0.3535 (79.50)
	10	0.1			0.4389	0.0072 (1.63)	0.0772 (17.58)	0.3546 (80.79)

Table 4.1, Table 4.2, Table 4.3을 함께 살펴보면, 확산모수 σ^2 이 커짐에 따라 전체 파산확률 $\psi(u)$ 에서

자연적인 파산확률 $\psi_d(u)$ 이 차지하는 비중이 상대적으로 빠르게 증가하여 전체 파산확률 $\psi(u)$ 를 증가 시킴을 알 수 있다.

결론적으로, 드물게 발생하지만 청구 금액이 많은 유형 II의 보험청구가 자주 발생하지만 청구 금액이 적은 유형 I의 보험청구보다 전체 파산확률에 미치는 영향이 더 크다는 것을 알 수 있고, 확산모수가 커짐에 따라 확산과정에 의한 자연적인 파산확률이 전체 파산확률에서 차지하는 비중이 급격히 커짐을 알 수 있다.

참고문헌

- Chan, W. S., Yang, H. and Zhang, L. (2003). Some results on ruin probabilities in a two-dimensional risk model. *Insurance: Mathematics & Economics*, **32**, 345-358.
- Dufresne, F. and Gerber, H. U. (1991). Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics & Economics*, **10**, 51-59.
- Guo, J. Y., Yuen, K. C. and Zhou, M. (2007). Ruin probabilities in Cox risk models with two dependent classes of business. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **23**, 1281-1288.
- Hyeon, J. M. and Cha, J. H. (2010). Analysis of influential factors in whole life insurance model. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 71-86.
- Jung, S. C. (2011). The preference for direct marketing according to the characteristics of policy holders in the life insurance industry. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 1137-1143.
- Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2004). *Loss model: From data to decisions*, 2nd edition, John Wiley & Sons, Hoboken.
- Kreyszig, E. (2007). *Advanced engineering mathematics*, 9th edition, John Wiley & Sons, Singapore.
- Li, S. and Garrido, J. (2005). Ruin probabilities for two classes of risk processes. *ASTIN Bulletin*, **35**, 61-77.
- Lv, T. L., Guo, J. Y. and Zhang, X. (2010). Ruin probabilities for a risk model with two classes of claims. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **26**, 1749-1760.
- Tsai, C. C. L. (2009). On the ordering of ruin probabilities for the surplus process perturbed by diffusion. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2009**, 187-204.
- Tsai, C. C. L. and Lu, Y. (2010). An effective method for constructing bounds for ruin probabilities for the surplus process perturbed by diffusion. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2010**, 200-220.
- Wang, G. and Wu, R. (2000). Some distribution for classical risk process that is perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics & Economics*, **26**, 15-24.
- Yi, M. J., Go, H. N., Choi, S. K. and Lee, E. Y. (2010). A study on the estimation of the credibility in an extended Buhlmann-Straub model. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 1181-1190.
- Zhang, C. and Wang, G. (2003). The joint density function of three characteristics on jump-diffusion risk process. *Insurance: Mathematics & Economics*, **32**, 445-455.

Ruin probabilities in a risk process perturbed by diffusion with two types of claims[†]

Ho Jeong Won¹ · Seung Kyoung Choi² · Eui Yong Lee³

^{1,2,3}Department of Statistics, Sookmyung Women's University

Received 22 October 2012, revised 14 November 2012, accepted 3 December 2012

Abstract

In this paper, we introduce a continuous-time risk model where the surplus follows a diffusion process with positive drift while being subject to two types of claims. We assume that the sizes of both types of claims are exponentially distributed and that type I claims occur more frequently, however, their sizes are smaller than type II claims. We obtain the ruin probability that the level of the surplus becomes negative, by establishing an integro-differential equation for the ruin probability. We also obtain the ruin probabilities caused by each type of claim and the probability that the level of the surplus becomes negative naturally due to the diffusion process. Finally, we illustrate a numerical example to compare the impacts of two types of claim on the ruin probability of the surplus with that of the diffusion process in the risk model.

Keywords: Diffusion process, integro-differential equation, risk model, ruin probability, surplus.

[†] This research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2011.

¹ Master, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea.

² Doctor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea.

³ Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea. E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr