

# Comparative Study on Axes of Rotation Data by Within-Subjects Designs

Jinuk Kim<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Physical Education, Kunsan National University

(Received July 11, 2013; Revised September 13, 2013; Accepted October 15, 2013)

---

## Abstract

The axis of rotation in biomechanics is a major tool to investigate joint function; therefore, many methods to estimate the axis of rotation have been developed. However, there exist several problems to describe, estimate, and test the axis statistically. The axis is directional data(axial data) and it should not be analyzed with traditional statistics. A proper comparative method should be considered to compare axis estimating methods for the same given data ANOVA (analysis of variance) is a frequently used statistical method to compare treatment means in experimental designs. In case of the axial data response assumed to come from Watson distribution, there are a few ANOVA method options. This study constructed ANOVA models for within-subjects designs of axial data. Two models (one within-subjects factor and two within-subjects factors crossed design) were considered. The empirical data used in this study were instantaneous axes of rotation of flexion/extension at the knee joint and the flexion/extension and pronation/supination at the elbow joint. The results of this study can be further applied to the various analysis of experimental designs.

Keywords: Axis of rotation, axial data, Watson distribution, within-subjects design, directional statistics.

---

## 1. 서론

순간회전축(instantaneous axis of rotation)은 강체의 공간 회전운동에서 순간속도가 '0'인 점(point)들의 집합으로 무한의 길이를 가지는 선으로 정의될 수 있다. 운동역학(biomechanics)에서는 일반적으로 이 선과 평행한 단위벡터(unit vector)  $\mathbf{x}(-\mathbf{x})$ 로서 회전축의 방향을 표현하게 되는데 인체 분절 및 관절의 회전운동을 묘사하기 위한 중요한 자료이다. 인체관절의 순간회전축 (Woltring, 1990), 캘리브레이션(calibration)과정에서의 회전축 (Chang과 Pollard, 2007; MacWilliams 등, 2010), 그리고 회전자유도가 하나인 관절의 대표축을 구하는 것 (Gamage과 Lasenby, 2002; Halvorsen 등, 1999; Schwartz와 Rozumalski, 2005; Woltring, 1990)이 회전축과 관련이 있으며 타당한 회전축을 구하는 방법과 비교연구 (Ehrig 등, 2007; MacWilliams, 2008)가 이루어졌다.

선행연구를 보면 회전축을 통계적으로 기술하고 추정, 검증하는데 있어 문제점을 발견할 수 있다. 첫째, 학자들마다 회전축의 표현법이 일치하지 않는다. 회전축이 지나가는 서로 평행한 양쪽 면(plane)에 점들로 표현하거나 (Blankevoort 등, 1990), 직교하는 두 면에 회전축을 투사(projection)하여 각도로 표현하거나 (Sheehan, 2007), 또는 임의의 기준축과의 각도 (Cerveri 등, 2005; Metzger 등, 2010)로써

---

<sup>1</sup>Professor, Department of Physical Education, Kunsan National University Daehakro 558, Jeonllabukdo 573-701, Korea. E-mail: jinuk@kunsan.ac.kr

회전축을 표현한다. 둘째, 이러한 표현법은 적절하지 않다. 단순히 축 간의 각도만 가지고 표현한다면 정보를 잃을뿐더러, 또한 두 면에 투사된 두 성분은 서로 독립적이지 않기 때문이다. 회전축은 자유도 2인 단위벡터로서 구면좌표계(spherical coordinate system)의 여위도(colatitude), 경도(longitude) 또는 고도(elevation), 편각(deviation)으로 표현하는 것이 좋다 (Kim, 2009). 셋째, 다양한 회전축 추정 방법의 비교에 있어서 적절한 통계분석을 적용하지 않는다는 점이다. 일반적으로 시뮬레이션자료 또는 영상자료를 가지고 다양한 추정방법을 적용하여 회전축을 구하고 이에 대한 기술적인(descriptive) 비교를 시도하거나 또는 통계적 방법에 의해서 비교를 수행한다. 이때 임의화설계(randomized design)에 의한 분산분석(analysis of variance)을 적용 (Leitch 등, 2010; MacWilliams, 2008)시킨다. 그러나 동일한 자료에 여러 추정방법을 적용시켜 결과를 비교할 때는 임의화블록설계(randomized block design) 또는 피험자내 설계(within-subjects design)에 의한 분산분석을 적용하여야 한다. 물론 비교에 있어서 올바른 통계적 방법이 적용된 연구 (Kim, 2010b; Schache 등, 2006; Schwartz와 Rozumalski, 2005; Tay 등, 2010)도 있지만 회전축은 위에서 언급한 잘못된 변환값을 사용하고 있다. 독립적인 두 개의 좌표계 성분으로 나타내야 정확한 회전축을 표현할 수 있으며 적절한 통계적방법이 필요하다.

만일 인체운동의 실험에서 얻어진 관측자료가 축의 형태를 가진 이와 같은 단위벡터라면 방향통계학(directional statistics)의 관심의 대상이 되며 이를 축자료(axial data)라 한다 (Mardia와 Jupp, 2000). 이러한 축자료를 모형화하기 위해 가장 많이 사용되는 간단한 형태의 통계분포가 왓슨분포(Watson distribution)이다 (Fisher 등, 1993; Mardia와 Jupp, 2000). 주어진 축자료가 왓슨분포로부터 추출된 것이라 가정한다면 추정과 검정 같은 다양한 통계적 추론이 용이해진다.

실험에서 처리(treatments)간 반응(response)의 평균 비교를 위해서 많이 사용되는 통계적 방법은 분산분석이다. 축자료의 분산분석은 Watson과 Williams (1956)에 의해서 고안이 되었으며, 여러 가지 구형자료(spherical data)에 대한 분산분석 방법이 Mardia와 Jupp (2000)에 의해서 제시되었다. 그러나 축자료의 경우 임의화설계에 의한 일원분산분석과 이원분산분석모형 (Figueiredo, 2006; Stephens, 1982)만이 발표되었다.

따라서 본 연구에서는 피험자내 설계의 분산분석 모형에 따른 축자료의 비교연구를 수행하고자 한다. 구체적으로 피험자내 요인(반복요인)이 하나인 모형과 피험자내 요인이 둘인 모형으로 모두 고정효과모형(fixed effects model)이다. 실증적 분석은 Kim (2010a, 2010b)에 의해서 수행되었던 실험의 자료를 이용하였으며 이는 슬관절(knee joint)과 주관절(elbow joint)에서 수동운동과 능동운동시 굴곡/신전과 회내/회외 순간회전축이다.

## 2. 축자료

### 2.1. 왓슨분포

왓슨분포는  $\boldsymbol{\mu}$ 와  $\kappa$ 가 모수인 분포로  $W(\boldsymbol{\mu}, \kappa)$ 로 표기하며 다음과 같은 밀도함수를 가진다.

$$f(\pm \mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \kappa) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{p}{2}, \kappa\right)^{-1} \exp\left\{\kappa(\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x})^2\right\}, \quad (2.1)$$

여기서  $M(1/2, p/2, \cdot)$ 은 쿨머함수(Kummer function)나 합류 초기하함수(confluent hyper-geometric function)로서 다음과 같다.

$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{p}{2}, \kappa\right) = B\left(\frac{p-1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{-1} \int_{-1}^1 e^{\kappa t^2} (1-t^2)^{\frac{p-3}{2}} dt. \quad (2.2)$$

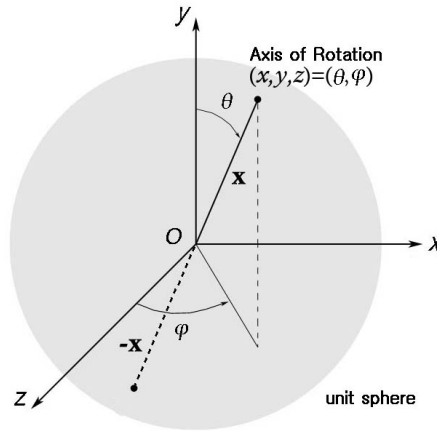


Figure 2.1. Spherical coordinate system for axial data

이 분포  $W(\boldsymbol{\mu}, \kappa)$ 는  $\boldsymbol{\mu}$ 를 중심으로 회전대칭(rotationally symmetric)이다.  $\kappa > 0$ 일 경우  $\pm\boldsymbol{\mu}$ 에서 최대(maxima)이며 양극분포(bipolar distribution) 형태를 이룬다.  $\kappa$ 가 커짐에 따라 점차  $\pm\boldsymbol{\mu}$ 에 모여 분포를 한다. 그러므로 모수  $\boldsymbol{\mu}$ 는 평균방향(mean direction), 모수  $\kappa$ 는 집중(concentration)을 나타낸다.  $\kappa < 0$ 일 경우  $\boldsymbol{\mu}$ 와 수직하는 대원(great circle)을 따라 띠분포(girdle distribution)를 한다.  $p$ 는 차원으로 2차원평면과 3차원공간의 단위벡터가 실제 분석에서 대부분을 차지한다.

$n$ 개의 단위벡터  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n (\pm\mathbf{x}_1, \dots, \pm\mathbf{x}_n)$ 이 양극왓슨분포  $W(\boldsymbol{\mu}, \kappa)$ 로부터 추출된 확률표본이라 가정한다면 모수  $\boldsymbol{\mu}$ 의 최대우도추정량(maximum likelihood estimator)  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ 는 관성모멘트행렬  $T = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$ 의 가장 큰 고유값(eigenvalue)  $\tau$ 에 해당하는 고유벡터(eigenvector)이다 (Fisher 등, 1993; Mardia와 Jupp, 2000). 그리고  $\kappa$ 의 최대우도추정량  $\hat{\kappa}$ 는 다음과 같다.

$$D(-\hat{\kappa}) = \tau, \tag{2.3}$$

여기서

$$D(z) = \int_0^1 x^2 \exp(zx^2) dx / \int_0^1 \exp(zx^2) dx \tag{2.4}$$

이며 식 (2.3)의 근사해(approximate solution)는 다음과 같이 구하기도 한다 (Fisher 등, 1993).

$$\hat{\kappa} = \begin{cases} 3.75(3\tau - 1); & \frac{1}{3} \leq \tau \leq 0.34, \\ -5.95 + 14.9\tau + 1.48(1 - \tau)^{-1} - 11.05\tau^{-2}; & 0.34 < \tau \leq 0.64, \\ -7.96 + 21.5\tau + (1 - \tau)^{-1} - 13.25\tau^2; & \tau > 0.64. \end{cases} \tag{2.5}$$

Figure 2.1은 길이가 1인 회전축을 구면좌표계로 표현한 것으로, 이축은 직교좌표계 성분  $(x, y, z)$ 나 여위도, 경도성분  $(\theta, \phi)$ 으로 표현된다. 또는 equal-area projection (Fisher 등, 1993; Mardia와 Jupp, 2000)으로 나타낼 수 있다. Figure 2.2는 왓슨분포에 의해서 생성된 자료의 equal-area projection이다.  $\boldsymbol{\mu} = (0, 1, 0)^T$  또는  $(\theta = 0^\circ, \phi = 0^\circ)^T$ 인 모평균방향을 중심으로 집중모수가 각각  $\kappa = 10(\circ)$ ,  $\kappa = 50(*)$  두 집단의 축자료가 100개씩 생성된 것이며  $y$ 축에서 바라보았다. 집중모수에 의해서 퍼짐의 정도가 다른 것을 볼 수 있으며 모두 회전대칭을 이루고 있다. 만일  $\kappa < 0$ 이라면 축은 모평균방향축으

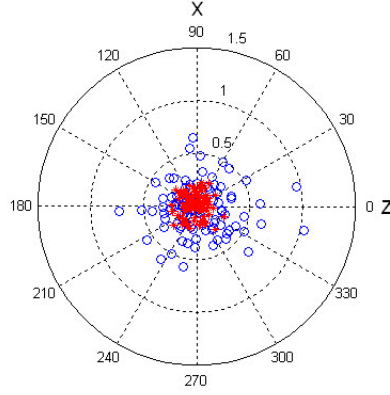


Figure 2.2. Equal-area projections for data from Watson ( $\circ : \mu = (0, 1, 0)^T, \kappa = 10$ ;  $* : \mu = (0, 1, 0)^T, \kappa = 50$ )

로 몰리지 않고 바깥쪽으로 퍼져 띠모양의 띠분포를 이루며 equal-area projection은 바깥쪽 원둘레로 퍼진 모양을 이룰 것이다.

## 2.2. 양극분포축자료의 일원배치분산분석

$\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{in_i}$ 를  $i$ 번째 ( $i = 1, \dots, t$ ) 처리에 의한  $n_i$ 개의 ( $j = 1, \dots, n_i$ ) 표본벡터로  $W(\boldsymbol{\mu}_i, \kappa_i)$ 분포를 하는 모집단으로부터 추출되었다고 가정하자.  $\kappa_1 = \dots = \kappa_t = \kappa$  ( $\kappa > 0$ 이며 미지수)라 가정하며,  $N = \sum_{i=1}^t n_i$ 를 총표본수라 했을 때 다음과 같은 항등식을 만들 수 있다 (Figueiredo, 2006).

$$\left(\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 = \left\{ \left(\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 - \left(\boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 \right\} + \left(\boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2, \quad (2.6)$$

여기서  $T$ 는 transpose이며 또한 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$2\kappa \left\{ 1 - \left(\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 \right\} = 2\kappa \left\{ 1 - \left(\boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 \right\} + 2\kappa \left\{ \left(\boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 - \left(\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 \right\}. \quad (2.7)$$

이 식의 모수  $\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\mu}$ 의 추정량은 각각  $i$ 번째 처리 표본관성모멘트행렬  $T_i = n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}_{ij}^T$ 와 총표본관성모멘트행렬  $T = N^{-1} \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}_{ij}^T$ 의 가장 큰 고유값  $\tau_i, \tau$ 에 해당하는 고유벡터  $\hat{\mathbf{u}}_i, \hat{\mathbf{u}}$ 이다. 모수추정량을 대입하고 모든 관측벡터를 합하면

$$2\kappa \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ 1 - \left(\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 \right\} = 2\kappa \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ 1 - \left(\hat{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 \right\} + 2\kappa \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ \left(\hat{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 - \left(\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{x}_{ij}\right)^2 \right\} \quad (2.8)$$

으로 다음과 같은 분산분석분해(analysis of variance decomposition)식을 얻을 수 있다 (Mardia와 Jupp, 2000).

$$2N\kappa(1 - \tau) = 2\kappa \sum_{i=1}^t n_i(1 - \tau_i) + 2\kappa \left( \sum_{i=1}^t n_i \tau_i - N\tau \right), \quad (2.9)$$

여기서  $2\kappa(\sum_{i=1}^t n_i \tau_i - N\tau) \geq 0$ 이다.  $\tau_i$ 의 합이  $\tau$ 보다 크기 때문이다. 만일  $\theta_{ij}$ 가  $\hat{\mathbf{u}}_i$ 와  $\mathbf{x}_{ij}$ 의 사이각이라면  $2\kappa \sum_{i=1}^t n_i(1 - \tau_i)$ 는  $2\kappa \sum_{i=1}^t n_i(1 - \cos^2 \theta_{ij})$ 로 표현될 수 있으며  $2\kappa \sum_{i=1}^t n_i(1 - \tau_i) \geq 0$ 가

된다. 따라서 우변의 두 항은 독립이다 (Hogg 등, 2005). 위의 식 (2.9)는 총변이(total variability)가 집단내변이(within groups variability)와 집단간변이(between groups variability)의 합으로 표현된 것이다.

### 2.3. 변이의 분포

$\mathbf{x} \sim W(\mu, \kappa)$ 일 때  $t = \mathbf{x}^T \mu$ 라 하면 아래의 확률변수는 자유도  $p - 1$ 인  $\chi^2$ 분포를 따른다 (Mardia와 Jupp, 2000).

$$2\kappa(1 - t^2) \sim \chi_{p-1}^2. \quad (2.10)$$

이를 이용하면 식 (2.9) 각 항의 분포를 알 수 있다. 임의의  $i$ 번째 집단내 변이는 관성모멘트행렬과 고유값-고유벡터의 관계( $\mathbf{T}_i \hat{\mathbf{u}} = \tau_i \hat{\mathbf{u}}$ )를 이용하면

$$2\kappa n_i (1 - \tau_i) = 2\kappa n_i \left(1 - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{T}_i \hat{\mathbf{u}}\right) \sim \chi_{(n_i-1)(p-1)}^2 \quad (2.11)$$

으로  $t$ 개의 처리에 대하여

$$2\kappa \sum_{i=1}^t n_i (1 - \tau_i) \sim \chi_{(N-t)(p-1)}^2 \quad (2.12)$$

이다. 이와 유사하게

$$2\kappa \left( \sum_{i=1}^t n_i \tau_i - N\tau \right) \sim \chi_{(t-1)(p-1)}^2 \quad (2.13)$$

이며, 귀무가설  $H_0 : \pm \mu_1 = \dots = \pm \mu_t$  하에서 다음의 비율은  $F$ 분포를 한다.

$$F = \frac{\left( \sum_{i=1}^t n_i \tau_i - N\tau \right) / (t-1)(p-1)}{\sum_{i=1}^t n_i (1 - \tau_i) / (N-t)(p-1)} \sim F_{(t-1)(p-1), (N-t)(p-1)}. \quad (2.14)$$

검정통계량  $F$ 값이 크다면  $H_0$ 를 기각한다. 위의 분산분석분해식과 검정통계량 식을 보면 원래의 측자료 벡터형태(식 (2.8)) 또는 고유값에 의해서 표현(식 (2.9))되었음을 알 수 있다.

## 3. 피험자내 설계

본 연구에서 수립하고자 하는 양극분포형태 측자료의 두 가지 모형은 다음과 같다.

### 3.1. 하나의 반복요인

$t$ 개의 수준(level) 또는 처리를 가지는 반복요인이 하나이며 피험자가 모든  $t$ 개의 처리를 받는다. Table 3.1의 측정벡터  $\mathbf{x}_{ijk}$ 는  $i$ 번째( $i = 1, \dots, s$ ) 피험자가  $j$ 번째( $j = 1, \dots, t$ ) 처리를 받아  $k$ 번째( $k = 1, \dots, n_{ij}$ )로 측정된 것이다. Table 3.2는 Table 3.1의 각 셀(cell)에 해당되는 표본수와 표본관성모멘트행렬의 가장 큰 고유값을 구하여 나타낸 것이다.

$\tau_i$ 는  $i$ 번째 피험자의 모든 표본관성모멘트행렬의 합에 표본수를 나눈(표준화된) 행렬의 가장 큰 고유값(식 (3.5)),  $\tau_j$ 는  $j$ 번째 처리의 모든 표준화된 표본관성모멘트행렬의 가장 큰 고유값(식 (3.6))으로

**Table 3.1.** Within-subjects data with one repeated measures factor 1

		Treatments			
		1	2	...	$t$
Subjects	1	$\mathbf{x}_{111}$	$\mathbf{x}_{121}$	...	$\mathbf{x}_{1t1}$
		$\mathbf{x}_{112}$	$\mathbf{x}_{122}$	...	$\mathbf{x}_{1t2}$
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
		$\mathbf{x}_{11n_{11}}$	$\mathbf{x}_{12n_{12}}$	...	$\mathbf{x}_{1tn_{1t}}$
		$\vdots$	$\vdots$	$\mathbf{x}_{ijk}$	$\vdots$
	$s$	$\mathbf{x}_{s11}$	$\mathbf{x}_{s21}$	...	$\mathbf{x}_{st1}$
		$\mathbf{x}_{s12}$	$\mathbf{x}_{s22}$	...	$\mathbf{x}_{st2}$
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
		$\mathbf{x}_{s1n_{s1}}$	$\mathbf{x}_{s2n_{s2}}$	...	$\mathbf{x}_{stn_{st}}$

**Table 3.2.** Within-subjects data with one repeated measures factor 2

		Treatments				Marginal
		1	2	...	$t$	
Subjects	1	$n_{11}$	$n_{12}$	...	$n_{1t}$	$n_{1\cdot}$
		$\tau_{11}$	$\tau_{12}$	...	$\tau_{1t}$	$\tau_{1\cdot}$
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	$s$	$n_{s1}$	$n_{s2}$	...	$n_{st}$	$n_{s\cdot}$
		$\tau_{s1}$	$\tau_{s2}$	...	$\tau_{st}$	$\tau_{s\cdot}$
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	Marginal	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	...	$n_{\cdot t}$	$N$
		$\tau_{\cdot 1}$	$\tau_{\cdot 2}$	...	$\tau_{\cdot t}$	$\tau$

주변고유값(marginal eigenvalue)이다. 그리고  $\tau$ 는 모든 관측벡터의 표준화된 표본관성모멘트행렬의 가장 큰 고유값(식 (3.7))이다. 표본수  $n_i$ ,  $n_j$ ,  $N$ 은 식 (3.1)–(3.3)과 같다.

$$n_i = \sum_{j=1}^t n_{ij}, \quad (3.1)$$

$$n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^s n_{ij}, \quad (3.2)$$

$$N = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t n_{ij}, \quad (3.3)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \mathbf{x}_{ijk} \mathbf{x}_{ijk}^T \quad (\tau_{ij}), \quad (3.4)$$

$$T_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^{n_{ij}} \mathbf{x}_{ijk} \mathbf{x}_{ijk}^T \quad (\tau_{i\cdot}), \quad (3.5)$$

$$T_{\cdot j} = \frac{1}{n_{\cdot j}} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{n_{ij}} \mathbf{x}_{ijk} \mathbf{x}_{ijk}^T \quad (\tau_{\cdot j}), \quad (3.6)$$

$$T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^{n_{ij}} \mathbf{x}_{ijk} \mathbf{x}_{ijk}^T \quad (\tau). \quad (3.7)$$

**Table 3.3.** ANOVA table for one repeated measures factor

Variance components	Value	Degrees of freedom
Treatments	$2\kappa \left( \sum_{j=1}^t n_{.j\tau.j} - N\tau \right)$	$(t-1)(p-1)$
Subjects	$2\kappa \left( \sum_{i=1}^s n_{i.\tau i.} - N\tau \right)$	$(s-1)(p-1)$
Error	$2\kappa \left( N - \sum_{i=1}^s n_{i.\tau i.} - \sum_{j=1}^t n_{.j\tau.j} + N\tau \right)$	$(N-s-t+1)(p-1)$
Total	$2N\kappa(1-\tau)$	$(N-1)(p-1)$

$\kappa > 0$  일 때 다음과 같이 분해될 수 있으며

$$2N\kappa(1-\tau) = 2\kappa \left( \sum_{i=1}^s n_{i.\tau i.} - N\tau \right) + 2\kappa \left( \sum_{j=1}^t n_{.j\tau.j} - N\tau \right) + 2\kappa \left( N - \sum_{i=1}^s n_{i.\tau i.} - \sum_{j=1}^t n_{.j\tau.j} + N\tau \right). \quad (3.8)$$

우변 첫째항은 피험자간 변이, 두 번째 항과 세 번째 항은 각각 피험자내 변이 중 처리간 변이와 오차변이를 나타낸다. 해당분포는

$$\chi_{(N-1)(p-1)}^2 = \chi_{(s-1)(p-1)}^2 + \chi_{(t-1)(p-1)}^2 + \chi_{(N-s-t+1)(p-1)}^2 \quad (3.9)$$

이며, 귀무가설  $H_0 : \pm\mu_1 = \dots = \pm\mu_t$  하에서 검정통계량은 다음과 같다.

$$F = \frac{\left( \sum_{j=1}^t n_{.j\tau.j} - N\tau \right) / (t-1)(p-1)}{\left( N - \sum_{i=1}^s n_{i.\tau i.} - \sum_{j=1}^t n_{.j\tau.j} + N\tau \right) / (N-s-t+1)(p-1)} \sim F_{(t-1)(p-1), (N-s-t+1)(p-1)}. \quad (3.10)$$

Table 3.3은 식 (3.8)의 각 항과 자유도를 나타낸 분산분석표이다.

### 3.2. 두 개의 반복요인

A요인에  $a$ 개의 수준이 있고 B요인에  $b$ 개의 수준이 있으며 서로 교차(crossed)되었다. 각 요인수준의 조합은  $a \times b$ 개가 있다.  $s$ 의 피험자는  $a \times b$ 의 처리를 모두 받는다.

Table 3.4의  $x_{ijkl}$ 은  $i$ 번째( $i = 1, \dots, s$ ) 피험자, 반복요인 A의  $j$ 번째( $j = 1, \dots, a$ ) 수준, 반복요인 B의  $k$ 번째( $k = 1, \dots, b$ ) 수준에 해당되는  $l$ 번째( $l = 1, \dots, n_{ijk}$ ) 관측벡터이다. Table 3.5는 Table 3.4의 각 셀의 관측벡터들의 표본수와 관성모멘트행렬의 가장 큰 고유값, 그리고 주변표본수와 주변고유값을 나타낸 것으로 아래의 식 (3.11)–(3.25)와 같이 정의 된다(괄호 안은 가장 큰 고유값).

$$n_{ij.} = \sum_{k=1}^b n_{ijk}, \quad (3.11)$$

$$n_{i.k} = \sum_{j=1}^a n_{ijk}, \quad (3.12)$$

$$n_{.jk} = \sum_{i=1}^s n_{ijk}, \quad (3.13)$$

**Table 3.4.** Within-subjects data with two repeated measures factors 1

Factor <i>A</i>		Factor <i>B</i>			
		<i>B</i> <sub>1</sub>	...	<i>B</i> <sub><i>b</i></sub>	
Subjects	1	<i>A</i> <sub>1</sub>	$\mathbf{x}_{1111}$	...	$\mathbf{x}_{11b1}$
		⋮	⋮	⋮	⋮
		⋮	$\mathbf{x}_{111n_{111}}$	...	$\mathbf{x}_{11bn_{11b}}$
		⋮	⋮	⋮	⋮
	<i>A</i> <sub><i>a</i></sub>	$\mathbf{x}_{1a11}$	...	$\mathbf{x}_{1abl}$	
	⋮	⋮	⋮	⋮	
	⋮	$\mathbf{x}_{1a1n_{1a1}}$	...	$\mathbf{x}_{1abn_{1ab}}$	
	⋮	⋮	$\mathbf{x}_{ijkl}$	⋮	
	<i>s</i>	<i>A</i> <sub>1</sub>	$\mathbf{x}_{s111}$	...	$\mathbf{x}_{s1b1}$
		⋮	⋮	⋮	⋮
⋮		$\mathbf{x}_{s11n_{s11}}$	...	$\mathbf{x}_{s1bn_{s1b}}$	
⋮		⋮	⋮	⋮	
<i>A</i> <sub><i>a</i></sub>	$\mathbf{x}_{sa11}$	...	$\mathbf{x}_{sab1}$		
⋮	⋮	⋮	⋮		
⋮	$\mathbf{x}_{sa1n_{sa1}}$	...	$\mathbf{x}_{sabn_{sab}}$		

$$n_{i..} = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b n_{ijk}, \quad (3.14)$$

$$n_{.j.} = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^b n_{ijk}, \quad (3.15)$$

$$n_{..k} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^a n_{ijk}, \quad (3.16)$$

$$N = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b n_{ijk}, \quad (3.17)$$

$$T_{ijk} = \frac{1}{n_{ijk}} \sum_{l=1}^{n_{ijk}} \mathbf{x}_{ijkl} \mathbf{x}_{ijkl}^T \quad (\tau_{ijk}), \quad (3.18)$$

$$T_{ij.} = \frac{1}{n_{ij.}} \sum_{k=1}^b \sum_{l=1}^{n_{ijk}} \mathbf{x}_{ijkl} \mathbf{x}_{ijkl}^T \quad (\tau_{ij.}), \quad (3.19)$$

$$T_{i.k} = \frac{1}{n_{i.k}} \sum_{j=1}^a \sum_{l=1}^{n_{ijk}} \mathbf{x}_{ijkl} \mathbf{x}_{ijkl}^T \quad (\tau_{i.k}), \quad (3.20)$$

$$T_{.jk} = \frac{1}{n_{.jk}} \sum_{i=1}^s \sum_{l=1}^{n_{ijk}} \mathbf{x}_{ijkl} \mathbf{x}_{ijkl}^T \quad (\tau_{.jk}), \quad (3.21)$$

$$T_{i..} = \frac{1}{n_{i..}} \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{l=1}^{n_{ijk}} \mathbf{x}_{ijkl} \mathbf{x}_{ijkl}^T \quad (\tau_{i..}), \quad (3.22)$$



**Table 3.5.** Within-subjects data with two repeated measures factors 2

Factor A	Factor B			Marginal		
	$B_1$	$\dots$	$B_b$			
1	$A_1$	$n_{111}$ $\tau_{111}$	$\dots$	$n_{11b}$ $\tau_{11b}$	$\begin{pmatrix} n_{11\cdot} \\ \tau_{11\cdot} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n_{1\cdot} \\ \tau_{1\cdot} \end{pmatrix}$
	$A_a$	$n_{1a1}$ $\tau_{1a1}$	$\dots$	$n_{1ab}$ $\tau_{1ab}$	$\begin{pmatrix} n_{1a\cdot} \\ \tau_{1a\cdot} \end{pmatrix}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
Subjects	$A_1$	$n_{s11}$ $\tau_{s11}$	$\dots$	$n_{s1b}$ $\tau_{s1b}$	$\begin{pmatrix} n_{s1\cdot} \\ \tau_{s1\cdot} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n_{s\cdot} \\ \tau_{s\cdot} \end{pmatrix}$
	$A_a$	$n_{sa1}$ $\tau_{sa1}$	$\dots$	$n_{sab}$ $\tau_{sab}$	$\begin{pmatrix} n_{sa\cdot} \\ \tau_{sa\cdot} \end{pmatrix}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
Marginal		$\begin{pmatrix} n_{\cdot 1} \\ \tau_{\cdot 1} \end{pmatrix}$	$\dots$	$\begin{pmatrix} n_{\cdot a} \\ \tau_{\cdot a} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n_{\cdot ab} \\ \tau_{\cdot ab} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} N \\ \tau \end{pmatrix}$

$$T_{\cdot j} = \frac{1}{n_{\cdot j}} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^b \sum_{l=1}^{n_{ijk}} \mathbf{x}_{ijkl} \mathbf{x}_{ijkl}^T \quad (\tau_{\cdot j}), \tag{3.23}$$

$$T_{\cdot k} = \frac{1}{n_{\cdot k}} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^a \sum_{l=1}^{n_{ijk}} \mathbf{x}_{ijkl} \mathbf{x}_{ijkl}^T \quad (\tau_{\cdot k}), \tag{3.24}$$

$$T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{l=1}^{n_{ijk}} \mathbf{x}_{ijkl} \mathbf{x}_{ijkl}^T \quad (\tau). \tag{3.25}$$

$\kappa > 0$  일 때 Table 3.6과 같이 분해될 수 있다. 여기서는 세 가지 가설검정을 할 수 있으며, 요인 A와 B 간의 교호작용효과(interaction effect), 요인 A와 요인 B의 주효과(main effect)로 다음과 같다 (Table 3.6).

$$F_{A \times B} = \frac{A \times B / (a - 1)(b - 1)(p - 1)}{\text{Error} / (N - ab - sa - sb + s + a + b - 1)(p - 1)} \sim F_{(a-1)(b-1)(p-1), (N-ab-sa-sb+s+a+b-1)(p-1)}, \tag{3.26}$$

$$F_A = \frac{A / (a - 1)(p - 1)}{A \times S / (s - 1)(a - 1)(p - 1)} \sim F_{(a-1)(p-1), (s-1)(a-1)(p-1)}, \tag{3.27}$$

$$F_B = \frac{B / (b - 1)(p - 1)}{B \times S / (s - 1)(b - 1)(p - 1)} \sim F_{(b-1)(p-1), (s-1)(b-1)(p-1)}. \tag{3.28}$$

#### 4. 실증적 분석

피험자내 설계 두 가지 모형(Table 3.3, 3.6)의 실제 분석은 Kim (2010a, 2010b)의 자료를 이용하였다. 첫 번째는 인체 슬관절 굴곡/신전운동을 운동형태(수동, 능동)에 따라 수행하였을 때 (Kim, 2010a)

**Table 3.6.** ANOVA table for two repeated measures factors

Variance components	Value	Degrees of freedom
Factor $A(A)$	$2\kappa \left( \sum_{j=1}^a n_{\cdot j \cdot \tau \cdot j \cdot} - N\tau \right)$	$(a-1)(p-1)$
Factor $B(B)$	$2\kappa \left( \sum_{k=1}^b n_{\cdot \cdot k \tau \cdot k} - N\tau \right)$	$(b-1)(p-1)$
$A \times B$	$2\kappa \left( \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b n_{\cdot j k \tau \cdot j k} - \sum_{j=1}^a n_{\cdot j \cdot \tau \cdot j \cdot} - \sum_{k=1}^b n_{\cdot \cdot k \tau \cdot k} + N\tau \right)$	$(a-1)(b-1)(p-1)$
Subjects( $S$ )	$2\kappa \left( \sum_{i=1}^s n_{i \cdot \cdot \tau_{i \cdot \cdot}} - N\tau \right)$	$(s-1)(p-1)$
$A \times S$	$2\kappa \left( \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^a n_{ij \cdot \tau_{ij \cdot}} - \sum_{i=1}^s n_{i \cdot \cdot \tau_{i \cdot \cdot}} - \sum_{j=1}^a n_{\cdot j \cdot \tau \cdot j \cdot} + N\tau \right)$	$(s-1)(a-1)(p-1)$
$B \times S$	$2\kappa \left( \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^b n_{i \cdot k \tau_{i \cdot k}} - \sum_{i=1}^s n_{i \cdot \cdot \tau_{i \cdot \cdot}} - \sum_{k=1}^b n_{\cdot \cdot k \tau \cdot k} + N\tau \right)$	$(s-1)(b-1)(p-1)$
Error	$2\kappa \left( N - \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b n_{\cdot j k \tau \cdot j k} - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^a n_{ij \cdot \tau_{ij \cdot}} - \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^b n_{i \cdot k \tau_{i \cdot k}} + \sum_{i=1}^s n_{i \cdot \cdot \tau_{i \cdot \cdot}} + \sum_{j=1}^a n_{\cdot j \cdot \tau \cdot j \cdot} + \sum_{k=1}^b n_{\cdot \cdot k \tau \cdot k} - N\tau \right)$	$(N - ab - sa - sb + s + a + b - 1)(p-1)$
Total	$2N\kappa(1 - \tau)$	$(N-1)(p-1)$

대퇴좌표계(femoral coordinate system)에서 관측된 순간회전축들의 평균방향 차이검정에 관한 것이다. 두 번째는 두 가지 종류의 운동에 의한 자료이다 (Kim, 2010b). 인체 주관절 굴곡/신전운동을 운동형태요인(수동, 능동)과 전완장축각도요인(회내, 중립, 회외)에 따라 수행하였을 때 상완좌표계 옵션2(humerus coordinate system option 2)에서 관측된 굴곡/신전 순간회전축 평균방향의 차이검정이다. 또 하나는 회내/회외운동을 운동형태요인(수동, 능동)과 전·상완각도요인(굴곡, 중립, 신전)에 따라 수행하였을 때 전완좌표계( forearm coordinate system)에서 관측된 회내/회외 순간회전축 평균방향의 차이검정에 관한 것이다. 수동운동은 연구자가 피험자의 관절운동을 수행하는 것이며, 능동운동은 피험자가 자발적으로 관절운동을 수행하는 것이다. 전완장축각도요인의 수준인 회내는 손등이 위로, 중립은 손이 수직, 회외는 손바닥이 위로 향한 상태로 정의하였다. 전·상완각도요인의 수준인 굴곡은 약  $45^\circ$ , 중립은 약  $90^\circ$ , 신전은 약  $135^\circ$ 로 정의하였다 (Kim, 2010b). 회전축은 Söderkvist와 Wedin (1993)과 Greenwood (2003)의 방법을 이용하여 구하였다. 모든 통계적 분석은 MATLAB ver 6.1(The MathWorks)을 이용하였으며, 가설검정의 유의수준은 .05로 하였다.

첫 번째 자료의 분석결과는 Table 4.1에 나타나 있으며 이는 식 (3.8)–(3.10)에 따른 결과이다. 수동운동과 능동운동의 순간회전축의 모평균방향은 검정통계량  $F = .212$ , 유의확률  $p = .9321$ 로 차이가 없는 것으로 나타났다.

두 번째 자료의 분석결과는 Table 4.2과 Table 4.3와 같다(Table 3.6, 식 (3.26)–(3.28)). 첫 번째 결과인 Table 4.2을 보면, 운동형태( $A$ )와 전완장축각도( $B$ )간의 교호작용효과는 없는 것으로 나타났다( $F_{A \times B} = .31, p = .874$ ). 수동운동과 능동운동간의 모평균방향은 차이가 없으며( $F_A = .24, p = .791$ ), 회내, 중립, 회외간의 모평균방향은 차이가 있는 것으로 나타났다( $F_B = 65.13, p = .000$ ).

**Table 4.1.** ANOVA for knee flexion/extension axes of rotation between types of motion

Variance components	Value	Degrees of freedom	<i>F</i>	<i>p</i>
Types	1.16	2	.424	.7912
Subjects	34.49	4		
Error	2195.29	1880		
Total	2230.93	1886		

**Table 4.2.** ANOVA for elbow flexion/extension axes of rotation

Variance components	Value	Degrees of freedom	<i>F</i>	<i>p</i>
Types( <i>A</i> )	.17	2	.24	.791
Forearm long axis angle( <i>B</i> )	116.56	4	65.13	.000
<i>A</i> × <i>B</i>	1.22	4	.31	.874
Subjects( <i>S</i> )	41.34	8		
<i>A</i> × <i>S</i>	2.86	8		
<i>B</i> × <i>S</i>	7.16	16		
Error	6256.31	6286		
Total	6425.23	6328		

**Table 4.3.** ANOVA for elbow pronation/supination axes of rotation

Variance components	Value	Degrees of freedom	<i>F</i>	<i>p</i>
Types( <i>A</i> )	12.10	2	7.39	.015
Forearm long axis angle( <i>B</i> )	21.13	4	4.13	.017
<i>A</i> × <i>B</i>	6.74	4	1.47	.209
Subjects( <i>S</i> )	53.50	8		
<i>A</i> × <i>S</i>	6.55	8		
<i>B</i> × <i>S</i>	20.49	16		
Error	5879.42	5128		
Total	5999.93	5170		

두 번째 결과인 Table 4.3를 보면 운동형태(*A*)와 전·상완각도(*B*)간의 교호작용효과가 없는 것으로( $F_{A \times B} = 1.47, p = .209$ ) 나타났다. 운동형태와 전·상완각도간의 회내/회외 회전축 간에는 각각 차이가 있는 것으로 나타났다( $F_A = 7.39, p = .015; F_B = 4.13, p = .017$ ).

인체 운동에서 회전축은 방향과 임의의 지점의 위치로서 완전히 정의될 수 있다. 임의의 지점에 대한 위치는 일반통계학이 적용될 수 있으나 축의 방향을 표현한 단위벡터  $\mathbf{x}(-\mathbf{x})$ 는 방향통계학을 적용시키는 것이 좋다. 적절한 분포로는 왓슨분포로 Figure 2.2와 같은 양극분포는 인체관절의 회전축을 분석하는데 적절하며, 집중모수  $\kappa < 0$ 인 띠분포는 골프의 스윙면(swing plane)을 분석하는데 유용하리라 생각된다.

본 연구는 양극 왓슨분포 측자료의 차이검정에 대한 것이다. 실험에서 피험자가 모든 처리를 받기 때문에 피험자내 설계에 해당되며, 반복측정설계(repeated measures or repeated measurements design) (Keppel과 Wikens, 2004) 또는 임의화 블록설계(randomized block design)라 한다 (Kuehl, 2000). 이 설계는 총변이 중 피험자간(between-subjects) 변이가 임의효과(random effect)이기 때문에 혼합설계(mixed design)로 볼 수 있다 (Weerahandi, 2004). 이러한 설계에 의한 자료를 본 연구에서는 분산분석 방법을 이용하였다. 세부적인 분류에도 불구하고 모두 동일한 모형을 사용하며 해석에서만 약간의 차이를 보이고 있다. 측자료의 경우에도 왓슨분포를 가정한다면(식 (2.10)) 일반분산분석의 해석과 크게 다르지 않을 것이다. Kim (2001a, 2001b)의 연구를 보면 각 처리에 있어 회전축들의 퍼짐의 정

도는 비슷하며(homoscedasticity), 고유값들에 의한 형태모수(shape parameter)와 강도모수(strength parameter) (Fisher 등, 1993)를 살펴보았을 때 양극 왓슨분포를 이루고 있어 분포에 대한 가정도 어느 정도 만족하기 때문에 분석의 결과는 타당성이 있다고 하겠다.

주관절 운동의 연구 (Kim, 2010b)를 보면 피험자내 설계에 의한 측자료 차이검정을 수행하였다. 이를 위해 전역좌표계로 변환된 회전축 관성모멘트행렬의 표준화시킨 고유값을 표본이라 가정하고 일반적인 반복측정분산분석(repeated measures ANOVA)을 하였다. 첫 번째 굴곡/신전 회전축의 경우  $F_{A \times B} = .932(.433)$ ,  $F_A = .234(.654)$ ,  $F_B = 11.001(.005)$ 로 본 연구결과와 유사하다 (Table 4.2). 그러나 두 번째의 회내/회외 회전축의 경우는  $F_{A \times B} = .931(.433)$ ,  $F_A = 6.287(.066)$ ,  $F_B = .525(.611)$ 로 본 연구결과와 아주 다르다 (Table 4.3).

차이는 다음과 같이 설명 가능하다. 본 연구의 식 (2.9), (3.8), Table 3.6은 표준화된 고유값을 사용하고 있다. 그러나 식을 잘 살펴보면 비표준화 고유값을 사용한다고 하여도 분석을 위해서는 표본수  $n$ 이 필요한 것을 알 수 있다. 그리고 임의의 행렬  $C$ 와  $D$ 의 고유값이 각각  $\lambda, \beta$ 라 할 때,  $CD$ 와  $C + D$ 의 고유값은 같은 고유벡터를 공유하지 않는 이상 일반적으로  $\lambda\beta$ 와  $\lambda + \beta$ 가 아니다 (Strang, 2003). 예를 들어 Table 3.2와 식 (3.4), (3.5)  $T_i$ 의 고유값  $\tau_i$ 는  $\tau_i \neq t^{-1} \sum_{j=1}^t \tau_{ij}$ 이 성립되지 않으므로 고유값만 가지고 일반분산분석을 수행한 것은 잘못된 방법이다. 측자료에 의해서 계산된 관성모멘트행렬과 표본수가 꼭 필요하며, 이를 통해 주변관성모멘트행렬과 주변고유값을 구할 수 있기 때문이다. 관성모멘트행렬은 회전축들의 분포형태정보를 가지고 있는 일종의 분산-공분산행렬과 같다고 할 수 있으며, 일반 다변량 통계분석에서와 마찬가지로 기본이 되는 아주 중요한 통계량이다.

Kim (2010a)의 슬관절 연구에 의하면 굴곡/신전 운동의 해석은 대퇴좌표계를 이용하는 것이 타당하다. 그리고 Kim (2010b)의 주관절 연구에 의하면 굴곡/신전운동은 상완좌표계 옵션2, 회내/회외운동은 전완좌표계를 이용하는 것이 타당하다. 그러므로 본 연구에서는 이들 좌표계 성분으로 나타난 회전축을 이용하였다. 특히 주관절의 경우, 본 연구의 분석결과를 통해 굴곡/신전운동과 회내/회외운동은 서로 영향을 미친다고 결론지을 수 있다. 특히, 회내/회외 각도가 굴곡/신전운동에 주는 영향이 ( $F = 65.13, p = .000$ ) 굴곡/신전 각도가 회내/회외운동에 주는 영향( $F = 4.13, p = .017$ )보다 훨씬 크다. 다시 말하면, 회내, 중립, 회외에 따라 굴곡/신전회전축이 더 많이 차이가 난다. 결국 두 운동은 독립적으로 발생하지 않으며 두 운동의 회전축은 통계적으로 서로 직교하지 않는다고 할 수 있다.

$\kappa$ 는 변이의 비율  $F$ 의 계산에서 제거되지만(식 (2.14), (3.10), (3.26), (3.27), (3.28)) 분산분석 분해의 각 항에 포함되어 있으며 표본의 분포를 알 수 있는 추정량이다. 각 처리별로 동일한  $\kappa$ 를 가정했기 때문에 본 연구에서는 전체 관측벡터의 표준화된 관성모멘트행렬의 가장 큰 고유값을 사용할 수 있었으며, 식 (2.5)에 의해서 추정하였다.

## 5. 결론

본 연구에서는 측자료의 피험자내 설계모형에 의한 분산분석을 수행하였으며, 실증적으로 운동역학에서 사용되는 인체 슬관절과 주관절의 회전축을 적용하여 분석하였다. 선행연구에서 잘못 분석한 것을 수정하여 적합한 통계적 분석을 하였으며 특히, 주관절의 경우 굴곡/신전과 회내/회외는 서로 영향을 미치며 운동하는 구조라는 것을 알 수 있었다. 회전축과 같은 측자료의 비교분석을 위해서는 축의 개수인 표본수, 그리고 축의 분포형태라 할 수 있는 관성모멘트행렬이 필요하다.

본 연구모형을 통한 분석 결과는 실험에서 처리의 순서를 랜덤하게 결정하였기 때문에 일반적인 분산분석의 가정(assumption)과 더불어(정규분포가정 제외) 복합대칭성(compound symmetry)의 가정을 만족하는 것으로 보았다. 그러나 처리의 순서가 랜덤하지 않고 시간에 따라 순차적으로 진행된다면 위의

가정이 위배되는 경우가 많으며 이를 고려하여 검증하여야 한다. 그러나 방향자료의 경우 퍼짐의 정도를 나타내는 분산(variance)의 정의가 학자들마다 일치하지 않기 때문에 (Mardia와 Jupp, 2000) 자료의 특수구조를 고려한 구체적인 방법은 연구가 필요하다.

## References

- Blankevoort, L., Huiskes, R. and de Lange, A. (1990). Helical axes of passive knee joint motions, *Journal of Biomechanics*, **23**, 1219–1229.
- Cerveri, P., Lopomo, N., Pedotti, A. and Ferrigno, G. (2005). Derivation of centers and axes of notation for wrist and fingers in a hand kinematic model: Methods and reliability results, *Annals of Biomedical Engineering*, **33**, 402–412.
- Chang, L. Y. and Pollard, N. S. (2007). Robust estimation of dominant axis of rotation, *Journal of Biomechanics*, **40**, 2707–2715.
- Ehrig, R. M., Taylor, W. R., Duda, G. N. and Heller, M. O. (2007). A survey of formal methods for determining functional joint axes, *Journal of Biomechanics*, **40**, 2150–2157.
- Figueiredo, A. (2006). Two-way analysis of variance for data from a concentrated bipolar Watson distribution, *Journal of Applied Statistics*, **33**, 575–581.
- Fisher, N. I., Lewis, T. and Embleton, B. J. J. (1993). *Statistical Analysis of Spherical Data*, Cambridge University Press, New York.
- Gamage, S. S. H. U. and Lasenby, J. (2002). New least squares solutions for estimating the average center of rotation and the axis of rotation, *Journal of Biomechanics*, **35**, 87–93.
- Greenwood (2003). *Advanced Dynamics*, Cambridge University Press, New York.
- Halvorsen, K., Lesser, M. and Lundberg, A. (1999). A new method for estimating the axis of rotation and the center of rotation, *Journal of Biomechanics*, **32**, 1221–1227.
- Hogg, R. V., McKean, J. W. and Craig, A. T. (2005). *Introduction to Mathematical Statistics*, (6th ed.). Upper Saddle River, Pearson Education, Inc, NJ.
- Keppel, G. and Wickens, T. D. (2004). *Design and Analysis : A Researcher's Handbook*, (4th ed.), Upper Saddle River, Pearson Education, Inc, NJ.
- Kim, J. U. (2009). The analysis of axis of rotation of knee joint using directional statistics, *The Korean Journal of Physical Education*, **48**, 615–623.
- Kim, J. U. (2010a). The statistical test on the mean axes of rotation of knee joint consistent with the coordinate axis, *The Korean Journal of Physical Education*, **49**, 419–427.
- Kim, J. U. (2010b). The validity test of upper-forearm coordinate system and the exploratory analysis of the interactive effect between flexion/extension and pronation/supination during elbow joint motion, *Korean Journal of Sport Biomechanics*, **20**, 117–127.
- Kuehl, R. (2000). *Design of experiments : Statistical principles of research design and analysis*, (2nd ed). Pacific Groove, Duxbury Press, CA.
- Leitch, J., Stebbins, J. and Zavatsky, A. B. (2010). Subject-specific axes of the ankle joint complex, *Journal of Biomechanics*, **43**, 2923–2928.
- MacWilliams, B. A. (2008). A comparison of four functional methods to determine centers and axes of rotations, *Gait & Posture*, **28**, 673–679.
- MacWilliams, B. A., Sardelli, M. C. and Tashjian, R. Z. (2010). A functional axis of based upper extremity model and associated calibration procedure, *Gait & Posture*, **31**, 289–291.
- Mardia, K. V. and Jupp, P. (2000). *Directional statistics*, (2nd ed.). West Sussex, John Wiley and Sons Ltd, England.
- Metzger, M. F., Faruk Senan, N. A., O'Reilly, O. M. and Lotz, J. C. (2010). Minimizing errors associated with calculating the location of the helical axis for spinal motions, *Journal of Biomechanics*, **43**, 2822–2829.
- Schache, A. G., Baker, R. and Lamoreux, L. W. (2006). Defining the knee joint flexion-extension axis for purposes of quantitative gait analysis: An evaluation of methods, *Gait & Posture*, **24**, 100–109.
- Schwartz, M. H. and Rozumalski, A. (2005). A new method for estimating joint parameter from motion data, *Journal of Biomechanics*, **38**, 107–116.

- Sheehan, F. T. (2007). The finite helical axis of the knee joint: A non-invasive in vivo study using fast-PC MRI, *Journal of Biomechanics*, **40**, 1038–1047.
- Söderkvist, I. and Wedin, p. (1993). Determining the movements of the skeleton using well-configured markers, *Journal of Biomechanics*, **26**, 1473–1477.
- Stephens, M. A. (1982). Use of the von Mises distribution to analyse continuous proportions, *Biometrika*, **69**, 197–203.
- Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*, (3rd ed.). Wellesley, MA : Wellesley-Cambridge Press.
- Tay, S. C., van Riet, R., Kazunari, T., Amrami, K. K., An, K. N. and Berger, R. A. (2010). In-vivo kinematic analysis of forearm rotation using helical axis analysis, *Clinical Biomechanics*, **25**, 655–659.
- Watson, G. S. and Williams, E. J. (1956). On the construction of significance tests on the circle and the sphere, *Biometrika*, **43**, 344–352.
- Weerahandi, S. (2004). *Generalized Inference in Repeated Measures: Exact Methods in MANOVA and Mixed Models*, Hoboken, John Wiley & Sons, Inc., NJ.
- Woltring, H. J. (1990). *Data Processing and Error Analysis*,. In N. Berme, & A. Cappozzo (Eds.), *Biomechanics of human movement : Applications in rehabilitation, Sport and Ergonomics* (pp. 203–237). Washington, Bertec Corporation, OH.

# 피험자내 설계에 의한 회전축자료의 비교연구

김진욱<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>군산대학교 체육학과

(2013년 7월 11일 접수, 2013년 9월 13일 수정, 2013년 10월 15일 채택)

---

## 요약

실험에서 처리 간 평균반응의 비교를 위해서 많이 사용되는 방법은 분산분석이다. 반응변수가 왓슨분포로부터 추출된 것이라 가정한 축자료의 경우에 평균방향의 비교를 위한 분석방법은 많지 않다. 본 연구의 목적은 운동역학에서 관절의 운동을 기술하기 위해서 많이 사용되는 회전축의 평균방향 비교를 위해서 분산분석을 수행하는 것이다. 이는 피험자내 설계에 의한 분산분석으로 피험자내 요인이 하나인 경우와 두 개의 경우로 나누어 분석하였다. 실제 분석에 사용된 자료는 슬관절의 굴곡/신전 회전축과 주관절의 굴곡/신전, 회내/회외 회전축이다. 본 연구를 통해 관절회전운동의 적절한 비교분석을 수행할 수 있었으며 이러한 분석방법은 다양한 실험설계에 의한 축자료에 적용시킬 수 있을 것이다.

주요용어: 회전축, 축자료, 왓슨분포, 피험자내 설계, 방향통계학.

---

<sup>1</sup>(573-701) 전북 군산시 미룡동, 군산대학교 자연과학대학 체육학과, 교수. E-mail: jinuk@kunsan.ac.kr