ISSN 1975-8359(Print) / ISSN 2287-4364(Online)
The Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers Vol. 62, No. 1, pp. 101～104, 2013
http://dx.doi.org/10.5370/KIEE.2012.62.1.101

Poisson 잡음 하에서의 지수 감소 함수 인자 추정시의 Cramer-Rao bound

On the Cramer-Rao Bound for Estimating Parameters of Exponentially Decaying Function under Poisson Noise

석 지 영* · 김 정 태†
(Ji-Yeong Seok · Jeong-Tae Kim)

Abstract - We computed Cramer-Rao bound for estimating amplitude and decay parameters of exponentially decaying function under Poisson noise. Since Cramer-Rao bound is the lowest variance bound for any unbiased estimator, the computed Cramer-Rao bound can be used for evaluating the performance of estimators under Poisson noise. In addition, we show that the performance of maximum-likelihood estimator is close to the Cramer-Rao bound by simulations.

Key Words : Cramer-Rao bound, Maximum-likelihood estimator, Poisson noise

1. 서 론

측정된 실험치로부터 지수적으로 감소하는 함수의 크기 및 시정수를 추정하는 문제는 공학 응용에서 빈번하게 발생하는 문제이다 [1]. 예를 들면, 형광현미경에서의 지수적으로 감소하는 형광 밝기 변화의 시정수는 분자들의 특성 연구에 매우 유용한 정보를 제공한다 [2]. 따라서 지수 감소 함수의 정확한 시정수 추정은 매우 중요한 문제이다. 시정수 추정기의 설계시 Cramer-Rao (C-R) bound 는 설계된 추정기의 분산 (variance) 의 한계를 결정짓는 기준으로 성능 평가시 주요한 평가 대상으로 사용될 수 있다 [3]. 선행 연구에서는 주로 가우시안 (Gaussian) 잡음 하에서의 지수 감소함수의 인자 추정에 관한 연구들이 수행되었고 가우시안 잡음 하에서의 C-R bound 에 관한 연구도 수행되었다 [1][3]. 그러나, 형광 감소와 같이 광자 (photon) 의 도달량에 의해서 실험치가 측정되는 추정 문제에 있어서는 측정치를 가우시안 확률 변수로 모델링하는 것보다는 포와송 (Poisson) 확률 변수 (random variable) 로 모델링하는 것이 보다 정확하다. 도달하는 광자의 수가 충분한 경우에는 포와송 확률 변수의 확률 밀도 함수가 가우시안 함수로 근사화가 되므로 [4] 가우시안 잡음 하에서의 분석결과를 사용하여도 무방하나, 광자의 수가 충분하지 않은 경우에는 포와송 모델을 사용한 C-R bound 를 성능 평가의 지표로 삼아야한다. 본 저자들이 선행 연구를 조사한 결과로는 포와송 잡음 하에서의 C-R bound 에 대해서는 연구가 수행된 적이 없는 상태이다. 또한, 포와송 확률 변수에 기반한 추정기를 설계하여야 함에도 불구하고, 가우시안 확률 변수에 기반한 추정기를 설계하는 경우들이 많이 있고 [5] 이 경우 가우시안 C-R bound 를 사용하면 잘못된 성능 평가를 하게 된다. 응용 분야의 연구자들에게 있어서 포와송 확률 변수 기반의 연구가 잘 알려져 있지 않아서 물리적으로 보다 직관적인 가우시안 확률 변수를 사용하는 것으로 추측된다.

본 논문에서는 포와송 확률 변수를 기반으로 하여 지수 감소함수의 크기와 시정수를 동시 추정하는 경우의 C-R bound를 이론적으로 구하여 C-R bound 를 결정하는 변수들을 파악한다. 또한, 포와송 모델하에서의 Maximum-likelihood (ML) 추정기가 이론적으로 구한 C-R bound 와 거의 유사함을 시뮬레이션을 통해서 검증하여 ML 추정기의 유용성을 확인한다.

2. Cramer-Rao bound

포와송 잡음 하에서 시간 $t=t_i,\ i=0,..,N-1$에서 얻어지는 지수 감소 함수의 관측치는 지수 감소 함수를 평균으로 가지는 포와송 확률 변수 함수로 다음 식 (1) 과 같이 모델링 된다.

$$y(t_i) = \mathrm{Poisson}\{Ae^{-t_i/\tau}\},\ i=0,1,..,N-1 \tag{1}$$

이때, A 는 지수 함수의 최대값을 나타내고, τ 는 지수 감소 함수의 시정수를 나타낸다. 식 (1) 로 모델링 되는 관측치 $Y=[y(t_0),y(t_1),...,y(t_{N-1})]$ 를 사용하여 크기와 시정수 두 가지를 동시에 추정하는 추정기의 평균값이 추정하고자 하는 크기 및 시정수와 일치하는 경우, 즉 unbiased 추정기일 경우 그 추정기의 분산은 C-R bound 보다 항상 크거나 같게 된다 [5]. 따라서 인수벡터 $\theta=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_N]$ 추정 시, 추정기 $\hat{\theta}=[\hat{\theta_1},\hat{\theta_2},...,\hat{\theta_N}]$ 의 분산은 다음 식 (2) 와 같이 C-R bound 보다 항상 크게 된다 [6].

$$Var[\hat{\theta}_i - E[\theta_i]] \geq J^{ii} \tag{2}$$

* Dept. of Electronics Engineering, Ewha womans University, Korea
† Corresponding Author : Dept. of Electronics Engineering, Ewha womans University, Korea.
E-mail : jtkim@ewha.ac.kr
Received : October 10, 2012; Accepted : December 4, 2012

여기서 J^{ii} 는 다음 식 (3) 과 같이 정의되는 Fisher information 행렬 F 의 역행렬의 (i,i) 번째 원소를 말한다 [6].

$$F_{ij}=E\left[\frac{\partial \log p(Y;\theta)}{\partial \theta_i}\frac{\partial \log p(Y;\theta)}{\partial \theta_j}\right]=-E\left[\frac{\partial^2 \log p(Y;\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right] \quad (3)$$

여기서, F_{ij} 는 행렬 F 의 (i,j) 번째 원소이고, $\log p(Y;\theta)$ 는 포와송 확률 변수에 기반한 log-likelihood 함수로서, 다음 식 (4) 와 같이 정의 된다.

$$\log p(Y;\theta)=\sum_{i=0}^{N-1}-(Ae^{-t_i/\tau})+y(t_i)\log(Ae^{-t_i/\tau})-\log y(t_i)! \quad (4)$$

지수 감소 함수의 크기 A 와 시정수 τ 를 추정하는 경우 $\theta=[\tau,A]$ 이므로 식 (4) 의 log-likelihood 함수를 τ 와 A 에 대해서 미분하고 식 (3) 에 따라 기대 값을 구해서 Fisher information 행렬을 구한다. 이 과정에서 다음 식 (5), (6) 의 포와송 확률 변수 함수의 성질은 수식을 간략화 하는데 유용하게 사용된다. 즉 포와송 랜덤 변수는 평균과 분산이 동일하고 관측치의 평균은 관측 순간에서의 지수 감소 함수의 값과 동일하다.

$$E[(y(t_i)]=Ae^{-t_i/\tau} \quad (5)$$

$$E[(y(t_i)-Ae^{-t_i/\tau})^2]=Ae^{-t_i/\tau} \quad (6)$$

상기와 같은 과정을 거쳐 연산된 Fisher information 행렬의 원소들은 다음과 같이 계산된다.

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log p(Y;\theta)}{\partial \tau^2}\right]=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{t_i^2}{\tau^4}(Ae^{-t_i/\tau}) \quad (7)$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log p(Y;\theta)}{\partial \tau \partial A}\right]=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{t_i}{\tau^2}(e^{-t_i/\tau}) \quad (8)$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log p(Y;\theta)}{\partial A^2}\right]=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{A}(e^{-t_i/\tau}) \quad (9)$$

식 (7), (8), (9) 을 이용하여 Fisher information 행렬을 구할 수 있고, 그 행렬의 역행렬을 구하면 C-R bound 는 다음 식 (1) 과 같이 Fisher information 행렬의 역행렬 J 에 의해서 결정된다.

$$J=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{A}(e^{-t_i/\tau}) & \sum_{i=0}^{N-1}\frac{t_i}{\tau^2}(e^{-t_i/\tau}) \\ \sum_{i=0}^{N-1}\frac{t_i}{\tau^2}(e^{-t_i/\tau}) & \sum_{i=0}^{N-1}\frac{t_i^2}{\tau^4}(Ae^{-t_i/\tau})\end{bmatrix} \quad (10)$$

이때, 행렬식 D 는 다음과 같이 정의 된다.

$$D=\sum_{i=0}^{N-1}(e^{-t_i/\tau})\sum_{i=0}^{N-1}\frac{t_i^2}{\tau^4}(e^{-t_i/\tau})-\sum_{i=0}^{N-1}\frac{t_i}{\tau^2}(e^{-t_i/\tau})\sum_{i=0}^{N-1}\frac{t_i}{\tau^2}(e^{-t_i/\tau}) \quad (11)$$

행렬식 D 는 Cauchy-Schwarz 부등식에 의해서 항상 양수값을 가지고, 다음 식 (12), (13) 과 같이 C-R bound 를 가지게 된다.

$$E[(\hat{\tau}-\tau)^2]\geq\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{A}e^{-t_i/\tau} \quad (12)$$

$$E[(\hat{A}-A)^2]\geq\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{t_i^2}{\tau^4}(Ae^{-t_i/\tau}) \quad (13)$$

식 (12), (13) 으로부터 몇 가지 흥미있는 사실을 발견할 수 있다. 식 (12) 로부터, 지수함수의 크기 A 가 증가할수록, 즉 신호대 잡음비가 증가할수록 시정수 τ 추정의 분산이 줄어든다는 사실을 알 수 있다. 즉, 통계적으로 보다 정확히 시정수를 추정할 수 있다. 그러나 A 가 증가할수록, 크기 A 추정의 분산은 증가하는 것을 알 수 있다. 이는 포와송 확률 변수의 분산이 크기가 증가하면 동시에 증가하는데서 기인한다고 해석할 수 있다. 또한, 크기 A 를 보다 정확히 추정하기 위해서는 시정수 τ 가 증가하여야 한다. 즉 지수 감소 함수가 천천히 감소하면 상대적으로 보다 정확히 크기를 추정할 수 있게 된다.

3. Maximum-likelihood (ML) 추정기

확률 변수가 아닌 인수를 추정하기 위해서 널리 사용되는 ML 추정기는 측정된 관측치의 개수가 무한대로 증가함에 따라서 점근적으로 (asymptotically) unbiased 되어 있고 점근적으로 efficient 한 추정기임이 알려져 있어 널리 사용된다 [5]. 실제로는 유한한 개수의 관측치만 사용하므로 efficient 한 추정기라는 보장은 없으나, 만약 efficient 한 추정기가 존재하면 ML 추정기임이 증명되어 있다 [5]. 본 논문에서는, 포와송 잡음하에서 시간 $t=t_i,\ i=0,\ldots,N-1$ 에서 얻어지는 지수 감소 함수의 크기와 시정수를 추정하기 위해서 다음 식 (14) 와 같이 포와송 likelihood 함수를 최대화시키는 ML 추정기를 구현하여 그 성능을 C-R bound 와 비교한다.

$$(\hat{\tau},\hat{A})=\arg\max_{\tau,A}\sum_{i=0}^{N-1}-(Ae^{-t_i/\tau})+y(t_i)\log(Ae^{-t_i/\tau}) \quad (14)$$

ML 추정기를 통하여 추정한 시정수의 통계적 특성이 unbiased 이고 그 분산이 C-R bound 를 만족하면, unbiased 추정기중 가장 좋은 분산 특성을 가지고 있음이 검증되므로 ML 추정기를 사용하여 추정하는 것이 좋은 선택이 될 것이다.

4. 시뮬레이션

포와송 잡음하에서의 시정수와 크기를 추정하는 추정 문제에 있어서 ML 추정기의 평균값과 분산 값을 구하고 식 (12), (13) 의 C-R bound 와 비교하는 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션 데이터는 원신호 $Ae^{-t/\tau}$ 를 평균으로 가지는 포아송 확률 변수을 이용하여 생성하였다. 원신호의 시정수로 3s 를 가지도록 만들었고, 크기는 1 부터 20 까지 변화시키면서 생성해주었다. 생성된 관측 데이터를 ML 추정기를 이용하여 시정수 추정 시뮬레이션을 500번 반복하여 평

균과 분산값을 구하였다. 또한 이때 정해진 크기와 시정수에 관한 C-R bound 를 식 (12), (13) 을 사용하여 계산하였다.

그림 1은 원신호의 크기를 1 부터 20 까지 변화시킬 때 각 신호에 대해 ML 추정기를 이용해 추정한 시정수의 평균과 원신호의 시정수를 나타낸다. 그림으로부터, ML 추정기를 통해 추정한 시정수의 평균이 실제 원신호의 시정수인 3 과 거의 같게 나타나는 것을 볼 수 있다. 그림 2는 원신호의 크기를 1 부터 20 까지 변화시킬 때 각 신호에 따라서 구한 ML 추정기를 이용해 추정한 크기의 평균을 나타낸다. 변화시킨 원신호 각각의 크기와 그때의 측정 데이터에 대해서 ML 추정기를 통해 추정한 크기의 평균을 비교해보면 평균값과 크기값이 거의 같음을 볼 수 있다.

ML 추정기를 통해 추정한 시정수, 크기의 평균이 원신호의 시정수, 크기와 비교했을 때 거의 동일하게 추정함을 알 수 있고, 또한 ML 추정기로 추정한 결과에 바이어스가 일어나지 않음을 알 수 있다. 따라서, ML 추정기가 unbiased 추정기임을 시뮬레이션을 통하여 검증하였고 이 경우 각 추정기의 분산값은 C-R bound 보다는 크게 된다.

그림 3은 원신호의 크기를 1 부터 20 까지 변화시킬 때 각 신호에 따라서 구한 C-R bound 와 ML 추정기를 이용해 추정한 시정수의 분산을 나타낸다. ML 추정기를 통해 추정한 시정수의 분산이 C-R bound 의 성능에 매우 접근하고 있는 것을 볼 수 있다. 그림 4는 원신호의 크기를 1 부터 20 까지 변화시킬 때 각 신호에 따라서 구한 C-R bound 와 ML 추정기를 이용해 추정한 크기의 분산을 나타낸다. 1 부터 20 까지의 크기에 대해서 ML 추정기를 통해 추정한 크기의 분산이 C-R bound 와 유사한 것을 볼 수 있다. 또한 C-R bound 는 크기가 증가함에 따라 증가함을 볼 수 있다. 이론적으로 구한 C-R bound 와 ML 추정기로 추정한 시정수, 크기의 분산을 비교한 결과가 매우 유사한 것을 봄으로써 ML 추정기의 유용성을 확인할 수 있다.

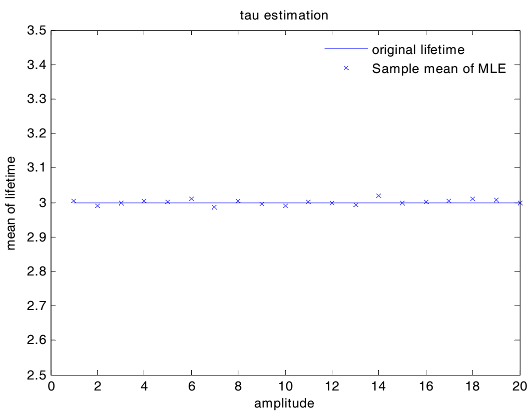

그림 1 원신호의 시정수와 ML 추정기를 이용해 추정한 시정수의 평균

Fig. 1 Decay constant of original signal and mean of estimated of decay constant using ML estimator

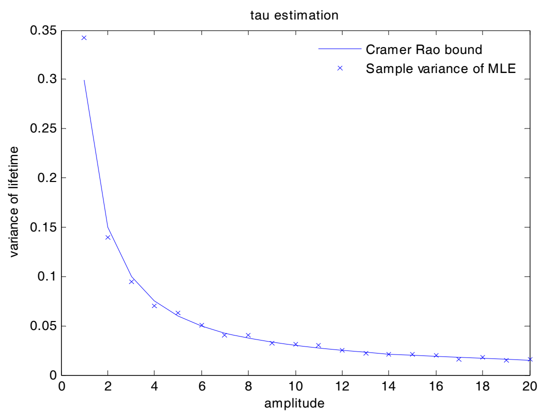

그림 3 ML 추정기를 이용해 추정한 시정수의 분산과 C-R bound

Fig. 3 Variance of estimated of decay constant using ML estimator and C-R bound

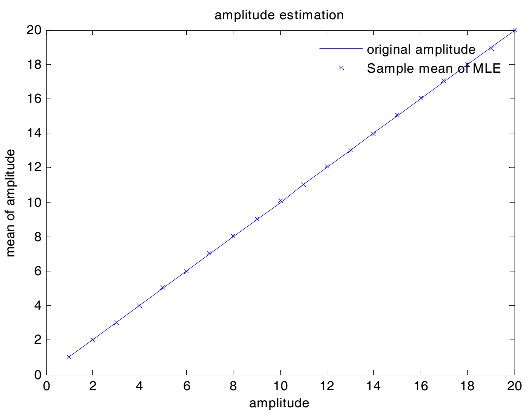

그림 2 원신호의 크기와 ML 추정기를 이용해 추정한 크기의 평균

Fig. 2 Amplitude of original signal and mean of estimated amplitude using ML estimator

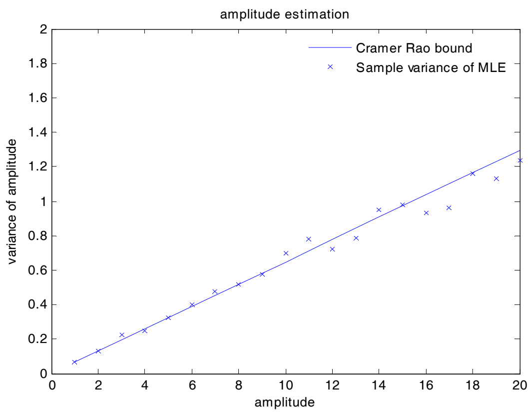

그림 4 ML 추정기를 이용해 추정한 크기의 분산과 C-R bound

Fig. 4 Variance of estimated of amplitude using ML estimator and C-R bound

4. 결 론

본 논문에서는 포와송 확률 변수를 기반으로 하는 지수 감소함수의 크기와 시정수를 동시 추정하는 경우에 대해 C-R bound 를 이론적으로 구하고, C-R bound 를 구성하는 변수들을 분석하였다. 또한 포와송 잡음을 기반으로 하는 ML 추정기가 unbiased 추정기이고 그 분산이 C-R bound 를 만족함을 시뮬레이션으로 확인하여 ML 추정기의 성능을 검증하였다. 본 논문에서 이론적으로 구한 C-R bound 의 값은 지수 함수 감소 추정기의 성능을 평가하는 기준으로 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 도약연구과제 (KOSEF R17-2008-041-01001-0)로 수행된 연구결과입니다.

References

[1] S. L. Tantum and L. M. Collins, “A parameter transformation and Cramer-Rao bounds for estimating decay rates from exponential signals,” in IGARSS '02. 2002 IEEE International, vol. 4, pp.2568-2571, (2002).

[2] J. R. Lakowicz, *Principles of Fluorescence Spectroscopy* (Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999), 2nd ed.

[3] A. U. Jibia, M-J. E. Salami, O. O. Khalifa and F.A.M. Elfaki, “Cramer-Rao Lower Bound for Parameter Estimation of Multiexponential Signals,” in IWSSIP 2009, pp.1 - 5 (2009).

[4] A. Papoulis, *Probability, Random variables, and Stochastic Processes* (McGraw-Hill, Inc, 2002), 4th ed.

[5] P. Hall, and B. Selinger, “Better estimates of exponential decay parameters”, J. Phys. Chem. vol. 85, No. 20, pp.2941-2946 (1981).

[6] H. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, no. v. in Detection, Estimation, and Modulation Theory (John Wiley & Sons, 2001).

저 자 소 개

석 지 영 (石 知 英)

2012년 이화여자대학교 전자공학과 졸업. 2012년 3월-현재 동 대학원 석사과정 재학중.

Tel : +82-2-3277-4236

E-mail : jyyoung89@ewhain.net

김 정 태 (金 廷 泰)

1989년 서울대학교 제어계측공학과 졸업. 1991년 동 대학원 석사과정 졸업. 1991년 -1998년 삼성전자 디지털미디어연구소 책임연구원. 2004년 미시간대학교 전기공학과졸업 (Ph.D), 2004년-현재 이화여자대학교 전자공학과 부교수

Tel : +82-2-3277-4084

Fax : +82-2-3277-3494

E-mail : jtkim@ewha.ac.kr