

論文

공중재급유를 위한 상대운동방정식 유도 및 검증

장지은*, 이상중**, 유혁**

Derivation and Verification of the Relative Dynamics Equations
for Aerial Refueling

Jieun Jang*, Sangjong Lee** and Hyuk Ryu**

ABSTRACT

This paper addresses the derivation of 6-DOF equation of Tanker and Receiver's aircraft for aerial refueling. The new set of nonlinear equations are derived in terms of the relative translational and rotational motion of receiver aircraft respect to the tanker aircraft body frame. Further the wind effect terms due to the tanker's turbulence are included. The derivation of absolute dynamic equation for tanker aircraft written in the inertial frame is calculated from the relative dynamics equations of receiver. The derived relative and absolute equations are implemented the simulation in the same flight conditions to verify the relative motion and compare the trim results by using the MATLAB/SIMULINK program.

Key Words : Aerial Refueling(공중재급유), Tanker(급유기), Receiver(피급유기), Relative Dynamics Equations(상대운동 방정식), Absolute Dynamics Equations(절대운동 방정식)

1. 서 론

‘공중재급유(aerial refueling)’란 비행 중 한 항공기로부터 다른 항공기로 연료를 전달하는 과정을 의미한다[1]. 이 때 급유를 하고자 하는 항공기를 ‘급유기(Tanker aircraft)’라 하고, 급유를 받고자 하는 항공기를 ‘피급유기(receiver aircraft)’라 지칭한다. 공중재급유는 항공기의 항속 거리와 시간을 늘릴 뿐만 아니라 탑재 중량을 증가시켜 비행의 효율성을 높이는 장점이 있으며, 이러한 장점은 유인기 뿐 아니라 무인기에도 적용될 수 있다.[1]

공중재급유 방식은 ‘프로브 앤 드로그 재급유

(Probe-and-Drogue Refueling; PDR)방식과 ‘플로잉 붐 재급유’(Boom-Receptacle Refueling; BRR)방식으로 나눌 수 있다. BRR 방식은 급유기의 꼬리날개 부근 동체에 장착된 붐을 통해 피급유기의 기수 옆 소켓(receptacle)으로 연료를 전달하는 방법이며, 이 때 급유기 내 붐 조작이 가능한 승무원(boom operator)이 탑승하여 직접 붐을 조작하여야 한다.[2] PDR 방식은 급유기의 호스에 연결된 셔플러 형태의 드로그를 피급유기 기수 옆 프로브와 연결하여 급유를 하는 형태이며, 강체가 아닌 호스에 직접 프로브를 삽입해야하므로 피급유기 조종사의 조종 능력이 요구된다.[2] 특히 무인 항공기에 적용하기 위한 공중재급유 방식은 유인 항공기와 비교해 탑재 연료량이 적어 특별한 형상의 기체가 요구되지 않아 보편적으로 사용가능한 PDR 방식이 적합하다.[1]

PDR 방식의 무인 항공기 공중재급유를 구현하기 위해서는 급유기가 지정된 비행경로를 따라 비행하는 동안 피급유기의 적절한 위치 선정 및

2013년 09월 23일 접수 ~ 2013년 12월 18일 심사완료
논문심사일 (2013.09.27, 1차), (2013.12.04, 2차)

* 과학기술연합대학원대학교 한국항공우주연구원

** 한국항공우주연구원 항공제어전자팀

연락처: 이상중, E-mail : albert@kari.re.kr

대전 유성구 과학로 169-84

급유기와 피급유기의 편대비행(formation flight)이 중요하다. 이 때 피급유기는 급유기의 움직임에 대한 상대 운동을 하므로 피급유기의 운동방정식은 급유기의 동체 좌표계에 대한 상대운동방정식을 기술하는 것이 편리하다. 반면 급유기는 관성 좌표계를 기준으로 운동방정식을 서술하며, 이는 급유기와 피급유기 사이 유도된 상대운동방정식을 적절한 가정 사항을 이용해 절대운동방정식으로 유도하여 적용할 수 있다. 본 연구에서는 급유기와 피급유기 동체 좌표계 모두 기체에 고정된 무게중심(center of mass)을 기준점으로, 병진 및 회전 운동의 중심이 되며 재급유 시 연료 전달로 인한 항공기의 질량 변화는 충분히 작다고 가정하였다.



Fig. 1. Type of aerial refueling

본 논문의 구성은 다음과 같은데 1장은 서론, 2장에서는 상대 및 절대 운동방정식 유도를 위한 좌표계 및 좌표변환 관계를 정의하고, 3장에서는 피급유기의 상대운동 방정식 유도과정을 4장에서는 급유기의 절대운동 방정식을 병진운동과 회전운동으로 나누어 유도한다. 동일한 비행 조건에서의 비선형 시뮬레이션을 통해 유도된 식을 비교·검증하고 그 결과를 5장에 기술하였다.

2. 좌표계 정의 및 좌표변환

공중재급유 과정에서 급유기의 절대운동과 피급유기의 상대운동을 표현하기 위한 좌표계는 Fig. 2와 같이 (i)관성 좌표계(inertial frame), (ii) 급유기 동체 좌표계(tanker's body frame, B_T), (iii)급유기 바람 좌표계(tanker's wind frame, W_T), (iv)피급유기 동체 좌표계(receiver's body frame, B_R), (v)피급유기 바람 좌표계(receiver's wind frame, W_R)가 사용된다. 관성 좌표계와 급유기의 동체 좌표계 및 피급유기의 동체 좌표계는 Fig. 2와 같이 나타낼 수 있다.

Fig. 2에서 관성 좌표계로부터 피급유기 또는

급유기의 무게 중심까지의 거리벡터는 \mathbf{r} 로 나타낸다. 특히 상대 운동을 표현하기 위한 급유기와 피급유기 간 무게 중심의 거리벡터는 ξ 로 정의하며 이 때 기준 좌표계는 급유기의 동체 좌표계를 사용한다.

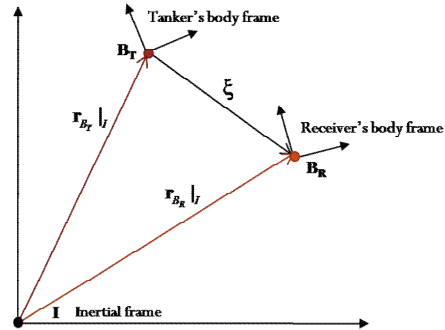


Fig. 2. Coordinate system for aerial refueling

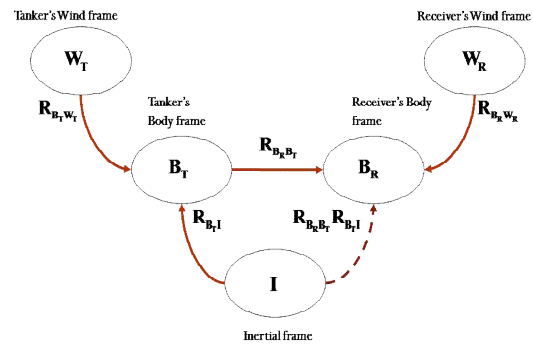


Fig. 3. Transformation relationship between frames

각 좌표계 간의 좌표변환과 기준변환 방향은 Fig. 3과 같다. 좌표변환 행렬(rotational matrix)과 항등행렬(identity matrix)을 각각 \mathbf{R} , \mathbf{I} 로 표기하며, 좌표변환 행렬의 직교성질(orthogonality)에 의해 전치행렬(transpose matrix)과 역행렬(inverse matrix)이 같아진다. 따라서 관성 좌표계에서 급유기의 동체 좌표계로의 변환은 식 (1)과 같으며, 반대로 급유기의 동체 좌표계에서 관성 좌표계로의 변환은 식 (2)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{R}_{B_T/I} \mathbf{I} \quad (1)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}_{B_T/I}^T \mathbf{B}_T \quad (2)$$

급유기에 대한 피급유기의 상대운동 표현을 위한 좌표계 변환은 식 (3)과 같이 관성 좌표계에서 급유기의 동체 좌표계로 변환 후, 다시 피급유기의 동체 좌표계로 이동하여 나타낸다.

$$\mathbf{R}_{B_R/I} = \mathbf{R}_{B_R/B_T} \mathbf{R}_{B_T/I} \quad (3)$$

3. 피급유기의 상대운동 방정식 유도

3.1 피급유기의 상대위치 운동방정식

피급유기의 상대위치 운동방정식(relative translational kinematics equations)은 급유기의 동체 좌표계에 대한 피급유기의 상대위치(relative position, $\xi = [x_{B_R B_T} \ y_{B_R B_T} \ z_{B_R B_T}]^T$)를 구하는 것이 목적이며, Fig. 2에서 초기 급유기와 피급유기 간의 위치벡터 관계는 식 (4)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{r}_{B_T} |_I + \mathbf{R}_{B_T} \xi |_I = \mathbf{r}_{B_R} |_I \quad (4)$$

동일한 좌표계에서 표현하기 위해 급유기의 동체 좌표계에서 관성 좌표계로의 좌표 변환 행렬(\mathbf{R}_{B_T})을 이용하여 ξ 를 관성좌표계로 좌표 변환하고 미분한다. 모든 항의 좌표계가 일치하면 좌표계 표기는 생략 할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{r}}_{B_R} = \dot{\mathbf{r}}_{B_T} + (\dot{\mathbf{R}}_{B_T})^T \xi + (\mathbf{R}_{B_T})^T \dot{\xi} \quad (5)$$

좌변을 $\dot{\xi}$ 항에 대하여 정리하고 항등행렬로의 변환을 위해 관성 좌표계에서 급유기의 동체좌표계로의 좌표변환 행렬(\mathbf{R}_{B_T})을 곱하여 정리한다.

$$\dot{\xi} = (\mathbf{R}_{B_T})^T \dot{\mathbf{r}}_{B_R} - (\mathbf{R}_{B_T})^T \dot{\mathbf{r}}_{B_T} - (\dot{\mathbf{R}}_{B_T})^T \xi \quad (6)$$

식 (6)의 세 번째 항은 식 (7)의 좌표 변환 행렬과 반대칭 행렬 성질(Skew-symmetric property; $s(\mathbf{x})$)에 의해 식(8)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{B_T})^T (\dot{\mathbf{R}}_{B_T})^T &= -s(\boldsymbol{\omega}_{B_T}), \\ \text{where, } s(\mathbf{x}) &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{\xi} = (\mathbf{R}_{B_T})^T \dot{\mathbf{r}}_{B_R} - (\mathbf{R}_{B_T})^T \dot{\mathbf{r}}_{B_T} + s(\boldsymbol{\omega}_{B_T}) \xi \quad (8)$$

한편, 피급유기의 동체좌표계에 대한 속도 벡터($\dot{\mathbf{r}}_{B_R}$)는 피급유기의 바람좌표계에서의 항공기의 속도 벡터(\mathbf{V}_{B_R})와, 피급유기 동체좌표계에서의 대기속도 벡터(\mathbf{W}_{B_R})를 더하여 나타낼 수 있다. 이 때 |와 아래첨자를 사용하여 벡터의 기준 좌표계를 나타낸다. 예를 들어 식 (9)의 $\dot{\mathbf{r}}_{B_R} |_I$ 는 관성 좌표계에서 기술 된 피급유기의 속도 벡터를 의미 한다.

$$\dot{\mathbf{r}}_{B_R} |_I = \mathbf{V}_{B_R} |_{W_R} + \mathbf{W}_{B_R} |_{B_R} \quad (9)$$

식 (5)와 마찬가지로 식 (9) 또한 관성 좌표계

로의 좌표 변환이 필요하다. 피급유기 속도 항에는 바람 좌표계에서 관성좌표계로의 좌표변환 행렬($\mathbf{R}_{I W_R}$)을, 대기속도 항은 동체 좌표계에서 관성 좌표계로의 좌표변환 행렬($\mathbf{R}_{I B_R}$)을 각각 곱한다.

$$\dot{\mathbf{r}}_{B_R} |_I = \mathbf{R}_{I W_R} \mathbf{V}_{B_R} |_{W_R} + \mathbf{R}_{I B_R} \mathbf{W}_{B_R} |_{B_R} \quad (10)$$

좌표변환 행렬의 직교성질과 Fig. 3의 좌표변환 방향을 고려하면 식 (11)로 정리할 수 있으며, 동일한 좌표계일 때 |과 아래첨자는 생략가능하다. 앞서 구한 식 (6)의 피급유기 속도 항을 사용하여 최종적으로 바람 항을 포함한 피급유기와 급유기의 상대속도 미분치($\dot{\xi}$)는 식 (12)로 정리할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{r}}_{B_R} = (\mathbf{R}_{B_T})^T (\mathbf{R}_{B_R B_T})^T \mathbf{R}_{B_R W_R} \mathbf{V}_{B_R} + (\mathbf{R}_{B_T})^T (\mathbf{R}_{B_R B_T})^T \mathbf{W}_{B_R} \quad (11)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{R}_{B_R B_T}^T \mathbf{R}_{B_R W_R} \mathbf{V}_{B_R} + \mathbf{R}_{B_R B_T}^T \mathbf{W}_{B_R} - (\mathbf{R}_{B_T})^T \dot{\mathbf{r}}_{B_T} + s(\boldsymbol{\omega}_{B_T}) \xi \quad (12)$$

식 (12)의 최종 좌표는 급유기의 동체좌표계이며, 상대 속도는 피급유기의 속도와 급유기 속도의 차이임을 알 수 있다.

3.2 피급유기의 상대 힘 운동방정식

피급유기의 상대 힘 운동방정식(relative translational dynamics equations)은 급유기의 동체좌표계에 대한 피급유기의 속도(airspeed, V_R)와 받음각(angle-of-attack angle, α_R), 옆미끄럼각(side-slip angle, β_R)을 구하는 식으로, 이 때 피급유기 작용하는 힘은 뉴턴 제 2법칙을 통해 나타낸다. 힘은 관성 좌표계를 기준으로 기술하므로 급유기와 피급유기 간 동체 좌표계로 나타내기 위한 좌표 변환이 필요하다.

$$\mathbf{F} |_I = m_R \frac{d}{dt} \mathbf{V}_{B_R} |_I = m_R \ddot{\mathbf{r}}_{B_R} |_I \quad (13)$$

식 (13)의 피급유기 가속도 항($\ddot{\mathbf{r}}_{B_R}$)은 식 (5)의 피급유기의 속도 항($\dot{\mathbf{r}}_{B_R}$)을 미분하여 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{B_R} &= \dot{\mathbf{R}}_{B_T}^T \mathbf{R}_{B_R B_T}^T \mathbf{R}_{B_R W_R} \mathbf{V}_{B_R} + \mathbf{R}_{B_T}^T \dot{\mathbf{R}}_{B_R B_T}^T \mathbf{R}_{B_R W_R} \mathbf{V}_{B_R} \\ &\quad + \mathbf{R}_{B_T}^T \mathbf{R}_{B_R B_T}^T \dot{\mathbf{R}}_{B_R W_R} \mathbf{V}_{B_R} + \mathbf{R}_{B_T}^T \mathbf{R}_{B_R B_T}^T \mathbf{R}_{B_R W_R} \dot{\mathbf{V}}_{B_R} \\ &\quad + \dot{\mathbf{R}}_{B_T}^T \mathbf{R}_{B_R B_T}^T \mathbf{W}_{B_R} + \mathbf{R}_{B_T}^T \dot{\mathbf{R}}_{B_R B_T}^T \mathbf{W}_{B_R} + \mathbf{R}_{B_T}^T \mathbf{R}_{B_R B_T}^T \dot{\mathbf{W}}_{B_R} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (13)에 식 (14)를 대입한 후, 피급유기의 동체좌표계로 좌표 변환을 수행한다. 좌표 변환 순서는 관성 좌표계에서 급유기의 동체 좌표계로의 좌표 변환 행렬(\mathbf{R}_{B_T})을 곱하고, 피급유기의 동체좌표계

로의 변환을 위해 양변에 좌표변환 행렬($\mathbf{R}_{B_R B_T}$)을 곱한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{B_R B_T} \mathbf{R}_{B_T} \mathbf{F} &= m_R [-\mathbf{R}_{B_R B_T} s(\omega_{B_T}) \mathbf{R}_{B_R B_T}^T \mathbf{R}_{B_R} \mathbf{W}_R \mathbf{V}_{B_R} \\ &\quad - s(\omega_{B_T}) \mathbf{R}_{B_R} \mathbf{W}_R \mathbf{V}_{B_R} + \dot{\mathbf{R}}_{B_R} \mathbf{W}_R \mathbf{V}_{B_R} + \mathbf{R}_{B_R} \mathbf{W}_R \dot{\mathbf{V}}_{B_R} \\ &\quad - s(\mathbf{R}_{B_R B_T} \omega_{B_T}) \mathbf{W}_{B_R} - s(\omega_{B_T}) \mathbf{W}_{B_R} + \dot{\mathbf{W}}_{B_R}] \quad (15) \\ \text{where, } s(\mathbf{R}_{B_R B_T} \omega_{B_T}) &= \mathbf{R}_{B_R B_T} s(\omega_{B_T}) \mathbf{R}_{B_R B_T}^T \end{aligned}$$

여기서, 피급유기의 바람 좌표계에서의 기체 속도 미분 식 (16)을 정의하고, 식 (15)에 대입하여 피급유기 속도와 옆미끄럼각, 받음각에 대한 미분 식으로 유도하면 최종적으로 피급유기의 상대 힘 운동방정식은 식 (17)로 표현된다.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{V}_{B_R} \mathbf{R}_{B_R} \mathbf{W}_R) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{B_R} \cos \beta_{B_R} \cos \alpha_{B_R} \\ \mathbf{V}_{B_R} \sin \beta_{B_R} \\ \mathbf{V}_{B_R} \cos \beta_{B_R} \sin \alpha_{B_R} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_{B_R} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_{B_R} \\ \dot{\alpha}_{B_R} \end{bmatrix} \triangleq \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (16)$$

where

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{B_R} = \begin{bmatrix} \cos \beta_{B_R} \cos \alpha_{B_R} & -V_{B_R} \sin \beta_{B_R} \cos \alpha_{B_R} & -V_{B_R} \cos \beta_{B_R} \sin \alpha_{B_R} \\ \sin \beta_{B_R} & V_{B_R} \cos \beta_{B_R} & 0 \\ \cos \beta_{B_R} \sin \alpha_{B_R} & -V_{B_R} \sin \beta_{B_R} \sin \alpha_{B_R} & V_{B_R} \cos \beta_{B_R} \cos \alpha_{B_R} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\delta}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{B_R}^{-1} [s(\omega_{B_T}) + \mathbf{R}_{B_R B_T} s(\omega_{B_T}) \mathbf{R}_{B_R B_T}^T] (\mathbf{R}_{B_R} \mathbf{W}_R \mathbf{V}_{B_R} + \mathbf{W}_{B_R}) \\ &\quad - \boldsymbol{\varepsilon}_{B_R}^{-1} \dot{\mathbf{W}}_{B_R} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{B_R}^{-1}}{m_R} (\mathbf{R}_{B_R} \mathbf{R}_{B_T} \mathbf{M}_R |_l + \mathbf{R}_{B_R} \mathbf{A}_{B_T} |_{m_i} + \mathbf{P}_{B_T} |_{B_R}) \quad (17) \end{aligned}$$

식 (17)은 바람 항을 포함하고 있으며, 피급유기의 동체좌표계에서 표현되었다. 관성좌표계가 기준인 중력($\mathbf{M}_{B_R} = [0 \ 0 \ m_{B_R} g]^T$)항과 피급유기의 바람 좌표계가 기준인 공력(\mathbf{A}_{B_R})은 피급유기의 동체 좌표계로 좌표 변환하였으며, 추력(\mathbf{P}_{B_R})항 그대로 사용한다.

3.3 피급유기의 상대 자세 운동방정식

피급유기의 상대 자세 운동방정식(rotational kinematics equations)은 급유기의 동체좌표계에 대한 피급유기 동체좌표계에서의 자세각 미분치($\boldsymbol{\chi}_{B_R B_T} = [\phi_{B_R B_T} \ \theta_{B_R B_T} \ \psi_{B_R B_T}]^T$)를 구하기 위한 운동방정식으로, 기준 좌표계에 상관없이 오일러 3-2-1 법칙을 동일하게 적용하여 식 (19)와 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\phi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\psi \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{B_R} \\ \dot{\theta}_{B_R} \\ \dot{\psi}_{B_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi_{B_R} \tan \theta_{B_R} & \cos \phi_{B_R} \tan \theta_{B_R} \\ 0 & \cos \phi_{B_R} & -\sin \phi_{B_R} \\ 0 & \sin \phi_{B_R} \sec \theta_{B_R} & \cos \phi_{B_R} \sec \theta_{B_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{B_R} \\ q_{B_R} \\ r_{B_R} \end{bmatrix} \quad (19)$$

3.4 피급유기의 상대 모멘트 운동방정식

피급유기의 상대 모멘트 운동방정식(relative rotational dynamics equations)은 급유기의 동체 좌표계에 대한 피급유기의 상대 각속도(relative angular velocity, $\boldsymbol{\omega}_{B_R B_T} = [p_{B_R B_T} \ q_{B_R B_T} \ r_{B_R B_T}]^T$)를 구하는 운동방정식으로, 이 때 연료의 이동에 의한 피급유기의 질량 변화는 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정하여 피급유기와 급유기 모두 질점으로 고려한다.

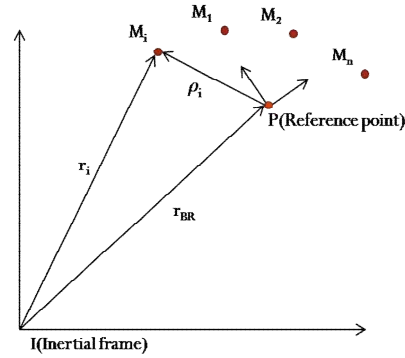


Fig. 4. Rigid particle and lumped masses (receiver)

Fig. 4에서와 같이 피급유기의 무게중심을 기준점(P, reference point)으로 정의하고 임의의 질점을 라 M_i 라 한다. 이 때, 관성 좌표계의 원점으로부터 기준점까지의 거리벡터(\mathbf{r}_{B_R})와 질점까지의 거리벡터(\mathbf{r}_i)를 이용하여 질점과 기준점 간의 거리벡터($\boldsymbol{\rho}_i$)를 표현 할 수 있다.

$$\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{B_R} \quad (20)$$

피급유기의 기준점에 작용하는 전체 모멘트($\mathbf{M}_{B_R} = [l_{B_R} \ m_{B_R} \ n_{B_R}]^T$)는 식 (21)과 같고, 전체 회전 운동량(\mathbf{H}_{B_R}) 또한 정의에 의해 식 (22)와 같다.

$$\mathbf{M}_{B_R} = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) - \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_{B_R} \times \mathbf{F}_i) \quad (21)$$

$$\mathbf{H}_{B_R} = \sum_{i=1}^n \left(\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \frac{d}{dt} \boldsymbol{\rho}_i \right) \quad (22)$$

질점과 기준점 간의 미분은 코리올리 법칙(Corioli's law)에 의해 식 (23)과 같이 나타낼 수 있는데, 이 때 임의의 질점과 기준점 간의 거리는 고정된 값이므로 시간에 대한 변화율을 고려하지 않아 첫 항은 소거된다.

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega}_{B_R} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega}_{B_R} \times \boldsymbol{\rho} \quad (23)$$

$$\mathbf{H}_{B_R} = \sum_{i=1}^n \rho_i \times (m_i \boldsymbol{\omega}_{B_R} \times \rho_i) \quad (24)$$

식 (24)를 미분하면 관성 좌표계 대한 피급유기의 각속도와 전체 회전량에 관한 식 (25)로 정리할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{H}}_{B_R} = \dot{\mathbf{H}}_{B_R} + \boldsymbol{\omega}_{B_R} \times \mathbf{H}_{B_R} = \mathbf{I}_R \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_R} - s(\boldsymbol{\omega}_{B_R}) \mathbf{I}_R \boldsymbol{\omega}_{B_R} \quad (25)$$

where, $-s(\boldsymbol{\omega}_{B_R}) \mathbf{I}_R \boldsymbol{\omega}_{B_R} \triangleq \boldsymbol{\omega}_{B_R} \times \mathbf{I}_R \boldsymbol{\omega}_{B_R} = \boldsymbol{\omega}_{B_R} \times \mathbf{H}_{B_R}$

정의에 의해 전체 회전 운동량의 미분은 전체 모멘트와 같으므로 식 (25)는 식 (26)으로 정리된다.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_R} = \mathbf{I}_R^{-1} \dot{\mathbf{M}}_{B_R} + \mathbf{I}_R^{-1} s(\boldsymbol{\omega}_{B_R}) \mathbf{I}_R \boldsymbol{\omega}_{B_R} \quad (26)$$

한편, 피급유기와 급유기의 상대 각속도($\boldsymbol{\omega}_{B_R B_T}$)는 피급유기의 각속도에서 급유기의 각속도를 빼고 좌표 변환함으로써 피급유기의 동체좌표계에 대해 식 (27)로 나타낼 수 있으며,

$$\boldsymbol{\omega}_{B_R B_T} = \boldsymbol{\omega}_{B_R} - \mathbf{R}_{B_R B_T} \boldsymbol{\omega}_{B_T} \quad (27)$$

식 (27)을 미분한 후 식 (26)을 사용하여 정리하면 상대 각속도 미분치는 식 (28)과 같아, 급유기에 대한 피급유기의 상대 각속도 운동을 기술할 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_R B_T} = \mathbf{I}_R^{-1} \dot{\mathbf{M}}_{B_R} + \mathbf{I}_R^{-1} s(\boldsymbol{\omega}_{B_R B_T} + \mathbf{R}_{B_R B_T} \boldsymbol{\omega}_{B_T}) \mathbf{I}_R (\boldsymbol{\omega}_{B_R B_T} + \mathbf{R}_{B_R B_T} \boldsymbol{\omega}_{B_T}) - s(\boldsymbol{\omega}_{B_R B_T}) \mathbf{R}_{B_R B_T} \boldsymbol{\omega}_{B_T} - \mathbf{R}_{B_R B_T} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_T} \quad (28)$$

4. 급유기의 절대운동 방정식 유도

4.1 급유기의 절대위치 운동방정식

급유기의 절대위치 운동방정식(absolute translational kinematics equations)은 식 (12)로 유도된 피급유기의 상대위치 운동방정식에서 유도할 수 있으며, 관성 좌표계에 대한 급유기의 절대 위치(absolute position, $\mathbf{r}_{B_T} = [x_{B_T} \ y_{B_T} \ z_{B_T}]^T$)를 표현한다. 급유기의 동체 좌표계는 관성좌표계에 정렬(align)되어 있으므로 식 (29)와 같은 관계식을 정의할 수 있다.

$$\mathbf{R}_{B_R B_T} = \mathbf{R}_{B_T I}, \mathbf{R}_{B_T I} = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \dot{\mathbf{r}}_{B_T} |_I = \mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_{B_T I} |_I = \mathbf{0} \quad (29)$$

식 (29)를 식 (12)에 적용하면 급유기의 관성좌표계에 대한 급유기의 절대위치 운동방정식은 식 (30)으로 표현할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{r}}_{B_T} = \mathbf{R}_{B_T I}^T \mathbf{R}_{B_T W_T} \mathbf{V}_{B_T} + \mathbf{R}_{B_T I}^T \mathbf{W}_{B_T} \quad (30)$$

4.2 급유기의 절대 힘 운동방정식

급유기의 절대 힘 운동방정식(absolute translational dynamics equations)은 절대위치 운동방정식에서와 동일한 방식을 적용하면 식 (29)의 관계식에 $\boldsymbol{\omega}_{B_R B_T} = \boldsymbol{\omega}_{B_T I}$ 관계식이 추가되어 식 (17)로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_T} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{B_T}^{-1} s(\boldsymbol{\omega}_{B_T}) \mathbf{R}_{B_T W_T} \mathbf{V}_{B_T} + \boldsymbol{\varepsilon}_{B_T}^{-1} s(\boldsymbol{\omega}_{B_T}) \mathbf{W}_{B_T} \\ &- \boldsymbol{\varepsilon}_{B_T}^{-1} \dot{\mathbf{W}}_{B_T} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{B_T}^{-1}}{m_T} (\mathbf{R}_{B_T I} \mathbf{M}_T |_I + \mathbf{R}_{B_T W_T} \mathbf{A}_{B_T} |_{W_T} + \mathbf{P}_{B_T} |_{B_T}) \end{aligned} \quad (31)$$

상기 운동방정식은 급유기의 동체좌표계에서 기술되므로 추력을 제외한 중력과 공력은 급유기의 동체좌표계로 좌표 변환하여 나타낸다.

4.3 급유기의 절대 자세 운동방정식

급유기의 절대 자세 운동방정식(rotational kinematics equations)은 식 (19)에서 관성좌표계에 대한 급유기의 자세각으로 대체하여 식 (32)와 같이 정의된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{B_T} \\ \dot{\theta}_{B_T} \\ \dot{\psi}_{B_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi_{B_T} \tan \theta_{B_T} & \cos \phi_{B_T} \tan \theta_{B_T} \\ 0 & \cos \phi_{B_T} & -\sin \phi_{B_T} \\ 0 & \sin \phi_{B_T} \sec \theta_{B_T} & \cos \phi_{B_T} \sec \theta_{B_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{B_T} \\ q_{B_T} \\ r_{B_T} \end{bmatrix} \quad (32)$$

4.4 급유기의 절대 모멘트 운동방정식

급유기의 절대 모멘트 운동방정식(absolute rotational dynamics equations)은 피급유기의 상대 운동방정식인 식 (28)로부터 식 (33)의 관계식을 이용하여 식 (34)로 유도할 수 있다.

$$\mathbf{R}_{B_R B_T} = \mathbf{R}_{B_T I}, \boldsymbol{\omega}_{B_T} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_{B_R B_T} = \boldsymbol{\omega}_{B_T I} \quad (33)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_T I} = \mathbf{I}_T^{-1} (\dot{\mathbf{M}}_{B_T} + s(\boldsymbol{\omega}_{B_T I}) \mathbf{I}_R \boldsymbol{\omega}_{B_T}) \quad (34)$$

5. 운동방정식의 시뮬레이션 검증

5.1 대상 비행체

공중 재급유의 대상 비행체는 현재 한국항공우주연구원에서 무인화 개발을 수행하고 있는 독일 Flight Design사의 2인승 LSA급 프로펠러기인 CTLS로 급유기와 피급유기 모두 동일한 비행체로 가정하였다. CTLS의 주요 제원은 Table 1에 정리하였다.



Fig. 5. Target aircraft (CTLS)

Table 1. CTLS Specification

Physical Dimension			
MTOW	600kg	Length	6.61m
Empty Weight	310kg	Height	2.34m
Useful Load	290kg	Wing span	8.6m
Fuel Capacity	93kg		
Performance			
Cruise Speed	185kph	Take-off Dist	250m
Rate of Climb	805fpm	Take-off Dist.@50ft	450m
Max Range	1540km	Landing Dist.@50ft	480m

5.2 상대 및 절대 운동방정식 검증조건

3장과 4장에서 유도한 상대 및 절대운동방정식의 타당성을 검증하고, 상대운동의 반영 여부를 확인하기 위한 시뮬레이션을 수행하였다. 검증을 위한 기준식은 현재 한국항공우주연구원에서 개발 비행시험을 통해 대상 비행체의 공력, 추력 등의 실제 비행특성을 반영한 6-자유도 비선형 운동 모델을 사용하였으며, 비교식의 정의는 Table 2와 같다.

기준식(A)와 각 비교식의 비교 변수는 시뮬레이션 후 출력된 상태 변수(속도, 받음각, 옆미끄럼각, 각속도, 자세각, 위치) 및 조종 입력(엘리베이터, 에일러론, 러더, 추력)을 사용한다.

기준식(A)는 관성좌표계와 동체좌표계를 기준으로 뉴턴 제 2법칙으로부터 유도된 일반 항공기 운동방정식으로, 기준식의 출력결과는 관성좌표계에 대하여 기술된 절대운동 방정식인 비교식(T1)과 비교식(R1)과 같은 결과를 나타내게 되어, 동일한 비행조건에서 비교식(T1)과 비교식(R1)의 결과를 검증할 수 있다. 유도된 피급유기의 상대운동 방정식(비교식(R2))은 앞 단계에서 검증된 비교식(T1)과 비교식(R1)의 절대운동 결과를 이용하여 좌표 변환을 수행하면 피급유기의 상대운동 결과를 얻을 수 있으므로, 이를 통해 비교식

(R2)의 상대운동 방정식 시뮬레이션 결과를 비교하여 검증한다.

Table 2. Definition of Comparison Equations

구분	정의	사용식
기준식(A)	대상 비행체의 검증된 6자유도 운동 방정식	In-house Code
비교식(T1)	관성좌표계에 대하여 급유기의 동체좌표계에서 기술된 절대운동 방정식	Eq.(30),(31), (32),(34)
비교식(R1)	관성좌표계에 대하여 피급유기의 동체좌표계에서 기술된 피급유기의 절대운동 방정식	Eq.(30),(31), (32),(34)
비교식(R2)	급유기의 동체좌표계에 대하여 피급유기의 동체좌표계로 기술된 상대운동 방정식	Eq.(12),(17), (19),(28)

위 검증은 MATLAB/SIMULINK를 이용하여 급유기 및 피급유기가 동일한 비행 조건(고도 914m, 플랩각 -12도)일 때 같은 속도(140kph)인 경우(Case1)와 서로 다른 속도(급유기=180kph, 피급유기 속도=140kph)인 경우(Case2)로 나누어 수행하였다.

5.3. 시뮬레이션 결과 및 해석

Case1과 2의 급유기 및 피급유기의 절대운동 방정식의 검증은 기준식(A)와 비교를 통하여 수행되었고, Table 3 ~ 5의 트림 결과 값이 모두 기준식과 동일하였다.

Table 3. Case1의 비교식 상태변수 트림 결과 비교

Case1 (T1=R1)	Tanker(T1)		Receiver(R1)		Relative(R2)	
	Case1	Trim Results	Case1	Trim Results	Case1	Trim Results
V_i (kph)	140	140	140	140	140	140
β (deg)	0	0	0	0	0	-0.0001
α (deg)	5.7161	5.7161	5.7161	5.7161	5.7161	5.7161
p (rad/s)	0	0	0	0	0	0
q (rad/s)	0	0	0	0	0	-0
r (rad/s)	0	0	0	0	0	-0
ϕ (deg)	0	-0.0001	0	-0.0001	0	-0
θ (deg)	5.7161	5.7161	5.7161	5.7161	5.7161	0
ψ (deg)	0	0	0	-0	0	0
x (m)	0	0	-18.288	-18.288	-18.288	0
y (m)	0	0	-21.336	-21.336	-21.336	-0
H (m)	914	914	914	914	0	1.821

Table 3과 4는 급유기와 피급유기가 모두 140kph의 속도일 경우, 절대운동 방정식을 적용해 구한 트림 결과 값(비교식T1, 비교식R1)과 상대운동방정식으로 구한 결과(비교식R2)를 비교한

것이다. 비교식(T1)과 비교식(R1)은 서로 초기 위치를 제외한 모든 상태 변수들이 같고, 비교식(R2)는 비교식(R1)과 (T1)의 차이로 나타남을 알 수 있다.

Table 4. Case1의 비교식 조종면 트림 결과 비교

Case1 (T1=R1)	Tanker(T1)		Receiver(R1)		Relative(R2)	
	Case1	Trim Results	Case1	Trim Results	Case1	Trim Results
$\delta_e(\text{deg})$	-1.8412	-1.8412	-1.8412	-1.8412	-1.8412	-0.0321
$\delta_a(\text{deg})$	0	-0	0	-0	0	0
$\delta_r(\text{deg})$	0	-0	0	-0	0	0
$\delta_p(0\sim 1)$	0.31635	0.31636	0.31635	0.31636	0.31635	0.31635

Table 5와 6은 Case2의 결과로 급유기의 속도가 180kph, 피급유기의 속도가 140kph인 경우를 고려하였다. 급유기와 피급유기의 속도가 다른 경우에도 유도된 상대운동방정식의 비교식(R2)는 비교식(R1)과 비교식(T1)의 차이와 같으므로 상대운동이 반영되었음을 확인할 수 있다.

Table 5. Case2의 비교식 상태 변수 트림 결과 비교

Case2 (T1≠R1)	Tanker(T1)		Receiver(R1)		Relative(R2)	
	Case2	Trim Results	Case1	Trim Results	Case1	Trim Results
$V_i(\text{kph})$	180	180	140	140	140	140
$\beta(\text{deg})$	0	0	0	0	0	-0
$\alpha(\text{deg})$	2.3496	2.3496	5.7162	5.7162	5.7161	5.7161
$p(\text{rad/s})$	0	0	0	0	0	0
$q(\text{rad/s})$	0	0	0	0	0	-0
$r(\text{rad/s})$	0	0	0	0	0	0
$\phi(\text{deg})$	0	0	0	0	0	-0
$\theta(\text{deg})$	2.3496	2.3496	5.7162	5.7162	5.71616	3.3666
$\psi(\text{deg})$	0	-0	0	-0	0	0.
$x(\text{m})$	0	0	-18.288	-18.288	-18.288	0
$y(\text{m})$	0	0	-21.336	-21.336	-21.336	-0
$H(\text{m})$	914	914	914	914	0	0.750

Table 6. Case2의 비교식 조종면 트림 결과 비교

Case2 (T1≠R1)	Tanker(T1)		Receiver(R1)		Relative(R2)	
	Case2	Trim Results	Case1	Trim Results	Case1	Trim Results
$\delta_e(\text{deg})$	-0.5181	-0.5181	-1.8412	-1.8412	-0.0319	-0.006
$\delta_a(\text{deg})$	0	0	0	-0	0	0
$\delta_r(\text{deg})$	0	0	0	-0	0	0
$\delta_p(0\sim 1)$	0.4286	0.4286	0.3163	0.3163	0.4414	0.4412

5.3.1 트림 및 시뮬레이션 결과 (Case1)

Figure 7은 Case1의 비행조건에서 관성좌표계에 대한 급유기와 피급유기 절대운동 방정식(비교식T1, R1)의 트림결과를 초기 값으로 지정하여 시뮬레이션 한 결과이며 지정된 비행속도 및 고

도가 동일하기 때문에 급유기와 피급유기의 결과가 서로 같음을 확인할 수 있고, 각 비행 상태 시간변화가 없기 때문에 트림결과도 정상적임을 확인할 수 있다. Figure 8은 Case1의 경우, 피급유기와 급유기의 관성좌표계 기준의 절대운동방정식의 차이(T1-R1)와 급유기의 동체 좌표계에 대하여 피급유기의 동체 좌표계에서 구한 상대운동방정식의 결과 값(R2) 비교결과로서, 절대운동방정식에서 구한 결과를 좌표변환을 통하여 상대운동 방정식의 결과와 비교하였다. 예를 들면, 피급유의 상대운동 각속도는 식 (27)을 통해 절대운동 각속도 결과로부터 구할 수 있다. 따라서 시뮬레이션 결과로부터 상대운동 방정식의 검증하고자 했던 비교식(R2)의 결과와 절대운동 방정식인 비교식(R1)과 비교식(T1)의 차이로부터 구한 상대운동 결과가 동일하므로 유도된 상대운동 방정식이 유효함을 확인할 수 있다.

5.3.2 조종입력시의 시뮬레이션 결과

(Case1 : Tanker=Receiver=140kph)

Case1의 비행조건에서 급유기의 에일러론에 단일 입력(3deg@5sec, -3deg@7sec)을 주었을 때 결과는 Fig. 9와 Fig. 10에 나타내었는데, 조종 입력에 의한 비교식(T1)과 비교식(R1)의 차이를 볼 수 있다. 입력에 관계없이 비교식(T1)과 비교식(R1)의 차이는 비교식(R2)과 같다.

5.3.3 조종입력시의 시뮬레이션 결과

(Case2 :Tanker=180kph, Receiver=140kph)

Case2에서는 급유기와 피급유기의 속도가 서로 다른 경우로, 급유기는 엘리베이터 조종입력(3deg@5sec, -3deg@7sec)과 피급유기의 러더 입력(-3deg@8sec, 3deg@10sec)을 동시에 주었을 때의 결과이다. 급유기와 피급유기의 절대운동 방정식인 비교식(T1)과 비교식(R1)의 시뮬레이션 결과는 Figure 11에 나타내었으며, Figure 11의 절대운동 결과차이(T1-R1)를 적절한 좌표변환을 통해 피급유기의 상대운동 결과로 변환할 수 있다. 이 결과와 피급유기의 동체 좌표계에서 구한 상대운동방정식의 결과 값(R2)을 비교하면, Figure 12에서 보여진 바와 같이 비교식(T1)과 비교식(R1)의 결과는 입력 차이에 의해 다르지만 두 비교식의 차이와 상대운동방정식인 비교식(R2)의 시뮬레이션 결과는 서로 동일함을 확인할 수 있어 유도된 상대운동 방정식이 서로 다른 비행속도에서 각기 다른 조종입력이 가해지는 경우도 유효함을 확인할 수 있다.

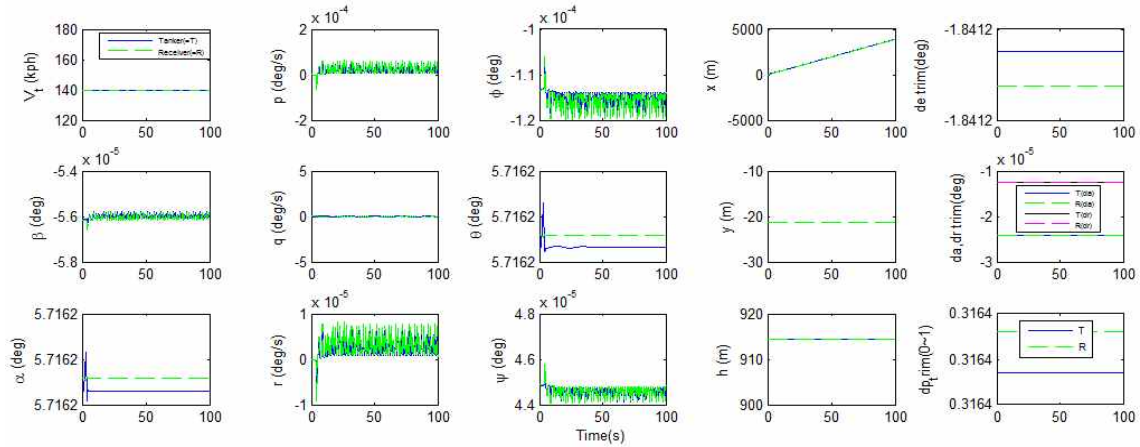


Fig. 6. Tanker(T1) and receiver(R1) trim results of absolute dynamics (Case1)

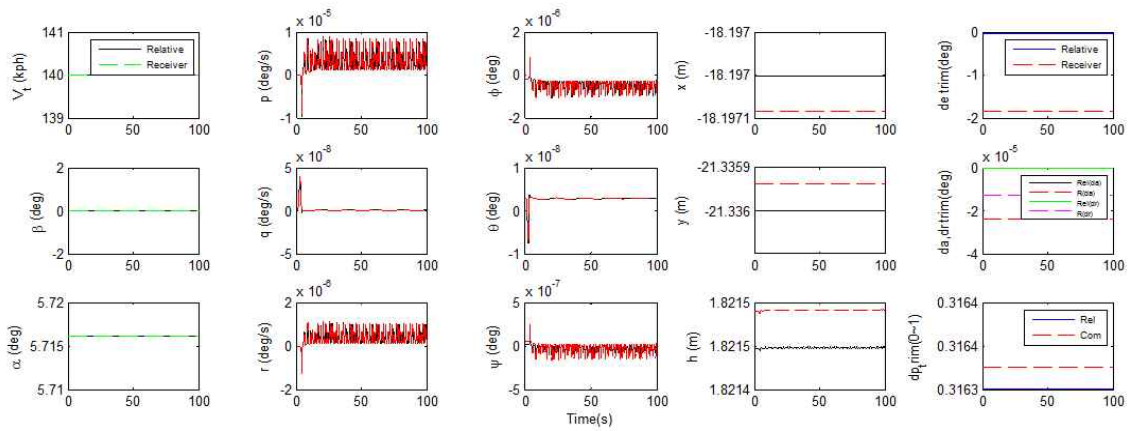


Fig. 7. Comparison of Relative(R2) and Absolute(R1-T1) Trim result (Case1)

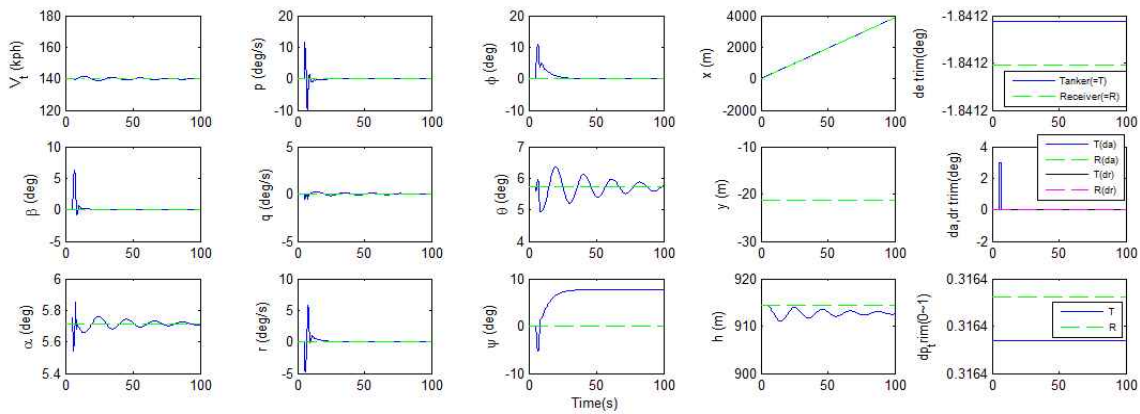


Fig. 8. Tanker(T1) and receiver(R1) results of absolute dynamics (Case1, Aileron Input)

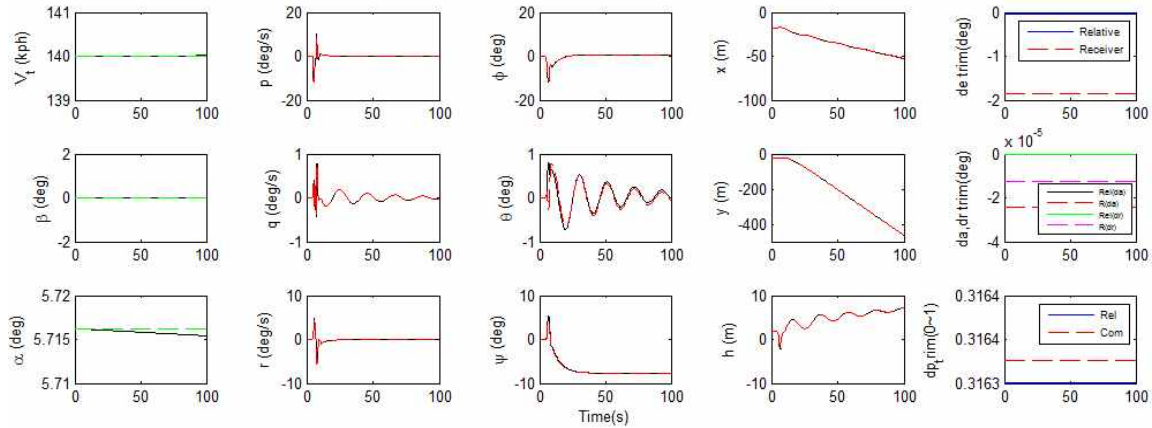


Fig. 9. Comparison of Relative(R2) and Absolute(R1-T1) (Case1, Rudder Input)

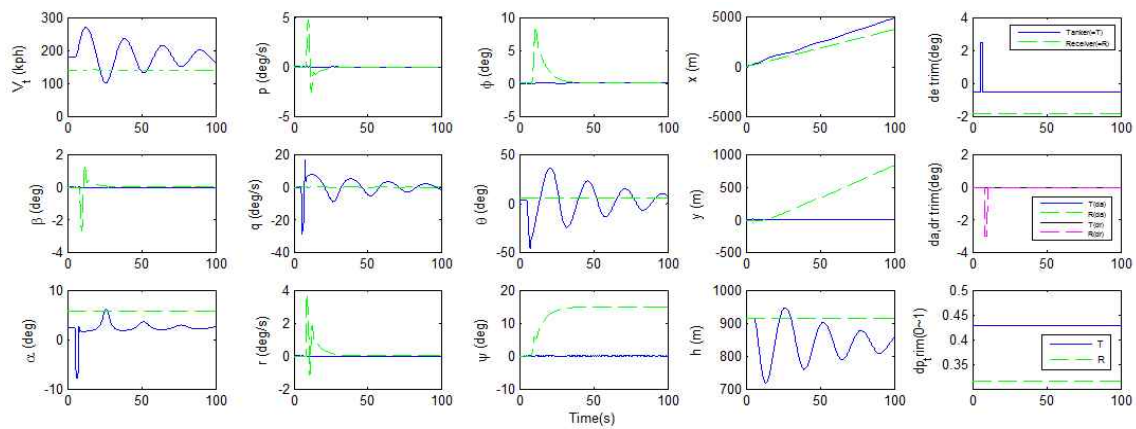


Fig. 10. Tanker(T1) and receiver(R1) results of absolute dynamics (Case2, Elevator + Rudder Input)

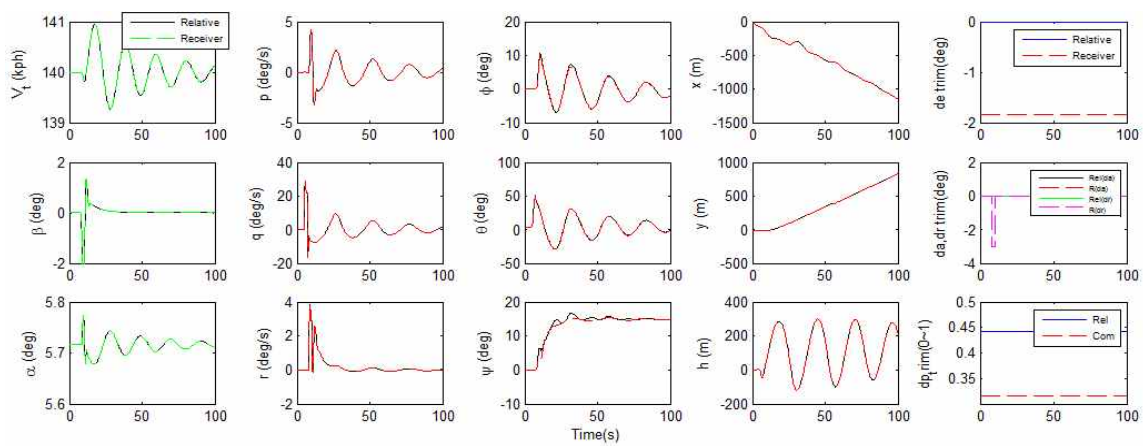


Fig. 11. Comparison of Relative(R2) and Absolute(R1-T1) (Case2, Elevator + Rudder Input)

3. 결 론

본 논문에서는 공중재급유를 위한 상대운동 방정식과 절대운동 방정식을 유도하고, 시뮬레이션을 통해 유도된 식의 검증 및 상대운동의 반영 여부를 확인하였다. 운동방정식 유도를 위해 관성좌표계를 비롯한 기체의 동체좌표계와 바람좌표계를 정의하고 각 좌표계사이의 좌표변환 관계를 기술하였으며, 피급유기의 상대운동 방정식을 유도한 후 상대운동 방정식에서 파생된 절대운동 방정식을 유도하였다. MATLAB/SIMULINK를 이용하여 피급유기와 급유기의 상대운동 및 절대운동 방정식을 구현하고, 검증된 대상 비행체의 6-자유도 운동 모델을 이용하여 급유기와 피급유기의 절대운동 방정식을 검증한 후 동일한 속도와 트림조건에서 상대운동 결과와 동일함을 확인하였다. 또한 급유기와 피급유기가 서로 다른 속도와 조종입력 조건에도 상대운동의 차이가 반영되었음을 검증하였다. 추후 연구로 검증되어진 피급유기의 상대운동 방정식을 적용하여 급유기의 위치 추적(position tracking)을 위한 제어기 연구를 수행할 계획이다.

참고문헌

- [1] Mao, W., Eke, F.O., "A survey of the Dynamics and Control of Aircraft During Aerial Refueling", *Nonlinear Dynamics and System Theory*, 2008
- [2] Nalepka, J., Hinchman, J., "Automated Aerial Refueling: Extending the Effectiveness of Unmanned Air Vehicles", *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*, California, Aug 2005
- [3] Waishek, J., "Derivation of the dynamics equations for receiver aircraft in aerial refueling", *M.S thesis, The University of Texas at Arlington*, Arlington, Dec 2007
- [4] Kim, E., Dogan, A., Blake, W., "Control of a Receiver Aircraft Relative to the Tanker in Racetrack Maneuver", *AIAA Guidance Navigation and Control Conference and Exhibit*, Keystone, Colorado, Aug 2006
- [5] Venkataramanan, S., Dogan, A., "Dynamic Effects of Trailing Vortex with Turbulence & Time-varying Inertia in Aerial Refueling", *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*, Rhode Island, Aug 2004
- [6] Tucker, J., Dogan, A., "Derivation of the Dynamics Equations of Receiver Aircraft in Aerial Refueling", *AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada, Jan 2007
- [7] Dogan, A., Sato, S., "Flight Control and Simulation for Aerial Refueling", *AIAA Guidance Navigation and Control Conference and Exhibit*, San Francisco, California, Aug 2005