

## 관성모멘트 측정에서의 불확도 추정기법 연구

### Study on the Estimation of Measurement Uncertainty in MOI Measurement

김 광 로\*

Kwang-Ro Kim

이 영 신\*\*

Young-Shin Lee

#### ABSTRACT

In this paper, using the mass/CG measurement equipment and the MOI measurement equipment developed in-house, Pitch MOI and Roll MOI of test specimen were measured and measurement uncertainties on MOI were studied. The possible factors of the measurement uncertainty that could affect accuracy of MOI measurement were mass, spring, frequency, and length measurement-related elements. The each combined standard uncertainty of pitch MOI and roll MOI was estimated from the uncertainties of the above various factors.

Keywords : Moment of Inertia(관성모멘트), Measurement Uncertainty(측정불확도), Pitch(피치), Roll(롤)

#### 1. 서론

관성모멘트는 물체가 자신의 회전운동을 유지하려는 정도를 나타내는 물리량으로서, 직선 운동에서의 질량에 대응되는 양이다. 관성모멘트는 회전운동에서 매우 중요한 역할을 차지하는데, 관성모멘트를 통해서 회전운동을 기술하는데 필요한 각운동량, 각속도, 각가속도, 회전 힘들 사이의 관계를 이어주는 물리량이기 때문이다. 질량은 물체의 본질적인 특성으로 물체의 형상 혹은 방향을 바꿔도 질량의 변화는 없지만, 관성모멘트(MOI)는 회전축의 위치뿐만 아니라 물체의 질량과 형상 모두에 좌우된다.

무인항공기를 포함한 항공기, 미사일 등 비행체의 성능을 예측하고, 설계, 제작을 위해서는 관성모멘트의 직접적인 측정 혹은 이론적인 계산이 필요하다. 하지만 복잡한 형상을 갖는 비행체의 관성모멘트를 이론적으로 계산하는 방법들은 충분한 정확도를 주지 못하고 이론적인 계산의 정확도 확인을 위해서도, 관성모멘트의 직접적인 측정이 지상시험에서 이루어져야 한다. 다양한 시험방법들 중에 knife edges 혹은 베어링을 이용하여 비행체를 마운트 시키고, 스프링으로 진동시키는 기법이 상대적으로 간단하고, 피치와 롤 관성의 측정에 좋은 결과를 주는 것으로 알려져 있다.

그런데 모든 측정값에는 오차가 존재하기 때문에 이러한 측정을 함에 있어 오차로 인한 측정불확도를 평가하지 않고서는 측정의 참값을 가늠할 수 없다. 1993년 국제표준화기구(ISO)가 대부분의 측정에 적용할 수 있는 측정불확도의 평가와 표현을 위한 “측정 불확도 표현 지침서”(GUM)<sup>[1]</sup>을 발행한 이후로, 이 지침서에

† 2013년 9월 9일 접수~2013년 11월 15일 게재승인

\* 국방과학연구소(ADD)

\*\* 충남대학교(Chungnam National University)

책임저자 : 이영신(leey@s@gnu.ac.kr)

따라 측정불확도를 구하고 표현하는 방법이 전 세계적으로 많은 분야에서 사용되고 있다<sup>[2]</sup>. 본 논문에서는 자체 개발한 질량/CG 측정 장비와 관성모멘트 측정 장비를 이용하여, 시험체의 피치 관성모멘트와 롤 관성모멘트 각각을 측정하였고, 이에 대한 측정불확도 추정방법을 연구하였다. 질량, 스프링상수, 진동 주파수, 길이 측정에 관련된 측정불확도 요인들이 관성모멘트 측정결과에 영향을 미칠 수 있는 불확도 요인들로 식별되었고, 피치 관성모멘트와 롤 관성모멘트 각각에 대한 합성불확도 그리고 확장불확도가 이러한 다양한 불확도 요인들로부터 산출되었다.

## 2. 측정 과정

### 가. 질량 측정 및 모델식

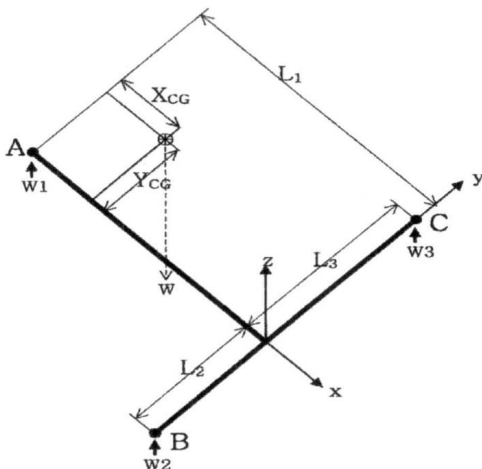
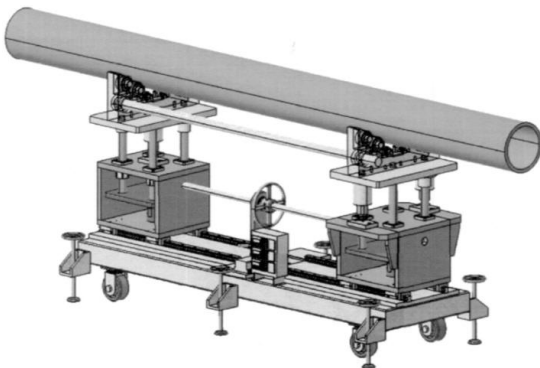


Fig. 1. (a) Mass/CG measurement equipment  
(b) its principle

본 장비는 비행체 및 기타 구조물의 질량 및 CG를 측정하기 위한 것으로 3개의 로드셀(Load Cell)을 1차 평면 내에 위치시켜서 측정 구조물의 질량 및 CG를 측정한다. 1차 평면에서 질량특성 값을 측정한 후, 구조물을 90° 회전시켜 1차 평면과 수직인 2차 평면에서 질량특성을 측정함으로써 3차원 CG 값을 도출할 수 있다. 측정원리는 동일 평면상에 수직으로 위치한 3개의 로드셀에서 중량 값과 각 로드셀 간의 위치 데이터를 획득하고 아래의 계산식을 이용하여 CG를 측정한다.

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$X_{CG} = (W_2 + W_3) \times L_1 / W \quad (1)$$

$$Y_{CG} = (W_3 - W_2) \times (L_2 + L_3) / 2W$$

### 나. 관성모멘트 측정 및 모델식

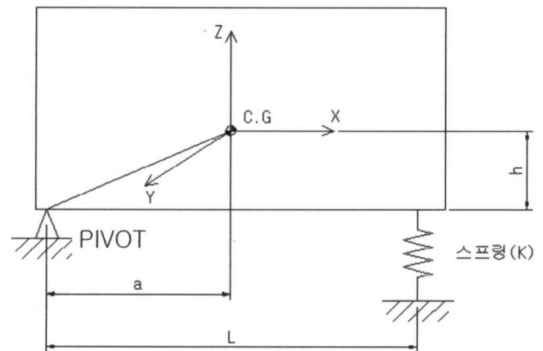
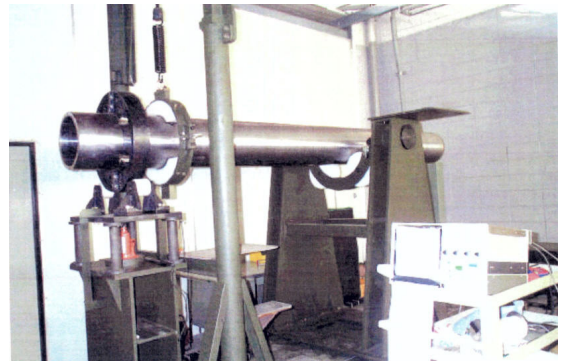


Fig. 2. (a) Pitch MOI measurement equipment  
(b) its principle

본 장비는 구조물의 피치(Pitch) 및 요우(Yaw) 관성모멘트 값을 측정하기 위한 장비로 구조물을 장비에

수평으로 올려놓고 즉, 구조물의 한쪽은 힌지로 고정시키고, 다른 한쪽은 스프링을 연결시켜 베어링 피봇을 중심으로 진동하도록 일정 초기 변위를 주어 주파수카운터를 통하여 최종 주파수를 측정된 후 식 (2)를 이용하여 MOI를 계산한다.

$$I_{yy} = \left(\frac{1}{2\pi f}\right)^2(KL^2 - Wh) - \frac{W}{g}(h^2 + a^2) \quad (2)$$

여기서,  $f$ : 주파수,  $W$ : 구조물 무게,  
 $K$ : 스프링상수

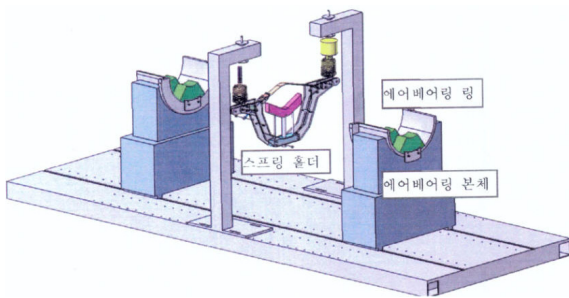


Fig. 3. Roll MOI measurement equipment

본 장비는 구조물의 롤 관성능률을 측정하는 장비로 구조물을 2개의 공기베어링 사이에 올려놓고 구조물 축을 회전축으로 하여 회전진동을 시키면 구조물의 원주방향 양쪽에 연결된 코일 스프링에 의하여 일정한 주기로 진동을 하게 된다. 이 진동 주파수를 계측장비로 측정하여 관성능률을 구한다.

$$I_{Roll} = \left[\frac{1}{2\pi f}\right]^2 KL^2 \quad (3)$$

여기서,  $f$ : 주파수,  $L$ : 스프링사이의 반 길이,  
 $K = K_1 + K_2$ ,  $K_1, K_2$ : 스프링상수

다. 측정 시스템 구성

- 스프링 : 스프링 하중-변위 그래프의 초기 하중 구간은 비선형이고, 스프링의 탄성변형 용량 범위 내에는 선형구간이 일정범위 존재한다. 이 선형구간의 중간점이 스프링에 걸리는 초기 하중과 부합되게 스프링을 설계/제작하고, MTS 장비를 이용하여 제작된 스프링의 스프링 상수를 측정하여 MOI 측정에 적용하였다.

- 로드셀 : 로드셀은 MOI 측정 시 스프링의 진동하중을 전기적 신호로 바꾸어 인디케이터에 전달하는 기능을 한다.
- 인디케이터 : P-3500 스트레인 인디케이터
- 주파수카운터 : 주파수카운터는 인디케이터에서 받은 신호를 주파수로 변화시키는 기능을 가진다. 주파수 분해능은 1초에 1회 12자리 수의 주파수 디스플레이 성능을 가진다.
- PC : 수학적 모델을 이용하여 관성모멘트를 계산

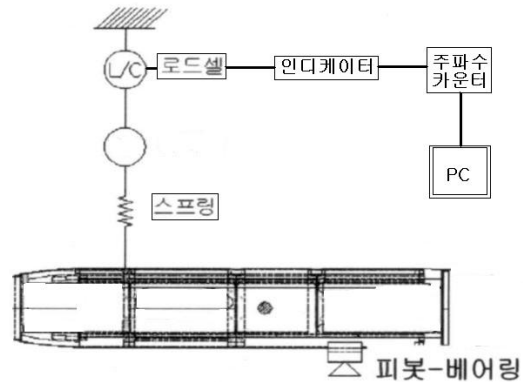


Fig. 4. Measurement configuration

3. 측정불확도 추정절차 및 요인분석

가. 측정불확도 추정 절차

측정불확도의 공식적인 정의<sup>[2]</sup>는 “측정결과와 관련하여, 측정량을 합리적으로 추정된 값의 산포특성을 나타내는 파라미터”로, 측정불확도는 일반적으로 여러 성분으로 구성되어 있으며, 크게 두 범주로 나눌 수 있다. 한 범주(A형 불확도)는 여러 번 측정된 결과의 통계적인 분포로부터 값이 결정되는 것으로서 시험표준편차로 나타낼 수 있고, 다른 범주(B형 불확도)는 마찬가지로 표준편차로 나타낼 수 있지만 경험이나 다른 정보에 근거하여 가정한 확률분포로부터 그 값이 결정된다. 측정결과가 여러 개의 다른 입력량의 함수로서 구해질 때, 이 측정결과와 표준불확도를 합성표준불확도라고 정의하며 합성표준불확도에 포함인자 k를 곱하여 확장불확도를 산출한다. 확장불확도의 의미는 측정량의 합리적인 추정값이 이루는 분포의 대부분을 포함할 것으로 기대되는 측정결과 주위의 구간을 정의하는 양이다. Fig. 5는 측정불확도를 추정하는 절차이다.

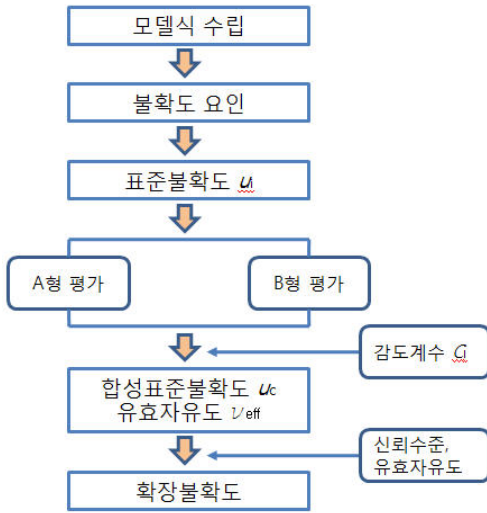


Fig. 5. Procedure for measurement uncertainty estimation

나. 중량 및 CG 측정관련 불확도

Fig. 1과 같이 3개의 로드셀을 이용하여 중량측정이 이루어지며, 이 과정에서 고려되는 불확도 요인은 각각의 로드셀의 교정성적서에 의한 B형 불확도 그리고 10회의 반복 측정값들에 대한 샘플링에 의한 A형 불확도가 고려되었다. CG 측정에는 여러 개의 입력량이 함수에 들어가며 불확도는 모델 식 (1)을 통한 감도계수를 이용하여 산출하였다.

$$u(X_{CG}) = \sqrt{C_{W_2}^2 u^2(W_2) + C_{W_3}^2 u^2(W_3) + C_W^2 u^2(W) + C_L^2 u^2(L)}$$

여기서,  $C_i = \frac{\partial X_{CG}}{\partial X_i}$ 는 감도계수이고,

$u_i$ 는 각 입력량의 표준불확도

다. 스프링상수 측정관련 불확도

합동분산( $S_p$ )의 적용은 유사한 조건으로 수행된 여러 번의 측정 샘플들 사이에서 평균값은 변할 수 있지만 분산(정밀도)은 동일하게 유지되는 것으로 가정되는 환경 하에서 분산을 평가하는 방법으로, 아래와 같이 합동분산에 제공근을 취하여 합동시험표준편차를 구한다.

$$s_p = \sqrt{\sum_{i=1}^m \nu_i s_i^2 / \sum_{i=1}^m \nu_i}$$

관성모멘트에 사용되는 스프링상수의 측정은 MTS 재료시험기를 이용하여 스프링의 하중-변위 선도를 10번 반복하여 측정하였고, 합동시험표준편차(Pooled SD)를 이용하여 최종 스프링상수와 A형 표준불확도를 산출하였다.

라. 주파수 측정관련 불확도

피치와 롤 관성모멘트 계산식에 들어가는 주파수를 측정하기 위해서는 로드셀과 인디케이터에서 주파수카운터로 들어오는 전기적 신호를 이용하여 30번의 주파수를 계산하는 일련의 과정을 11번에 걸쳐 반복측정을 실시하였다. 우선, 로드셀과 인디케이터 출력 값이 주파수카운터의 입력 값으로 들어가는데 여기서 사용되는 로드셀/인디케이터의 역할은 하중 값을 측정하는 것이 아니라 진동 하중에 의한 전기적 신호의 변동을 통하여 주파수를 측정하는 것이므로 인디케이터 값의 분해능만을 불확도 요인으로 고려할 할 수 있다. 이때 불확도 값은 아주 미미한 값을 준다. 그다음, 주파수 카운터 자체의 분해능은 1초에 12자리수의 주파수 디스플레이 분해능을 가지고 이것을 B형 불확도로 고려하였을 때 표준불확도 값은 거의 제로의 값을 갖는다. 주파수의 반복측정을 통한 불확도는 합동시험표준편차(Pooled SD)를 이용하여 최종 주파수와 A형 표준불확도를 산출하였다.

마. 피치 관성모멘트 측정관련 불확도

피치 관성모멘트에 대한 불확도  $u(I_{yy})$  계산은 불확도 계산식에 들어가는 입력량들이 별도의 분리된 측정과정들을 통하여 산출되므로 상관관계가 없는 입력량에 대한 합성표준불확도 계산식을 이용하여 산출하였다.

$$u(I_{yy}) = \sqrt{[c_f u_f]^2 + [c_K u_K]^2 + [c_W u_W]^2 + [c_L u_L]^2 + [c_h u_h]^2 + [c_a u_a]^2}$$

여기서,  $c_i = \frac{\partial I_{yy}}{\partial x_i}$ 로 감도계수이고,

$u_i$ 는 각 입력량의 표준불확도

바. 롤 관성모멘트 측정관련 불확도

롤 관성모멘트에 대한 불확도의 경우에도 불확도 계산식에 들어가는 입력량들이 별도의 분리된 측정과정들을 통하여 산출되므로, 상관관계가 없는 입력량에 대한 합성표준불확도를 이용하여 산출하였다.

$$u(I_{Roll}) = \sqrt{[c_f u_f]^2 + [c_K u_K]^2 + [c_L u_L]^2}$$

여기서,  $c_i = \frac{\partial I_{roll}}{\partial x_i}$ 로 감도계수이고,

$u_i$ 는 각 입력량의 표준불확도

#### 4. 불확도 산출 및 결과검토

##### 가. 표준불확도 산출

3장의 불확도요인들을 고려하여 계산한 피치 MOI 총괄표가 Table 1에 기술되어 있다. 계산된 피치 관성모멘트에 대한 합성표준불확도는 0.7232(kg·m<sup>2</sup>)이고, 각 불확도 성분들을 불확도 기여량 측면에서 비교해보면 제일 크게 불확도에 기여하는 성분은 피봇을 중심으로 시험체의 진동수 측정 성분이다. 두 번째는 진동수 측정에 사용되는 스프링상수의 측정, 세 번째는 스프링위치와 힌지위치사이의 거리 측정과정에서 나타난다. 나머지 성분들은 제일 큰 값에 비해 1/3이하로 무시할 수 있는 수준의 기여도를 보여주고 있다.

Table 1. Pitch MOI evaluation summary

불확도 성분	표준 불확도 $u(x_i)$	감도계수 $c_i$	불확도 기여량 $ c_i u(x_i)$	기여량 배율	자유도
$u(W)$	0.0640	-0.14462	0.009262	1.0	9
$u_A(W)$	0.0525				
$u_{B, Cal}(W)$	0.0367				
$u_A(K)$	10.3525	0.03851	0.398702	43.0	9
$u_A(f)$	0.0014	-431.1831	0.589676	63.7	330
$u_B(L)$	0.0006	349.68747	0.201892	21.8	$\infty$
$u_B(a)$	0.0004	-170.1686	0.069843	7.5	$\infty$
$u_c(MoI)$	<b>0.7232</b>				

Table 2의 롤 관성모멘트에 대한 합성표준불확도는 0.0057(kg·m<sup>2</sup>)이고, 각 불확도 성분들을 불확도 기여량으로 비교해보면 제일 크게 기여하는 것은 스프링사이의 거리 측정에 대한 불확도성분으로 스프링상수의 측정 불확도 기여량과 진동수 불확도측정 기여량보다 크

게 나타난다. 이것은 얼핏 보면 피치 관성모멘트 불확도 분석과 차이가 있어 보이는 결과이지만 자세히 살펴보면 피치 관성모멘트 측정시의 주파수 측정보다 더 정확한 주파수에 대한 반복측정이 이루어 졌음을 의미한다. 이것은 공압을 이용하여 기체를 부양시킨 상태에서 롤 관성모멘트를 측정함으로써, 롤 운동 시에 시험편에 가해지는 마찰력을 줄인 효과로 여겨진다.

Table 2. Roll MOI evaluation summary

불확도 성분	표준 불확도 $u(x_i)$	감도계수 $c_i$	불확도 기여량 $ c_i u(x_i)$	기여량 배율	자유도
$u_A(K)$	0.5151	0.00345	0.001779	1.0	9
$u_A(f)$	0.0006	-3.28084	0.001842	1.1	330
$u_B(L)$	0.0006	8.88498	0.005129	2.9	$\infty$
$u_c(MoI)$	<b>0.0057</b>				

##### 나. 확장불확도 산출 및 보고

측정량의 합리적인 추정값이 이루는 분포의 대부분을 포함할 것으로 기대되는 구간을 정의하기 위한 확장불확도는 아래식과 같이 결정한다.

$$U = k \cdot u_c(y)$$

여기서,  $U$  : 확장불확도,  $k$  : 포함인자

포함인자  $k$ 를 산출하기 위해서는 합성표준불확도의 유효자유도를 추정해야 하며, 유효자유도는 아래와 같은 Welch-Satterthwate식을 이용하여 추정한다.

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{[c_i u(x_i)]^4}{\nu_i}}$$

여기서,  $\nu_{eff}$  : 유효자유도,

$\nu_i$  :  $u(x_i)$ 의 자유도

입력변수의 자유도는 A형 평가로 불확도를 추정하였을 경우는 표본 집단의 자유도가 되고, B형 평가로 불확도를 추정하였을 경우는 아래의 식으로 구한다.

$$\nu_i \approx \frac{1}{2} \frac{u(x_i)^2}{\sigma(u(x_i))^2} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right]^{-2} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{100}{R} \right)^2$$

여기서,  $R = 0 : 100\%$  확신의 경우

위에 식들을 이용하여 유효자유도를 구하면, 피치 합성표준분확도의 유효자유도는 96이고, 롤 합성표준분확도의 유효자유도는 94이다. 일반적으로 유효자유도가 11이상인 경우 신뢰수준 약 95%,  $k = 2$ 을 사용한다.

피치와 롤 각각의 합성표준분확도는

$$U_{pitch} = k \cdot u_c(Pitch MoI) = 2 \cdot 0.7432 = 1.4865$$

$$(\nu_{eff} = 96)$$

$$U_{Roll} = k \cdot u_c(Roll MoI) = 2 \cdot 0.0057 = 0.0115$$

$$(\nu_{eff} = 941)$$

최종 불확도 보고 값은 아래와 같다.

$$\therefore Pitch MoI = (1852.5661 \pm 1.4865) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$(k = 2, \text{ 약 } 95\%)$$

$$\therefore Roll MoI = ( 14.9555 \pm 0.0115) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$(k = 2, \text{ 약 } 95\%)$$

## 5. 결론

최종 산출된 불확도 보고값에서 확인된 바와 같이 본 장비를 통하여 매우 정확한 관성모멘트를 구할 수 있음을 확인하였다. 또한 측정불확도 추정 과정을 통하여 산출된 불확도기여량들을 비교해봄으로써, 관성모멘트 측정과정에서 발생하는 불확도 성분들의 상대적인 중요성을 구분할 수 있었다. 본 장비의 피치 관성모멘트 측정의 경우 주파수 측정과정이 불확도에 가

장 영향을 많이 미치고, 스프링상수 측정과정, 힌지점과 스프링사이의 거리측정 순으로 불확도에 영향을 많이 주는 것을 알 수 있었다. 롤 관성모멘트 측정의 경우는 주파수에 대한 반복측정 값의 정확도가 매우 높았는데, 이것은 공압을 이용하여 기체를 부양시킨 상태에서 롤 관성모멘트를 측정함으로써, 롤 운동 시에 시험편에 가해지는 마찰력을 줄인 효과로 보인다.

## References

- [1] ISO, "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements", 1993
- [2] 한국고정시험기관인정기구, "측정결과의 불확도 추정 및 표현을 위한 지침", 2002.
- [3] 이진근 외, "고공환경 엔진시험의 신뢰성 평가를 위한 불확도 분석 및 분산 분석 기법의 적용", pp. 1185~1188, Proceedings of The Fourth National Congress on Fluids Engineering, 2006.
- [4] 이재정 외, "KOLAS 공인시험기관 인정을 위한 이더넷 스위치의 측정불확도 분석", 전자공학회지 제48권 제12호, pp. 871~878, 2011.
- [5] 이환필 외, "측정불확도를 적용한 차량검지기 속도측정 성능평가방법 개발", 한국도로학회지, 제14권 제2호, pp. 165~174, 2012.
- [6] KRISS, "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements", ISO/IEC Guide 98-3.
- [7] 방효충, "Modified Rodrigues Parameter 기반의 인공위성 관성모멘트 추정 연구", 한국항공우주학회지, 제38권 제3호, 2010. 3.
- [8] Rudra Gowda et al., "Techniques for Measurement of Centre of Gravity of & Moment of Inertia and Their Importance in Spacecraft Attitude Control", AdMet 2012 Paper No. RA 002.