

빔요소와 Rigid 링크를 이용한 수평하중에 대한 말뚝 거동 3차원 유한요소해석

3D Finite Element Analysis of Lateral Loaded Pile using Beam and Rigid Link

박두희¹ · 박종배² · 김상연³ · 박용부³

Du-Hee Park¹, Jong-Bae Park², Sang-Yeon Kim³ and Yong-Boo Park³

(Received June 21, 2013 / Revised July 27, 2013 / Accepted July 27, 2013)

요 약

수평하중을 받는 말뚝의 거동 예측에는 일반적으로 비선형 p-y 곡선을 이용한 BNWF(Beam on Nonlinear Winkler Foundation) 해석법이 주로 사용된다. BNWF 해석법은 다양한 사례를 통하여 정확성이 입증된 반면 군말뚝의 경우 p-multiplier를 사용해야 하는 단점을 가지고 있다. 이와 같은 단점은 유한요소 또는 차분법의 사용으로 해결할 수 있다. 이 방법 적용 시, 지반과 말뚝은 솔리드 요소로 모델링된다. 하지만, 말뚝을 솔리드 요소로 묘사하게 되면 회전 자유도가 없어 정확성이 감소하며 이를 극복하기 위해서는 요소의 크기를 현저하게 감소시켜야 하지만 3D 해석에서 요소 수의 증가는 막대한 연산시간이 요구되므로 적용에 문제가 있다. 본 연구에서는 이와 같은 단점을 극복하는 빔요소와 Rigid 링크를 이용한 말뚝 모델링 방법을 구축하였으며 이의 적용성을 현장시험결과와 BNWF의 비교를 통하여 검증하였다. 사용된 해석 프로그램은 지진공학용으로 개발된 OpenSees이다. 비교 결과, 빔요소와 Rigid 링크를 이용한 방법은 비교적 정확하게 현장시험결과와 일치하는 것을 확인하였다. 추후 이 방법은 군말뚝의 해석에 효과적으로 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

주제어 : 말뚝, 수평하중, 빔요소, Rigid 링크, 유한요소해석

ABSTRACT

The BNWF (Beam on Nonlinear Winkler Foundation) model is one of the simplest idealizations for a pile embedded in soil as it ignores the continuity of the soil. This method is difficult to model the behavior of pile group foundation subjected to lateral loading. The limitation can be overcome with the utilization of the finite element method (FEM) or finite difference method (FDM) to represent a pile element embedded in a soil medium. Both the ground and piles are modeled with solid elements. The solid elements, which do not have rotational degree of freedom, is not appropriate for modeling piles. It can be overcome by substantially increasing the number of elements, which can be prohibitive for 3D modeling. This paper used the beam element and rigid link incorporated in the OpenSees to model the pile. The accuracy of the model is validated through comparison with lateral load test and BNWF analysis. It is shown that the method can capture the measured behavior accurately. It is therefore recommended to be used in group pile analyses.

Key words: Pile, Lateral Load, Beam Element, Rigid Link, Finite Element Analysis

1. 서 론

일반적으로 말뚝의 수평 거동은 p-y 곡선을 이용한 수치해석을 통해서 규명된다. 그러나, p-y 해석법은 말뚝 주변의 지반을 스프링으로 단순화함에 따라 지반의 연속성 등을 모델에 반영할 수 없으며, 흙의 비선형성을 정확하게 묘사하는데

어려움이 있다. 또한 이 방법은 군말뚝 시스템에는 적용되기 어려우며 특히 동적 해석에는 적합하지 않다. 말뚝의 수평 거동은 3차원 유한차분 또는 유한요소 해석을 통해서 모델링되는데 이때 말뚝은 일반적으로 지반과 동일한 3차원 솔리드 요소로 모델링한다. 3차원 솔리드 요소는 회전에 대한 자유도가 없으므로 말뚝의 동적 거동을 모델링하는데 문제가 있다.

1) 한양대학교 건설환경공학과 부교수(주저자: dpark@hanyang.ac.kr)

2) 한국토지주택공사 토지주택연구원 수석연구원(교신저자: jbpark@lh.or.kr)

3) 한국토지주택공사 토지주택연구원 수석연구원

본 연구에서는 빔요소와 Rigid 링크를 사용한 말뚝의 3차원 해석을 OpenSees를 이용하여 수행하였으며 그 적용성을 현장시험 시험 자료와 비교, 규명하였다.

을 적용할 수 있다.

이와 반대로 PDMY 모델은 구속압의 영향을 받아 거동이 달라지는 사질토 또는 실트질 지반에 사용할 수 있으며, 이는 Drucker-Prager 구성모델을 기본으로 다양한 크기의 항복면이

2. OpenSees를 이용한 말뚝 모델링

수평하중을 받는 3차원 말뚝을 모델링하기 위하여 OpenSees 유한요소해석 프로그램을 사용하였다. OpenSees 프로그램은 Pacific Earthquake Engineering Research Center(PEER)에서 지진해석을 위해 개발되었으며, 다양한 요소-모델-해석 툴 등이 구축되어 있으며 효율적인 연산엔진이 장착되어 빠르고 정확한 해석 프로그램이다. 본 연구에서는 OpenSees에 구축된 BNWF 해석법과 빔요소-Rigid 링크를 이용한 3차원 유한요소법을 이용하여 수평하중에 대한 말뚝의 응답을 계산하였다. 수치해석 세부사항은 아래에 정리하였다.

2.1 빔요소-Rigid 링크 해석법

그림 1과 2는 3차원 빔-솔리드 요소로 모사된 말뚝과 주변 지반의 유한요소모델을 나타낸다. 말뚝은 빔요소로 모델링하며 역학적 특성은 E(탄성계수), I(관성모멘트), A(면적)로 정의된다. 빔요소는 물리적 공간을 차지하지 않으므로 3차원 모델에서는 실제 말뚝의 공간이 비어 있으므로 주변 지반이 공간 내부로 밀고 들어오게 되어 해석을 수행할 수 없게 된다. 이와 같이 흙에 공동이 생기는 것을 방지하기 위해서 말뚝을 나타내는 빔요소와 주변 지반을 강성이 무한한 Rigid Link로 연결한다(그림 2). Rigid 링크는 두 요소간 자유도가 전달될 수 있는 기능을 하는데, 본 모델의 말뚝과 지반의 상호작용 해석에서는 회전에 대한 자유도는 빔요소에서 솔리드 요소로 전달되지 않고 변위의 자유도만 전달된다(그림 2). 즉, 지반 경계 요소는 말뚝의 변형에 순응하지만 모멘트까지 전달되지는 않는다. 본 연구에서는 말뚝은 탄성 빔요소로, 지반은 탄소성 모델을 적용한 솔리드 요소로 모델링하였다.

2.1.1 PIDMY 및 PDMY 구성모델

OpenSees 프로그램에서 지반을 모사할 수 있는 구성모델은 PIDMY(Pressure Independent Multi Yield) 모델과 PDMY(Pressure Dependent Multi Yield) 모델이 있다. 이들은 모두 유효응력 상태에서 계산이 이루어지며, 다양한 크기의 항복면들이 nested loop의 형태를 지니고 있어 흙의 경화 과정을 모사할 수 있는 장점이 있다. PIDMY 모델은 구속압의 영향을 거의 받지 않는 점토지반에 사용될 수 있으며, 그림 3과 같이 다양한 크기의 Von Mises 항복면들이 모여 이루어진 형태로 associated flow rule이 적용되어 그림 3(b)와 같은 Masing-type의 응력이력 곡선을 만들 수 있다. 표 1은 OpenSees에서 점토지반의 밀도에 따라 제안하는 입력 변수로서 PIDMY 모델

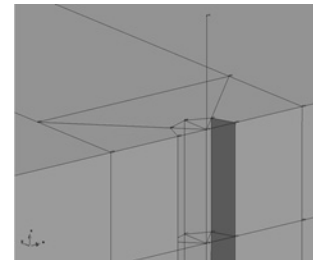
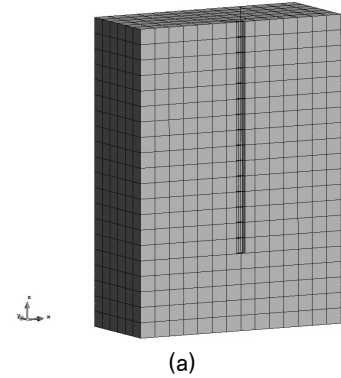


그림 1. 3차원 빔-솔리드 요소 모델링 (<http://gid.cimne.upc.es/>)

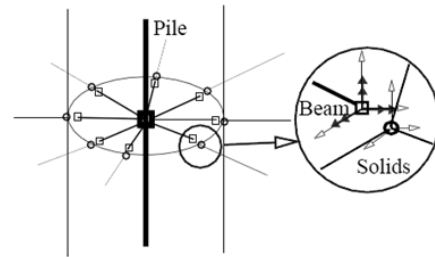
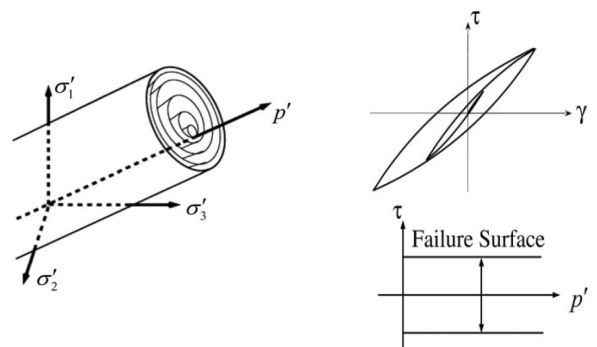


그림 2. 빔요소와 솔리드 요소의 연결 (Jeremic 등, 2002)



(a) Yield surface

(b) 구성 모델의 적용 방법

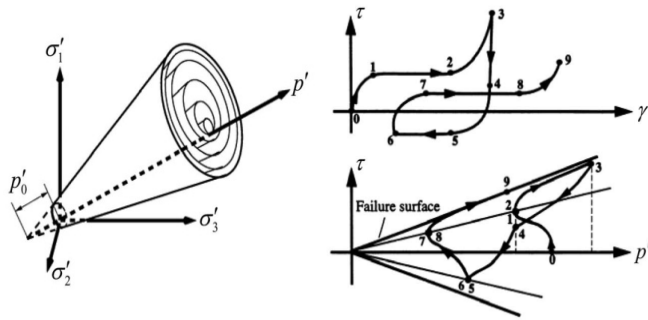
그림 3. PIDMY 모델 (Yang 등, 2008)

표 1. PIDMY 모델의 입력 Parameter (<http://opensees.berkeley.edu/>)

Parameters		Soft Clay	Medium Clay	Stiff Clay
ρ (kg/m^3)	Density	13	15	18
G_{max} (kPa)	Reference shear modulus	1.3×10^4	6.0×10^4	1.5×10^5
B_{max} (kPa)	Reference bulk modulus	6.5×10^4	3.0×10^5	7.5×10^5
c (kPa)	cohesion	18	37	75
γ_{max}	Peak shear strain	0.1	0.1	0.1
ϕ	Friction angle	0	0	0
N	Pressure dependent coefficient	0	0	0

표 2. PDMY 모델의 입력 Parameter (Chen 등, 2000)

ρ (kg/m^3)	Density	$2.11(D_r)^{0.1567}$
G_{max} (kPa)	Reference shear modulus	$G_r = 10500 \frac{(2.17-e)^2}{1+e} P_r^{0.4}$
B_{max} (kPa)	Reference bulk modulus	$B_r = G_r \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$
ϕ	Friction angle	$\phi = 16.2 D_r + 25$
ϕ_{PT}	Phase transformation angle	$\phi_{PT} = 16.2 D_r + 25$
P_r (kPa)	Reference pressure	Constant
γ_{max}	Peak shear strain	Constant
N	Pressure dependent coefficient	Constant
c	Contraction parameter	$c = 0.0288 D_r^{-1.4172}$
d_1	Dilation parameter 1	$d_1 = 1.147 D_r - 0.2454 \geq 0$
d_2	Dilation parameter 2	$d_2 = 6.9686 D_r - 1.7187 \geq 0$
l_1	Liquefaction parameter 1	$l_1 = 10 \quad (D_r < 65\%)$
l_2	Liquefaction parameter 2	$l_2 = -0.0154 \ln D_r - 0.0012$
l_3	Liquefaction parameter 3	$l_3 = 1 \quad (D_r \leq 85\%)$ $l_3 = 0 \quad (D_r > 85\%)$



(a) Yield surface (b) 구성 모델의 적용 방법
그림 4. PDMY 모델 (Yang 등, 2008)

층을 이루고 있어 흙의 체적팽창(dilatancy) 및 액상화 발생 등의 모사가 가능하다(그림 4). 입력 물성은 상대밀도에 따른 식으로 정의되며 이를 입력하여 모델을 적용할 수 있다(표 2).

2.2 BNWF(Beam on Nonlinear Winkler Foundation) 해석법

OpenSees 해석에서 지반과 말뚝 사이 p-y 곡선을 적용하기 위해서는 말뚝은 빔요소로, 지반은 Zero-Length 요소로 모델링해야 한다. Zero-Length 요소는 수평방향거동을 모사하는 p-y 스프링과 수직방향 거동을 모사하는 t-z 스프링 그리고 Q-z 스프링으로 구성된다(그림 5). 이 때, p-y 곡선은 수평방향을 나타내는 p-y 스프링에 적용되어 지반을 모사하게 된다.

OpenSees에서는 Matlock(1970)이 제안한 점토층 p-y곡선과 API(1993)에서 제안한 사질토층의 p-y 곡선식의 반영이 가능하며, 이를 적용하기 위해서는 물성에 극한수평지지력(P_u)과 극한지지력의 50%에 도달하였을 시의 지반변위(y₅₀)를 입력하여야 한다. 이를 입력하게 되면 앞서 설명된 BNWF 모델식을 기본으로 계산이 이루어져 각각의 p-y 곡선이 해석에 반영된다.

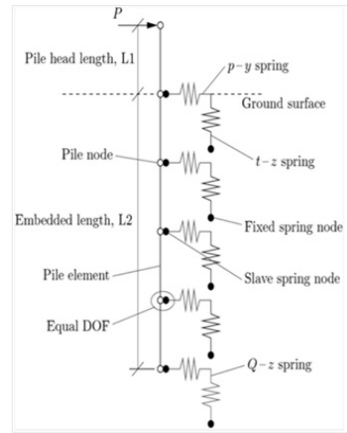


그림 5. OpenSees에 사용되는 해석 개요도 (<http://opensees.berkeley.edu/>)

2.2.1 연약점토층의 p-y 곡선

Matlock(1970)은 Texas Austin 지역의 연약한 점토층에 시공된 말뚝에 대한 여러 가지 현장재하시험을 수행하고 시험

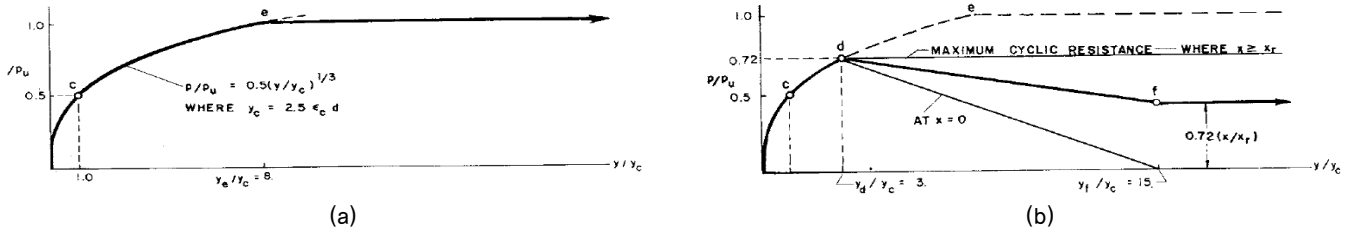


그림 6. 연약점토의 p-y 곡선 (Matlock, 1970)

표 3. 연약점토의 p-y 곡선 산정 방법

(a) Static loading

1. Compute ultimate soil resistance, P_u (using the smaller values)	$P_u = \left[3 + \frac{\gamma}{C_u} z + \frac{J}{D} z \right] C_u D$ $P_u = 9 C_u D$
2. Compute deflection at one-half the ultimate soil resistance, y_{50}	$y_{50} = 2.5 \epsilon_{50} D$
3. Develop p-y curve using the Following expression	$\frac{P}{P_{ult}} = 0.5 \left(\frac{y}{y_{50}} \right)^{1/3}$

(b) Cyclic Loading

1. Develop p-y curves	Construct p-y curves in the same manner as for static loading for values of P less than $0.72 P_u$
2. Determine transition depth, Z_r	$Z_r = \frac{6 C_u D}{(\gamma D + J C_u)}$
3. If the depth is greater than or equal Z_r	$P = 0.72 P_{ult} \quad \text{for } y > 3y_{50}$
4. If the depth is less than Z_r	$P = 0.72 P_{ult} \quad \text{at } y = 3y_{50}$ and $P = 0.72 P_{ult} \quad \text{at } y = 15y_{50}$

Where C_u Undrained shear strength
 D Pile diameter
 J Constant(0.5 for soft clay)
 (0.25 for medium clay)
 P_u Ultimate soil resistance
 y_{50} Deflection at one-half the ultimate soil resistance
 Z Depth
 Z_r Transition depth
 γ Effective soil unit weight
 ϵ_{50} Strain at one-half ultimate soil resistance
 (0.020 for soft clay)
 (0.010 for medium clay)
 (0.005 for stiff clay)

결과의 이론적 고찰을 통해 임의의 깊이에 대한 p-y 곡선 산정식을 제안하였다. 그림 6(a)는 말뚝에 작용하는 정하중에 대한 연약 점토층의 p-y 곡선을 보여주며, 여기서 곡선은 식 (1)에 따라 정의된다.

$$\frac{p}{P_u} = 0.5 \left(\frac{y}{y_{50}} \right)^{1/3} \quad (1)$$

여기서 P_u 는 지반의 깊이 및 흙의 비배수 전단강도와 관계된 극한 수평지지력이며, y_{50} 은 극한지지력의 50%에 도달하였을 시의 지반변위를 의미한다. 그림 6(b)는 반복하중이 작용하였을 시의 p-y 관계를 정의한 곡선이다. 정하중과 반복하중 작용시 차이점은 반복하중이 작용할 시에는 변형률이 일정 수준 이상이 되면 지반의 지지력이 감소된다는 점이다. 또한 각각에 대한 p-y 곡선을 산정하는 방법은 표 3에 설명되었다.

2.2.2 모래지반의 p-y 곡선

O'Neill and Dunnavant(1984)는 Reese 등(1974)의 방법을 토대로 보다 단순화된 모래지반의 p-y 곡선을 개발하였다. 이는 미국석유협회(API, American Petroleum Institute)에서 사용이 승인되어 API 방법으로도 불리며 이는 쌍곡선 탄젠트 함수가 사용되어 p-y 곡선이 만들어진다. 극한지반반력을 산정하기 위해 세 개의 파트로 구분하고 각각의 계산식에 필요한 C_1, C_2, C_3 의 계수는 흙의 마찰각에 관한 함수이며, 이의 관계는 그림 7(a)에 정리되었다. 지반반력의 초기 탄성계수는 마찰각에 따른 함수로서 그림 7(b)를 통해 확인할 수 있다. 표 4는 API 모래 지반의 p-y 곡선을 산정하는 식을 순서대로 정리하여 나타내었다.

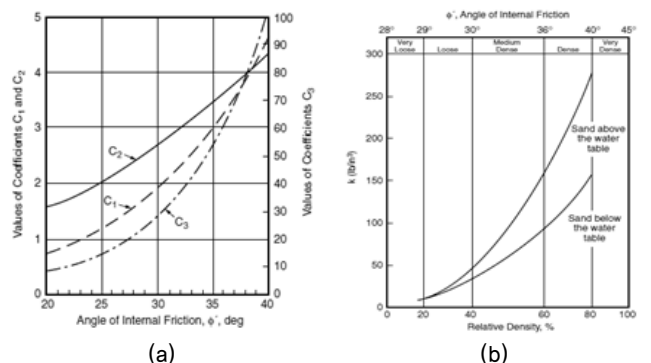


그림 7. 모래지반의 p-y 곡선 산정을 위한 계수 (API, 1993)

표 4. API 모래의 p-y 곡선 산정 방법

1. Theoretical ultimate soil resistance due to wedge failure, P_{st}	$P_{st} = (C_1Z + C_2D)\gamma'Z$
2. Theoretical ultimate soil resistance due to flow failure, P_{sd}	$P_{sd} = C_3D\gamma'Z$
3. Govern theoretical ultimate soil Resistance, P_s	$P_s =$ the smaller of the values given from step 2 and 3
4. Determine adjustment coefficient for static and cyclic loading	$\bar{A}_s = \left(0.3 - 0.8 \frac{Z}{D}\right) \geq 0.9$ for static loading $\bar{A}_c = 0.9$ for cyclic loading
5. Develop characteristic shape of p-y curves	$P = \bar{A}_s \tanh\left(\frac{kZ}{\bar{A}P_u} y\right)$

Where \bar{A}_s, \bar{A}_c Adjustment coefficient for static and cyclic p-y curves
 C_1, C_2, C_3 Non dimensional coefficient for static and cyclic p-y curves
 D Pile diameter
 k Initial subgrade reaction constant(MN/m³)
 P_{sd} Theoretical ultimate soil resistance due to flow failure
 P_{st} Theoretical ultimate soil resistance due to wedge failure
 P_s Govern ultimate soil resistance

3. 현장시험 결과 분석

빔-솔리드 요소 3차원 모델의 검증을 위하여 국내에서 수행된 수평재하 시험 결과를 사용하였다(나승민, 2012). 그림 8

표 5. 수평재하시험 결과

말뚝 규격	시험말뚝번호	관입깊이 (m)	수평재하 시험결과		EI (N-m ²)	β (m ⁻¹)	K_h (kN/m ³)	비고
			변위량 (mm)	하중 (kN)				
Φ609.6×12(t)	HSP12-1	15.1	10	70	1.78×10 ⁸	0.269	6100	1차
			15	89		0.255	4930	
			10	65		0.263	5580	2차
			15	82		0.248	4410	

표 6. 지반의 입력 물성값

	Depth(m)	N 값	ϕ (°)	C_u * (kPa)	V_s ** (m/s)	단위중량(kN/m ³)
점성토	0~9.5	3	0	30	115.7	16
점토질실트	9.6~11.5	6	29	0	116.1	18
퇴적층	11.6~13.0	32	36	0	288.0	22
풍화토	13.0~14.5	43	39	0	317.4	22
풍화암	14.6~15.1	150	41	0	478.8	24

* $C_u=10N$; ** $V_s=92.1 \times N^{0.329}$ (m/sec)

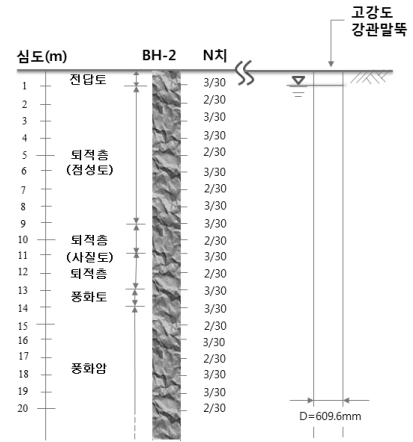


그림 8. 현장시험 대상지역 토질주상도

은 현장시험이 실시된 지역의 토질주상도와 표준관입시험의 N 값을 나타낸다.

수평재하시험은 시험말뚝 HSP9-1과 HSP12-1를 1본-1본 상호 반력으로 극한 또는 항복상태에 도달할 때까지 시험하였다. 표 5는 수평재하시험의 결과이다.

4. OpenSees 수치해석 모델링

본 절에서는 고강도 강관말뚝의 수평재하시험에 대한 수치해석 모델링을 통해 단말뚝의 거동을 분석하여 현장시험결과와 비교하였다. 해석은 전절에서 소개한 OpenSees 유한요소해석 프로그램을 이용하였다. 해석에는 BNWF 해석법과 빔요소-Rigid 링크 모델을 사용하였다.

표 7. 말뚝의 입력 물성값

	E(kPa)	A(m ²)	I(m ⁴)	G(kPa)
HSP 12-1	1.78×10 ⁸	0.0225	0.001	7.4×10 ⁷

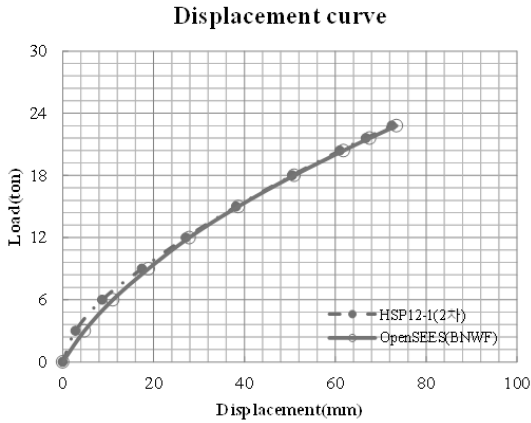


그림 9. 현장시험결과와 수치해석결과의 하중-변위 관계 비교

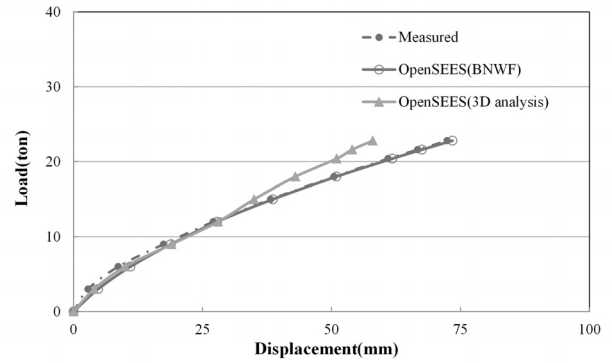


그림 10. 시험과 수치해석 결과의 하중-변위 관계 비교

3차원 빔-솔리드 요소의 해석은 큰 변위의 발생 시 하중을 다소 과대 예측하는 것으로 나타났다. 이는 Rigid 링크는 말뚝과 지반 사이의 마찰현상을 모사하지 못하고 요소에서 동일한 변위가 발생되기 때문에 큰 변위가 발생할 시 슬립현상이 발생되지 않고 더 큰 하중을 받을 수 있기 때문인 것으로 판단된다(Akihiro, 2002). 하지만 실측 데이터와 해석결과의 경향은 비슷하며 차이 또한 전체 하중에 비하여 작은 것으로 판단된다.

기존의 말뚝과 지반을 모두 솔리드 요소로 모델링하는 방법은 이들 사이 인터페이스 강성의 정의가 필요하며 이는 해석결과에 가장 중요하고 강성을 결정하기 어렵다는 단점이 있다. 하지만 본 연구에서 수행된 빔-솔리드 요소의 모델은 인터페이스를 정하지 않고 Rigid 링크를 이용하여 실제의 지반과 말뚝의 거동을 모사할 수 있으며, 이러한 Rigid 링크는 균말뚝의 해석 수행 시 말뚝 각각의 p-multiplier를 계산하지 않고 바로 모델에 적용할 수 있는 장점을 가지고 있다.

5. 결론

본 연구에서는 유한요소해석의 빔, 솔리드 요소와 Rigid 링크를 이용하여 수평하중을 받는 말뚝의 3차원 모델의 수치해석을 수행하였다. 해석 결과, 3차원 모델은 시험의 실측 데이터와 유사한 하중-변위의 관계를 보이는 것으로 나타나, OpenSees로 구축된 빔-솔리드 요소의 3차원 모델의 해석이 적절하게 수행되었음을 알 수 있다. 빔-솔리드 요소 및 Rigid 링크를 이용한 모델은 말뚝의 거동을 정확하게 모사하는 동시에 솔리드 요소에 비하여 계산 절점수가 적어서 연산비용을 절감할 수 있는 장점이 있는 효과적인 방법인 것으로 나타났다.

감사의 글

본 연구는 토지주택연구원에서 수행한 「말뚝의 강성효과

4.1 BNWF 해석법

본 해석에 사용된 지반은 전 절에서 설명한 토질주상도와 동일하며, 이들의 물성값은 표준관입시험 N 값을 이용하여 산정하였다. 흙의 내부마찰각(ϕ)과 밀도(ρ)는 주어진 층에 대해 지반조사결과의 해석 및 응용(한국지반공학회, 2005)을 참고하여 표 6에 정리하였다. 또한 말뚝의 직경 609.6mm, 길이 15.1m, 두께 12mm로 모델링 하였으며, 말뚝에 대한 물성은 표 7의 고강도 강관말뚝 물성값을 사용하였다.

본 연구에서는 모델링의 적절성을 평가하기 위해 강관두께 12mm의 단말뚝을 대상으로 모델링하고 현장시험의 결과와 비교하여 OpenSees 해석 모델로 검증하였다. 그림 9는 현장시험으로 측정된 하중-변위 곡선과 수치해석 결과이며 변위 20mm 이하에서는 측정값과 해석된 값이 약간 차이를 보이지만 미소하며, 20mm 이상 변위에서는 이들이 일치하였다.

4.2 빔요소-Rigid 링크를 이용한 3D 유한요소해석

3D 해석에서 말뚝은 빔요소로 지반은 솔리드 요소로 모델링하였으며, 말뚝과 지반의 요소 사이는 Rigid 링크를 이용하여 연결하였다(그림 1). 빔요소에는 고강도 강관말뚝의 물성, 솔리드 요소에는 PIDMY(Pressure Independent Multi Yield) 모델과 PDMY(Pressure Dependent Multi Yield) 모델을 적용하였으며 사용된 물성은 표 6과 같다. 해석에서 수평하중은 각각 10번의 단계로 나누어 목표하중에 도달하도록 하였다.

그림 10에는 시험으로 측정된 하중-변위 곡선과 p-y 곡선을 사용하여 해석을 수행 한 2차원 BNWF 모델의 하중-변위 곡선을 비교하여 도시하였다. 그림 10에서 나타난 것과 같이

를 고려한 건축구조물의 내진설계 합리화 연구」의 연구비 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. 나승민(2012), 「현장재하시험을 통한 고광도 강관 타입말뚝의 지지력 특성에 관한 연구」, 박사학위논문, 한양대학교.
2. 한국지반공학회(2005), 「지반조사결과의 해석 및 이용」, 구미서관.
3. Akihiro, T. (2002), *Soil-pile interaction in liquefaction-induced lateral loading of soils*, Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology.
4. American Petroleum Institute (API) (1993), *Recommended practice for planning, designing, and constructing fixed offshore platforms*, API RP 2A-WSD, 20th Ed., API, Washington. D. C.
5. Chen, Y., X. Liu and H. Dai (2010), “Free Field Analysis of Liquefiable Soils”, *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 15.
6. International Center for Numerical Methods in Engineering, <http://gid.cimne.upc.es/>.
7. Jeremic, B., G. Jie, M. Preisig and N. Tafazzoli (2002), “Time domain Simulation of Soil-Foundation- Structure Interaction in Non-uniform Soils”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 38(5): 699~718.
8. Matlock, H. (1970), “Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay”, *Proceeding of the 2nd Offshore Technology Conference*, Houston, 1: 577~594.
9. O'Neill, M. W. and T. W. Dunnavant (1984), “A Study of the Effects of Scale, Velocity and Cyclic Degradability on Laterally Loaded Single Piles in Overconsolidated Clay”, University of Houston, Texas, Department of Civil Engineering, *Report UHCE 84-7*, 368.
10. Open System for Earthquake Engineering Simulation, <http://opensees.berkeley.edu/>.
11. Reese, L. C., W. R. Cox and F. D. Koop (1974), “Analysis of Laterally Loaded Pile Groups in Sand”, Paper No. OTC 2080, *Proceedings of the Fifth Annual Offshore Technology Conference*, Houston, Texas, 473~485.
12. Yang, Z., Y. Zhang, J. P. Conte, A. Elgamal, J. Bielak and G. Acero (2008), “Two-dimensional nonlinear earthquake response analysis of a bridge- foundation-ground system”, *Earthquake Spectra*, 24(2): 343~386.