대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 4, 957 ~ 973. Dec 2013

GSP의 쌍곡원반모형을 활용한 중학교 수학영재 학생들의 쌍곡평면 테셀레이션 구성과정에 관한 연구[1)]

류 희 찬* · 이 은 주**

본 연구에서는 중학교 3학년 수학영재 학생들이 비유클리드 쌍곡원반모형에서 정삼각형 테셀레이션을 구성하는 활동을 하면서 나타나는 사고과정을 분석하였다. 역동적 기하환경인 poincare disk. gsp 파일에서 테셀레이션을 구성하기 위해 쌍곡평면에서 도형과 변환에 대한 학습을 하였다. 쌍곡선분의 특징을 탐구하고 도형인 정삼각형의 작도와 반전 변환을 학습 한 후 작도 과정을 반복한 후 쌍곡평면에서 테셀레이션이 가능하게 되는 조건을 탐구하는 과제를 해결하였다. 학생들은 이러한 과제를 해결하며 다양한 전략적 사고과정이 나타났고, 비유클리드 기하체계를 인지하는 경험을 할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

영재 교육이 활성화 되면서 수학 영재들에게 적합한 다양한 수준의 교수·학습 자료 개발이 지속적으로 이루어지고 있다. 최종현, 송상헌(2005)은 수학 영재를 위한 교수·학습 자료 개발의 핵심은 수학영재들의 특성과 수준에 부합하는 지도내용의 개발이고 이 지도 내용 개발을 위해서는 그 내용을 포괄하는 소재 또는 주제를 발굴해야 한다고 주장했다.

수학영재 교육은 학생들로 하여금 기존의 사고체계를 초월한 새로운 수학을 발명할 수 있는 능력을 최대한 발현하도록 함으로써 창의성을 기르는데 그 핵심이 있다(Sheffield, 1999; 홍성관, 2013). 이런 점에서 테설레이션은 영재교육을 위한 좋은 소재가 될 수 있다. 학생들로 하여금 많은 수학적 아이디어와 개념들을 통합 할 수 있는 기회를 제공해 주며, 도형의 성질과 변환을 이용해 테셀레이션을 직접 구현하며 창의적인 산출물을 생산해 낼 수도 있기 때문이다(전영아, 2000). 또한, 테설레이션은 학생들로 하여금 자칫 어렵게만 느껴질 수 있는 형식기하를 학습하기 전에 기하에 흥미와 관심을 갖게 할 수 있으며, 조작 활동을 통해 발견하고 탐구하는 능력을 기를 수 있게 한다. 뿐만 아니라 테셀레이션 속에는 도형의 다양한 성질들이 내포되어 있으며, 수학과 과학에서 중요한 대칭성을 공부하는데 있어 중요한 변환 개념이 포함되어 있으며 미술에서 작품을 만드는 것과 유사하여 학습자의 창의성을 신장시켜주기도 한다(박혜정, 조영미, 2012).

지금까지는 구체적 조작물이나 동적 기하를 이용한 테셀레이션 학습 자료가 개발 되어 있지만(김원경, 백선수, 2000; 전영아, 2000; 신원국, 2009; 이효심, 2010), 대부분 테셀레이션에 관한 대표적인 연구자로 에셔를 소개하고 그의 작품

* 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr
** 서울성동고등학교, namu116@hanmail.net
1) 본 연구는 2012년 한국교원대학교 기성회비 연구비 지원으로 이루어졌음.

을 분류하고 분석하는 수준에 그치고 있다. 더구나 이들 연구는 유클리드 평면에서의 테셀레이션만을 다루고 있는데 이는 에셔의 작품인 Circle Limit 와 같은 쌍곡 평면에서 이루어진 테셀레이션은 그 수학적 내용이 정상적인 수학교육과정의 내용을 넘어가기 때문이다. 그러나 비유클리드 기하의 개념에 대한 학습은 영재학생들이 논리적 사고의 함양을 돕게 되고, 이로 인해 기하 전반에 대한 본질적 이해가 더 깊어지는 효과를 도모할 수 있고 학생들에게 새로운 시각의 상상력을 길러 줄 수 있다(소현수, 2001). 이 때, 비유클리드의 기하체계를 도입하여 가르침으로써 자칫 학습량의 증가와 새로운 기하체계를 받아들이는 데 따른 혼란이나 인지적 어려움 등 학생들과 가르치는 교사에게도 부담을 줄 수도 있지만 조작이 직접적이고 움직임이 연속적이고 몰입적인 환경을 만들 수 있다는 역동적 기하 환경의 장점을 활용하여 수학영재학생들이 직접 조작하고 탐구하고 실행하는 실험적 귀납적 방법을 이용하고, 에셔의 테셀레이션과 같은 흥미로운 소재로 접근한다면 부담을 크게 줄일 수 있을 것으로 본다.

결국 유클리드 평면 테셀레이션 뿐만 아니라 쌍곡평면 테셀레이션을 구성해 보는 것은 사고 체계를 확장시키며 서로 다른 공리체계 내에서 각기 다르게 나타나는 도형의 성질을 알 수 있게 한다는 점에서 연재학생들을 위한 의미 있는 활동이라 할 수 있다. 박종률(2006)은 Cabri Geometry Ⅱ 프로그램을 활용하여 알고리즘에 의해 쌍곡원반모형에서 테셀레이션을 구성하는 영재교육용 학습 자료를 개발하였다. 그러나 알고리즘에 의한 테셀레이션은 쌍곡기하의 성질을 이용하여 계산된 수치들을 유클리드 평면의 원 안에 테셀레이션을 구현한 것으로 학생들이 쌍곡기하에 대해 구체적으로 학습하게 된다는 장점은 있지만 어려운 내용을 제시된 방법에 따라 학습 해 가게 된다는 점에서 학생들이 직접 전략을 세우고 오류를 수정해 가는 등의 사고 과정을 촉진시키기에는 어려운 점이 있다.

역동적 기하환경인 GSP 파일 중 비유클리드 쌍곡원반모형 poincare disk. gsp 는 http://www.dynamicgeometry.com/ Advanced Sketch Gallery 에서 다운 받을 수 있는 공개 파일로써, 쌍곡원반 안에 원래의 자료(성질, 과정, 관계)를 직관적으로 수용 가능한 요소로 번역한다(홍성임, 2010). 이 파일을 사용하면 쌍곡원반 안에서 쌍곡선분과 직선을 작도 할 수 있고, 사용자 도구를 이용하여 쌍곡길이와 각도를 측정할 수 있다. 이러한 특징은 문제를 해결하는데 있어 가설을 추측하고 검증하는데 시각적인 근거를 마련해 지필환경이 제공하지 못 하는 다양한 정보와 경험을 제공함으로써 학생들 스스로 지식을 구성해 나가도록 하는데 도움을 줄 수 있다.

비유클리드 기하인 쌍곡기하를 경험하는 이러한 과정은 새로운 기하 체계에서의 도형의 성질(변의 길이, 내각의 크기, 합동 등)과 변환의 개념(반전)을 탐구할 수 있고 사고체계를 더 확장시킬 수 있으며 다양한 사고 전략을 세울 수 있는 기회를 제공한다. 본 연구는 비유클리드 쌍곡원반모형 poincare disk. gsp 에서의 정삼각형으로 테셀레이션을 구성하는 활동을 통해서 수학 영재 학생들이 테셀레이션의 원리를 찾기 위하여 과제를 해결하는 과정의 전략적 사고과정이 어떠한지를 분석하고, 도형의 성질이 다르게 나타나는 새로운 공리체계를 이해하고 비교하는 사고과정을 분석하는 것을 목적으로 한다.

연구문제는 다음과 같다. 1. GSP를 이용한 쌍곡평면 정삼각형 테셀레이션 구성 과정에서 나타나는 수학 영재 학생들의 전략적 사고 과정은 어떠한가? 2. GSP를 이용한 쌍곡평면 정삼각형 테셀레이션 구성 과정에서 수학 영재 학생들이 쌍곡평면의 도형의 성질을 통해 비유클리드 기하체계를 인지하는 과정은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

본 연구의 목적은 역동적 기하 환경인 GSP 상에서 쌍곡평면 테셀레이션을 구성하면서 나타나는 수학영재학생들의 사고 과정을 분석하는 것에 있으므로 역동적 기하 환경에서의 테셀레이션, 쌍곡평면 테셀레이션, 전략적 사고에 관한 선행연구를 살펴보았다.

1. 역동적 기하 환경에서의 테셀레이션

지필환경에서는 도형의 정확한 작도와 작도된 도형의 변형이 불가능하며, 길이나 각의 크기를 정확하게 측정하기 어렵다. 반면, GSP와 같은 탐구형 소프트웨어는 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상보적 관계에도 도움이 된다(류희찬, 조완영, 1999) 또한, 동적인 환경의 특성으로는 직접적인 조작, 연속적인 움직임, 몰입적인 환경을 들 수 있으며 직접적인 조작이란 사용자가 화면상에서 대상을 선택하여 직접 움직여 볼 수 있는 것을 의미하며, 조작을 통해 화면상에서 보여 지는 대상과 그 이면에 숨겨진 수학적 의미 사이의 인식 거리를 좁힐 수 있다. 연속적인 움직임이란 '드래그'동안에 일어나는 변화와 관련된 것으로, 컴퓨터 화면에 나타나는 수학적 대상들이 항상 논리적인 관련성과 전체적인 모양을 유지하면서 움직여질 뿐 아니라, 대상들이 변하는 중간 상태를 사용자가 모두 볼 수 있음을 의미한다. 몰입적인 환경이란 사용자의 초점이 작도를 위한 기술적 방법보다 수학적 목표를 달성하는 방법에 맞추어질 수 있도록 하는 환경을 의미한다(류희찬, 2004).

GSP는 테셀레이션을 위한 전용 소프트웨어인 테셀매니아와 테스처럼 생동감 있고 아름다운 테셀레이션을 제작하는 것에는 미치지 못 하지만 지필환경에서는 그리기 어려운 도형을 애니메이션 및 자취 기능등을 통해 직접 시각적으로 보여 주고, 기하의 여러 가지 성질을 발견하는데 아주 좋은 아이디어를 제공해 줄 수 있다(임해경, 박은영, 2002).

본 연구에서는 poincare disk. gsp 파일을 사용할 수 있는 환경을 역동적 기하 환경으로 정의한다. poincare disk. gsp 파일은 쌍곡선분(Hyperbolic segment), 쌍곡직선(Hyperbolic line), 쌍곡수직이등분선(Hyperbolic perpendicular bisector), 쌍곡수선(Hyperbolic angle bisector), 중심과 다른 한 점이 주어진 쌍곡원(Hyperbolic circle by CP), 중심과 반지름이 주어진 쌍곡원(Hyperbolic circle by CR)을 작도할 수 있는 사용자 도구와 쌍곡각(Hyperbolic angle), 쌍곡거리(hyperbolic distance)를 측정할 수 있는 사용자 도구를 포함하고 있다.

홍성관(2013)은 poincare disk. gsp 파일에서 평행선을 어떻게 인식하고 있는지에 대한 연구를 하며 이러한 실험과 귀납적 사고를 통하여 자신이 경험하지 않은 새로운 기하학을 만들어가는 과정을 통하여 사고의 자유로움을 획득하고 창의적 사고의 시례를 경험할 수 있으며 또 유클리드 기하학의 본질을 더 잘 파악할 수 있으므로 수학영재를 위한 교수·학습 자료의 개발에 도움을 줄 수 있을 것이라고 주장했다.

2. 쌍곡평면 테셀레이션

쌍곡기하학에서의 평면은 말안장처럼 생긴 어디서나 안으로 굽어진 곡면으로 이 곡면상에서는 평행선은 무수히 많으며 삼각형의 내각의 합은 180도보다 작다. 실제로 유클리드 평면에서는 이러한 모델을 완전히 만들 수는 없으며 이 쌍곡기하학의 세계에 대한 가장 간결한 모델을 푸엥카레가 생각한 원반이다(신원국, 2009). 본 연구에서는 쌍곡평면 테셀레이션을 쌍곡원반모형에서 테셀레이션을 구성하는 것으로 정의한다.

쌍곡평면 정규 테셀레이션은 정다각형으로 쌍곡원반모형을 덮을 때, 겹쳐지거나 틈이 생기는 부분 없이 덮는 것을 뜻한다. 특히, 정다각형의 내각의 크기는 모두 같으므로 각 꼭짓점에 같은 수의 정다각형들이 모이게 된다. 다음은 쌍곡기하학의 성질을 활용하여 만든 에셔의 테셀레이션 작품이다.

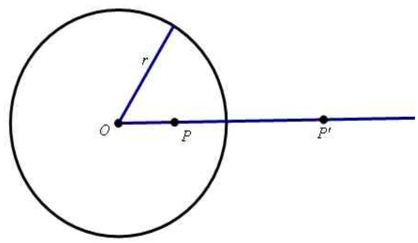
[그림 Ⅱ-1] 에셔의 쌍곡평면 테셀레이션 작품

3. 전략적 사고

일반적으로 전략적 사고는 문제 해결을 위해 필요한 정보를 수집하여 여러 가지 해결방법의 다양한 관점의 분석을 통해 최선의 해결 방법을 선택하는 것을 말한다. 류희찬, 장인옥(2010)은 유추적 사고, 일반화, 비판적사고, 발전적 사고, 통합적 사고, 유연한 사고의 6가지 유형으로 전략적 사고를 나누었다. 본 연구에서는 류희찬, 장인옥(2010)의 연구를 변형하여 전략적 사고를 정의한다.

4. 반전 변환

쌍곡평면에서 길이와 각을 보존하는 합동변환은 반전변환이다.



[그림 II-3] 점 P의 원 C 에 대한 반전점 P'

전략적 사고의 유형	특징
유추적 사고	어떤 특정한 대상이나 문제에서 성립한 성질이 이와 유사한 다른 대상에 대해서도 성립할 것으로 추론하는 것이다. 즉, 서로 다른 대상간의 유사성을 찾아 연결함으로써 분리되어 있던 대상들간의 관계성을 찾는다.
발전적 사고	주어진 문제에 대해 얻어진 결과에 대해 만족하지 않고 더 나은 결과를 찾으려는 정신적인 활동으로 그 결과보다 일반적이고 새로운 것을 발견하게 된다.
통합적 사고	이산적인 상태의 여러 가지 자료들을 관찰하여 공통 요소를 파악하여 자료의 의미를 넓은 관점에서 해석하고 활용하는 사고 활동이다.
유연한 사고	다양한 범주에 적용 가능한 아이디어나 해결 방법을 찾아내는 정신적인 활동이다. 일반적으로 창의적인 문제는 문제의 요소를 다양한 관점에서 관찰함으로써 해결되기 때문에 유연한 사고는 창의적인 문제 해결의 중요한 요소이다.
분석법적 사고	분석법은 찾고 있는 것을 이미 이루어 진 것처럼, 구하고자 하는 것을 이미 찾은 것처럼, 증명해야 할 것이 이미 증명되어 참인 것으로 가정하고 선행 조건을 계속 찾아 초기의 조건에 이르는 방법이다.

[그림 Ⅱ-2] 전략적 사고 유형

중심이 O 이고 반지름이 r 인 원 C 와 임의의 점 P 에 대하여, 원 C 에 대해 반전된 점 P' 는 다음을 만족시키는 점이다. 1) 점 P' 는 반직선 OP 위에 있다. 2) $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$. 두 점 P, P' 에 대하여 $I_{O,\,r} : P \rightarrow P'$를 만족하는 변환 $I_{O,\,r}$ 를 원 C 에 대한 반전변환이라 한다.

Ⅲ. 연구의 방법 및 절차

1. 연구방법

본 연구는 탐구형 소프트웨어인 GSP 파일 중 비유클리드 쌍곡원반모형 poincare disk. gsp 에서의 활동을 관찰하고 사고과정이 어떠한지를 분석하는 것을 목적으로 하기 때문에 질적 사례 연구 방법을 선택하였다.

2. 연구대상

연구 대상 선정 절차는 서울특별시 소재 지역교육청 영재교육원에 3학년 학생 20명을 대상으로 GSP와 테셀레이션에 관련된 135분 수업을 3회 시행한 후, 이 주제에 관심이 많은 학생 중 2명을 대상으로 연구의 목적을 설명한 후 선정했다. A 는 GSP를 초등학교 때 배운 적이 있어 다른 학생에 비해 조작을 능숙하게 잘 하고, 작도한 내용을 수학적 개념과 연결시키고 탐구하는 것을 재미있어 하는 학생이다. B는 다양한 분야에 관심이 많아 상식이 풍부하고 사고의 깊이도 깊고 수업에 참여할 때 적극적으로 질문을 많이 하는 편이고 특히, 에셔의 테셀레이션에 관심을 보이며 본 실험에 참여하게 되었다.

3. 연구설계

영재원의 수업을 통해 GSP를 활용하는 것과 테셀레이션에 대한 내용을 먼저 학습 한 후 예비 실험을 4명의 학생을 대상으로 진행 한 후 학습지 및 실험 환경에 필요한 것을 보완 한 이후 본 실험 수업을 전개하였다. 실험 수업에서는 비유클리드 기하에 관한 문항을 접해 볼 수 있는 기회를 주기 위해서 Van Hiele level Test를 실시한 이후에 쌍곡평면 원반모형인 Poincare disk.gsp에서 테셀레이션 구성을 하는 수업을 전개한다. 학생 개인당 컴퓨터를 제공하여 각자 작도하고 문제해결이 가능하도록 하였다.

4. 탐구과제

본 연구의 과제는 쌍곡평면 정삼각형 테셀레이션을 구성하는 것이다. 테셀레이션을 구성하기 위해서는 도형을 작도하고, 합동변환을 적용해야

차시	수업 주제	수업환경	대상학생
수업1	GSP 를 활용한 도형의 성질 탐구	역동적 기하환경	중학교 3학년 20명
수업2	평면 테셀레이션	지필환경, 역동적 기하환경	중학교 3학년 20명
수업3	원기둥 테셀레이션	지필환경	중학교 3학년 20명
예비실험	쌍곡평면 테셀레이션	역동적 기하환경	중학교 3학년 4명
본실험	쌍곡평면 테셀레이션	역동적 기하환경	중학교 3학년 2명

[그림 Ⅲ-1] 차시별 수업주제 및 수업 환경, 대상학생

작도	도형	**탐구** 1. 각 변에 점을 반전시킨 점을 작도하기 위해 변을 포함하는 원을 찾아야 한다. 쌍곡선분을 작도하고 이 호(쌍곡선분)를 포함하는 원(유클리드)을 작도한다.
		탐구 2. 쌍곡선분 세 개로 이루어진 쌍곡평면 정삼각형을 작도한다.
	반전	**탐구** 3. 한 원에 대한 반전점을 작도하기 위해 원 밖의 한 점에서 원에 접선을 작도한다.
테셀레이션 구성		**탐구** 4. 테셀레이션이 가능한 조건을 탐구한다.

[그림 Ⅲ-2] 탐구과제

한다. 이에 따라 학생들은 쌍곡평면에서의 도형과 합동변환인 반전을 적용하기 위해 먼저 작도하는 방법을 탐구하고, 실제 테셀레이션을 구성하기 위해 작도를 반복 한 후 테셀레이션이 가능한지를 탐구하였다.

5. 자료 수집

예비실험과 본 실험의 수업 장면은 비디오 카메라를 이용하여 동영상으로 녹화하였다. 자료 수집을 위해 녹화된 학생들의 활동과정을 전사하였고, 학생들이 작도하는 중간 과정을 파일로 저장하였다. 학생들이 기록한 활동지와 Van Hiele Test 자료, 교사가 학생들의 언어적, 비언어적인 활동 등을 관찰한 기록 등이 활동 분석 자료로 활용되었다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

본 연구는 쌍곡평면 테셀레이션을 구성하는 과정에서 수학 영재학생들의 사고 과정을 살펴보고 다양한 방법으로 수집된 자료를 토대로 연구자의 관점에서 해석하고 분석했다. 각 과제를 탐구하는 과정에서 나타나는 수학 영재아의 사고과정을 기술하고 관련된 발췌문을 제시했다.

1. [연구문제 1] GSP를 이용한 쌍곡평면 정삼각형 테셀레이션 구성 과정에서 나타나는 수학 영재 학생들의 전략적 사고 과정은 어떠한가?

GSP를 이용한 구성 과정에서 수학 영재 학생들의 전략적 사고과정을 살펴보기 위해 탐구 주제별로 나타난 학생들의 활동을 관찰하고, 그 과정에 나타난 주목할 만한 사고과정을 중심으로 기술하였다.

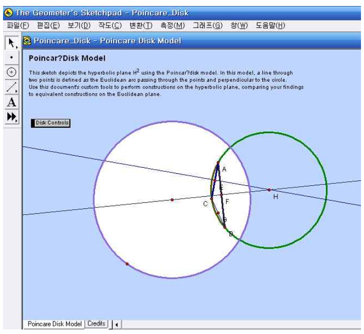
가. 탐구 1) 호(쌍곡선분)를 포함하는 원(유클리드)을 작도

쌍곡평면에서 선분인 쌍곡선분은 원반 모형의 전체 원 Γ의 중심을 지나는 현이나 원 Γ에 수직인 호이다([그림 Ⅳ-1]). 정삼각형 테셀레이션을 구성하기 위해 한 변(쌍곡선분)에 대해 나머지 한 점을 반전변환하게 되므로 쌍곡선분을 포함하는 원을 작도해서 원에 대한 반전점을 찾아야 한다. 따라서 쌍곡메뉴를 이용해 쌍곡선분을 작도하고, 이 변을 포함하는 원을 찾는 것이 탐구 과제로 주어졌다.

학생들에게 원의 일부인 호를 보고 원 전체를 찾을 수 있는지 질문했을 때(1.1), 학생들은 외심의 개념과 성질을 쉽게 떠올리는 통합적 사고가 나타났다(1.2) 삼각형이 주어졌을 때 외심을 작

도하는 방법을 알고 있는 학생들은 호의 일부를 보고 중심을 찾는 문제에서도 이 개념을 적용하며 [그림 Ⅳ-2]와 같이 쌍곡선분 위의 양 끝 점 외에 한 점을 더 찍어 삼각형을 작도하고 이 삼각형의 외심을 찾아 외접원을 능숙하게 작도한 후 쌍곡선분이 원의 일부라는 것을 확인했다(1.6). 이것은 ‘테셀레이션 구성과정이 많은 수학적 아이디어와 만나고, 수학적 개념들을 통합하고, 교정할 수 있는 기회를 제공해 주고 기하학적 사고의 중요한 기초가 되는 변환에 대해 과정중심의 학습이 될 수 있다’(전영아, 2000)는 테셀레이션에 관한 선행연구의 주장과도 그 맥을 같이 한다.

[그림 Ⅳ-1] 쌍곡선분



[그림 Ⅳ-2] 호(쌍곡선분)를 일부로 갖는 원의 작도

<발췌문 1>

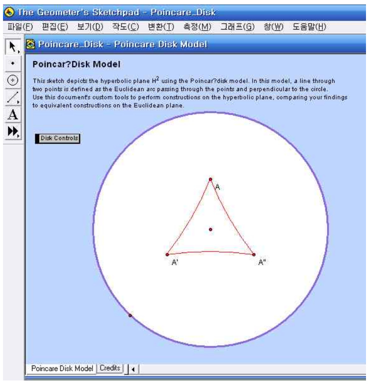
1. 교사: 이 곡선이 원의 일부인 걸 확인해 볼까요? 쌍곡선분을 작도해 보고 이 호를 일부로 갖는 원의 중심을 한번 찾아보세요.
2. A: 끝에 두 점이랑 중간에 한 점을 더 찍어서 거리가 같은 점을 찾으면 될 것 같은데..
3. 교사: 끝에 두 점이 있고, 한 점 더 찍어서 거리가 같은 점을 찾는다는 게 뭐지?
4. A: 외심이요.
5. 교사: 원이 있을 때 이런 삼각형이나 이런 삼각형이나 삼각형 모양이 달라지지만 같은 외접원을 가지면 같은 중심 외심을 찾을 수 있지. 결국 호에서 임의의 세 점을 찾아서 삼각형의 외심으로 찾아 가면 되겠지. 그럼 실제로 작도를 해 볼까요? 쌍곡선분을 작도해 보고 이 호를 일부로 갖는 원을 작도해 보세요. 외심이 작도 됐으면 원을 작도해 보면 뭘 알 수 있어요?
6. B: 호가 원에 포함이 되요.
7. 교사: 그렇죠? 호가 원의 일부라는 게 확인이 되죠?

나. 탐구 2) 쌍곡평면 정삼각형 작도

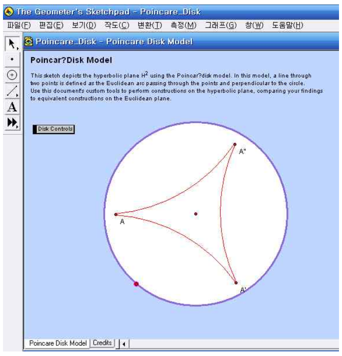
쌍곡평면 정삼각형을 작도하는 과제가 주어졌을 때 학생들은 주저함 없이 임의의 점을 작도하고 원 Γ의 중심을 회전의 중심으로 지정하고 120도 회전한 두 점을 구해서 쌍곡선분으로 연결해서 정삼각형을 작도했다(2.2). 학생들은 원 Γ의 중심에서 도형의 작도가 시작된다는 것을 파악하고 원의 중심을 회전의 중심으로 지정했고(2.2), 정삼각형을 작도하기 위해서는 유클리드 평면에서와 마찬가지 개념을 적용해 작도하는 것과 GSP의 메뉴의 변환을 이용하여 작도하는 능숙함을 보이고 있다([그림 Ⅳ-3]).

또한, 쌍곡선분의 모양을 보고 쌍곡선분을 일부로 갖는 원의 모양을 예측하고(2.4) 원Γ의 반지름을 줄이거나 삼각형의 한 점을 드래깅 하면서 호의 모양이 같이 달라지는 것을 확인한 후 원의 중심을 작도하기 더 쉬운 모양으로 바꾸어 작도하려고 시도 하는 것을 볼 수 있다([그림 Ⅳ

-4]). 이 과정에서 학생들은 주어진 문제에 대해 더 나은 방법을 찾으려는 발전적 사고가 나타났다. 또한, 학생들은 작도하는 과정에 이미 알고 있던 GSP 기능을 능숙하게 사용하고(2.2), 호의 모양을 작도하기 편한 모양으로 바꾸어 작도하는 등 역동적 기하 환경의 장점을 잘 활용하며 유연한 사고를 하고 있다(2.5).



[그림 Ⅳ-3] 쌍곡 정삼각형 작도



[그림 Ⅳ-4] 쌍곡 정삼각형 모양 변형

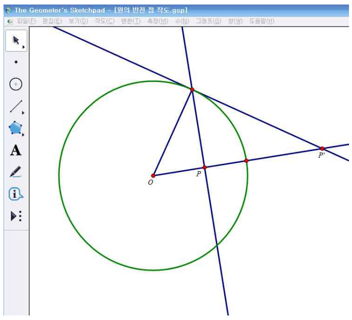
<발췌문 2>

1. 교사: 쌍곡 정삼각형으로 테셀레이션을 구성해 보는게 우리 과제에요. 원반모형에 정삼각형을 한 번 작도해볼까요? 어 어떻게 했어? 안 보는 새에 뭐가 다 됐네.
2. A: 점을 찍어 120도 회전해서 선분을 작도 했어요.
3. 교사: 이제 정삼각형의 한 변을 호로 갖는 원을 한번 찾아 볼 거에요. 이 원의 중심을 찾아볼까?
4. A: 심각하게 커질텐데요.
5. B: 원 자체를 줄여도 되죠?
6. 교사: 그럼! 점을 드래깅해서 삼각형 모양을 바꿔도 되고 원 자체를 바꿔도 되구요. 작도하기에 호가 좀 더 볼록한게 좋으니까.

다. 탐구 3) 반전 작도-원 밖의 한 점에서 원에 접선 작도

테셀레이션을 구성하기 위해 한 변(쌍곡선분)에 대해 점을 반전시킨 점으로 이동해서 합동인 정삼각형을 작도해야 하기 때문에 원 밖의 한 점에서 원에 접선을 긋는 작도가 과제로 주어졌다.

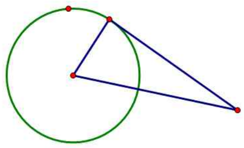
작도해야 할 과제를 제시하기 위해 [그림 Ⅳ-5]을 보여 줬을 때, 학생들은 그림을 보고 반전 식을 직각삼각형의 닮음비로부터 찾을 수 있다고 추측했고(3.2) 교사와 함께 $\overline{OP} : \rho = \rho : \overline{OP'}$의 닮음비로부터 $\overline{OP} \times \overline{OP'} = \rho^2$ 관계를 찾아 낼 수 있음을 확인했다(3.3).



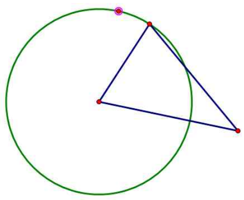
[그림 Ⅳ-5] 반전 식을 찾는 그림

그러나 과제로 주어진 원 밖의 한 점에서 원에 접선을 긋는 작도는 쉽게 접근하지 못 하였다. 학생들은 [그림 Ⅳ-6]과 같이 원과 원에 접하는 것 같아 보이는 직선을 작도한 후 작도를 다 끝냈다고 생각하기도 했으나, 교사가 점을 드래그 하며 접선이 되지 않는 것을 보여 주었을 때

([그림 Ⅳ-7]) 도형의 정의나 성질을 이용해서 작도해야 한다는 것을 알 수 있었다(3.4).



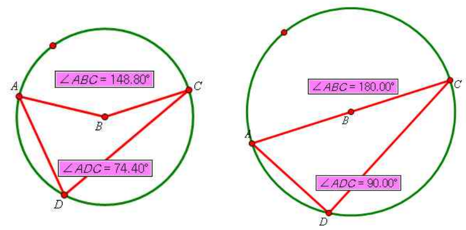
[그림 Ⅳ-6] 학생이 처음 한 원 밖의 한 점에서 원에 접선 작도



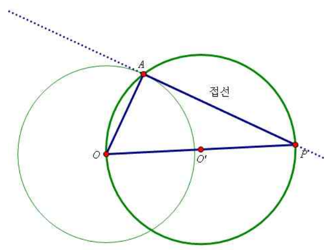
[그림 Ⅳ-7] 점을 드래그 해서 작도가 잘못 되었음을 확인

계속 작도를 시도하며 학생들은 [그림 Ⅳ-6]과 같이 그려야 하는 그림을 그려 놓고 작도를 하려면 어떤 성질을 이용해야 하는지를 찾기 위해 점을 드래그하며 원의 성질을 통합하려고 노력하는 모습을 관찰 할 수 있었다. 이것은 역행적 추론이라고도 불리는 분석법적 사고로 이미 찾은 것처럼 가정하고 바라는 결과가 이루어지기 위해 어떤 조건이 있어야 하는가를 묻는 과정을 계속 반복하여 참인 것으로 가정한 것에 도달하는 방법이다. 시간이 많이 지나도 학생들은 접점을 어떻게 찾아야 하는지 고민을 하는 모습을 보였으나 작도를 하지 못 했고, 이에 교사가 힌트를 주려고 했으나 학생 둘 다 여러 번 거절하며 스스로 알아내려고 하는 강한 과제집착력을 보였다(3.5, 3.9).

학생들은 접점과 중심을 연결한 원의 반지름 선과 원의 접선이 수직이라는 원의 성질을 알고 있어 원 위에 점을 찍고 각을 측정해서 90도를 맞춰 가려는 시도는 하고 있지만(3.7) 주어진 원 밖의 한 점과 원의 중심을 지름으로 하는 원과 주어진 원의 교점이 접점으로 작도 될 수 있다는 접근을 못 하였다. 결국, 교사가 [그림 Ⅳ-8]과 같은 원주각과 중심각의 관계를 설명해 주었을 때, 90도가 원주각이 될 수 있도록 원의 중심이랑 원 밖의 점을 이어서 중점을 찾고 원을 그리면 된다고 적용하고(3.13), 두 점, 원의 중심 O 와 주어진 점 P 를 연결하는 선분을 작도하고 중점 O' 을 찍어 중심각 $\angle OO'P$ 이 180도가 되는 원을 작도했다[그림 Ⅳ-9].



[그림 Ⅳ-8] 원주각과 중심각의 관계 설명



[그림 Ⅳ-9] 원 밖의 한 점에서 원에 접선 작도

이 과정에서 탐구하는 시간이 길고 과제집착력을 갖고 작도를 했기 때문에 원 밖의 한 점에서 원에 접선 작도하는 방법을 알게 된 학생들은 원의 성질을 통합하여 이해하고 내면화 하게 되었고 이후 쌍곡평면 테셀레이션을 구성하는 과정에서는 반전점을 쉽게 작도하는 것으로 확인할 수 있었다.

다음은 학생들이 원 밖의 한 점에서 원에 접선을 그리는 과정의 묻고 답한 내용이다.

<발췌문3>

1. 교사: 이 그림에서 반전을 찾을 수 있을까요? 뭘 이용하면 될까요?
2. B: 직각삼각형의 닮음이요?
3. 교사: 그렇죠~
 직각삼각형에서 $\overline{OP} : \rho = \rho : \overline{OP'}$ 가 만들어지니까. 반전은 쌍곡평면에서 길이와 각을 보존해 주는 변환이에요. 진짜인지는 좀 있다 측정하면서 확인할께요. 원 내부에 점 P 가 있을 때 반전 점은 어렵지 않게 작도할 수 있어요. 그런데, 원 외부에 점 P가 있을 때 반전 점을 어떻게 찾을 수 있을까요? 이게 두 번째 탐구문제에요. 이건 포엥카레 파일 말고 그냥 GSP에서 이 그림을 만들어 보는걸로 할께요. (20분 소요)
4. 교사: 됐어요? 이 그림을 찾아 가야 하잖아. 90도 같아 보이는 거 말고, 진짜 이렇게 되게.. 점을 드래깅 했을 때도 정확하게 작도가 되게 하려면? 그 그림([그림 Ⅳ-6]과 같은 그림) 모양이 맞거든? 항상 그렇게 되도록, 정의나 성질을 이용한 작도가 필요해. 어떤 성질이 필요할까? 힌트를 줄까요?
5. A, B: 아니요.(5분 소요 후)
6. 교사: 힌트 주면 한 번에 끝날거 같은데? 힌트 줄까?
7. B: 아니요. 각의 측정을 어떻게 했죠?
8. 교사: 이렇게..그렇지.. 지금은 접선이니까 90도지. 힌트는 90도라는 거야. 선생님 한마디 더 하면 찾을 거 같아서 안 할게. (3분 소요 후) 어떤 아이디어가 필요할까? 힌트 줄까?
9. A: 아니요.(5분 소요 후)
10. 교사: 원주각과 중심각의 관계가 어떻게 되죠? 원에서 원의 중심각과 원주각의 관계가 어떻게 되지? 중심각이 θ이면? 원주각은 $\frac{\theta}{2}$ 인건 알지? 그럼 원주각이 직각이면 중심각이 어떻게 되나?
11. A, B: 아~ 180도요
12. 교사: 그럼 작도는 어떻게 하면 될까요?
13. B: 원의 중심이랑 원밖의 점을 이어서 중점 찾고 원 그리면 될 것 같아요.
14. 교사: 그렇지~ 작도를 한번 해 봅시다.

라. 탐구 4) 테셀레이션이 가능한 조건 찾기

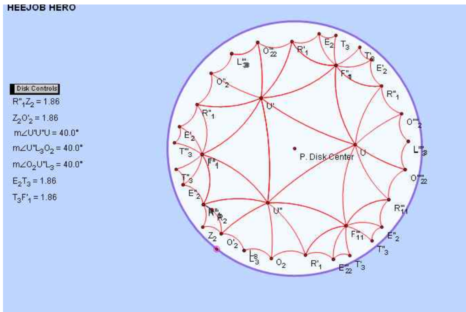
위 탐구과제 1~3을 해결한 후, 학생들은 테셀레이션을 구성하기 위해 쌍곡 정삼각형을 작도하고, 한 변(쌍곡선분)에 대해 점을 반전시킨 점으로 이동해서 합동인 정삼각형을 작도하고 회전이동과 선대칭이동을 반복했다.

실험을 마친 후 한 학생의 학습지에 기록한 내용에서 볼 수 있듯이([그림 Ⅳ-14] 참조) 학생들은 평면 테셀레이션의 과정과 같이 도형을 작도하고 합동 변환인 반전을 반복해서 적용하면 테셀레이션이 구성될 거라고 생각했으나 무조건 테셀레이션이 가능하지는 않다는 것을 발견하였다. 테셀레이션을 구성하려면 다른 조건이 필요하다는 것을 알고 한 점을 드래그하며 연속적으로 성질을 관찰하였다(4.1).

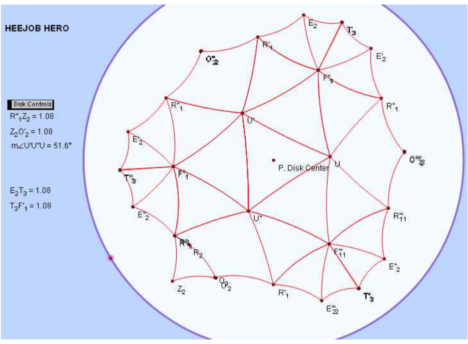
1차시 수업시 유클리드 평면에서 임의의 사각형을 테셀레이션하기 위해 한 꼭짓점에 360도가 모일 수 있도록 변환을 적용하고 점을 드래그하며 오목사각형의 테셀레이션의 가능성을 관찰했던 것을 기억하며 적용 발전시킨 것으로 쌍곡평면에서도 한 꼭짓점에 360도가 모이게 하려는 시도를 하고 있다(4.1). 이 과정에서 유클리드 평면 테셀레이션과 쌍곡평면 테셀레이션을 연결시키는 유추적 사고가 나타났다. 학생들은 시각적으로 테셀레이션 가능 여부를 확인한 후 한 꼭짓점에 모이는 정삼각형의 개수와 관련이 있다는 것까지 스스로 추론해 냈고(4.3), 교사와의 대화를 통해 정확하게 정삼각형의 한 내각과 한 꼭짓점에 모이는 정삼각형의 개수와의 관계를 연결시키고 한 단계씩 작도를 해 봄으로써 테셀레이션이 가능한 원리를 발견하였다(4.11).

다음 발췌문은 교사와 학생이 대화하는 내용

을 확인하는 작도를 해 가는 과정이다. 그림에서 한 점에 모인 삼각형의 개수를 셀 때, 쌍곡선분은 원의 중심을 지나는 현일 경우 표시가 되지 않기 때문에 다음과 같이 ([그림 Ⅳ-10]과 [그림 Ⅳ-11]) 한 꼭짓점에 모인 정삼각형의 개수가 9개와 7개 일 때에는 사각형으로 표시된 부분을 정삼각형 두 개로 읽어야 한다.



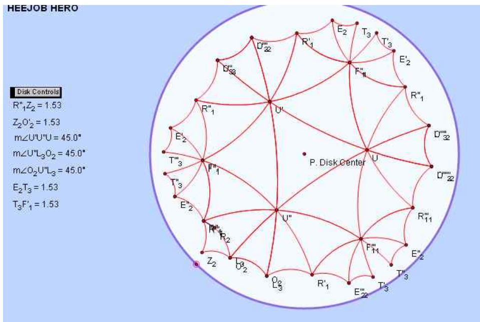
[그림 Ⅳ-10] 한 꼭짓점에 모인 정삼각형 9개가 모이도록 작도한 그림



[그림 Ⅳ-11] 한 꼭짓점에 모인 정삼각형 7개 모이도록 작도한 그림

<발췌문 4>

1. B: 채울 수 없으면 테셀레이션이 안 되는거죠? (원의 반지름을 결정하는 한 점을 드래깅하며 삼각형의 꼭짓점을 맞추어 본다.)
2. 교사: 언제 테셀레이션이 가능한지 보이니?
3. B: 개수가 짝수개, 홀수개일 때일까요?
4. 교사: 글쎄. 좀 더 세어봐. 우리 같이 생각해보자. 지금 몇 개 모여 있는데?
5. B: 9개요, 정삼각형 한 각이 40도에요. (중략)
6. 교사: 그럼 또, 8개가 모이게 해 볼까요? 그럼 정삼각형의 내각은 얼마죠? ([그림Ⅳ-12] 참조)
7. B: 45도요.
8. 교사: 자, 그럼 7개가 모이는 경우는 가능할까요?([그림 Ⅳ-11] 참조)
9. B: 네, 한 각이 51.6도에요.
10. 교사: 그렇죠, 각이 정수일 필요는 없으니까. $\frac{360}{7}$ 겠죠.
11. A: 평면에서랑 같네요.
12. 교사: 그럼 6개가 모이는건 가능할까요
13. B: 아니요. 드래깅하니까 한 점이 나와요.
14. 교사: 왜 그럴까요?
15. A: 정삼각형 내각의 합이 180도가 되요.



[그림 Ⅳ-12] 한 꼭짓점에 모인 정삼각형 8개 모이도록 작도한 그림

[그림 Ⅳ-13] 한 꼭짓점에 모인 정삼각형 6개 모이도록 작도한 그림

다음은 실험 이후 A 학생이 학습을 정리하며 기록한 글이다.

A	무조건 테셀레이션이 되지는 않는다는 사실이 반전이었다. 평면 테셀레이션과는 다르게 눈에 보이는 게 다가 아니어서 결과를 예측할 수 없어서, 결과를 알면서 작도하는 평면 테셀레이션과 다르게 GSP 를 하면서 재미있었다. 말안장과 같은 쌍곡면의 이해가 머릿속으로 상상하기는 힘들었는데 이렇게 직접 만들어보니 쌍곡면에 대해 잘 알게 되었다.

[그림 Ⅳ-14] A 학생이 학습지에 기록한 내용

이처럼 학생들은 평면 테셀레이션과 같은 원리로 한 꼭짓점에 360도가 되도록 모이게 해야 한다는 것을 귀납적으로 확인할 수 있었고, [그림 Ⅳ-14]에서 볼 수 있듯이 정규 테셀레이션의 경우 세가지 종류로만 테셀레이션이 가능하다는 결과를 알면서 작도하는 도형의 작도와 변환의 적용을 연습했던 평면 테셀레이션과는 다르게, 한 종류의 도형으로도 여러 가지 테셀레이션이 가능하다는 예측하지 못 한 결과를 얻게 되면서 학생들에게 수학적 흥미를 갖게 되었다.

본 결과 분석을 바탕으로 각 탐구 과제를 해결하며 나타나는 수학 영재 학생들의 전략적 사고 과정이 나타내는 시사점을 논의하면 다음과 같다.

첫째, 작도활동은 기하에서의 여러 가지 도형을 그리는 활동적 의미 뿐 아니라 도형의 성질을 이용하게 하며, 학생 스스로 도형의 성질을 재인식하고 도형의 성질에 대한 학습을 확인할 수 있게 하므로(정수진, 2007) 작도하는 과정에서 도형의 개념과 성질들을 통합하는 사고 과정이 잘 나타난다. 특히, 테셀레이션을 구성하기 위한 도형과 변환의 작도는 학생들에게 통합적 사고를 키울 수 있는 기회를 제공함을 본 연구에서도 확인할 수 있다.

둘째, 지필 환경이 아닌 역동적 기하 환경에서 작도를 하는 것은 점을 드래그 하며 모양을 변형 시킬 수 있고, 필요한 작도를 하기 위해서 쌍곡메뉴와 유클리드 평면메뉴의 기능들을 활용할 수 있어 작도 과정에서 발전적 사고와 유연한 사고를 나타났다. 직접 조작하고 몰입적인 환경이라는 장점을 통하여 학생들에게 실험을 통해 논리적인 경험을 제공 할 수 있다. 특히, 쌍곡평면이라는 새로운 평면에서도 도형을 작도하고 여러 가지 조작을 해 봄으로써 학생들은 시각적 수준에서 뿐만 아니라 도형의 요소들의 관계를 파악하며 분석적 수준에서도 도형을 파악할 수 있을 것이다.

셋째, 학생들은 원의 반지름과 접선이 수직이라는 관계는 알고 있지만 원 밖의 한 점에서 원에 접선을 작도하는 것을 어려워하고, 분석법적 사고로 과제집착력을 갖고 시도 하였지만 스스로 해결하지 못 하였다. 기하학적인 개념이나 원리를 보다 깊이 인식하기 위해서 연역적인 방법 이전에 지식을 귀납적으로 탐구하는 '구성'의 과정이 필요하다(류희찬, 1998)는 것을 알 수 있다.

넷째, 학생들은 테셀레이션이 가능한 원리를 찾기 위해 유클리드 평면에서의 테셀레이션과 비교하며 공통점과 차이점을 찾고 유추적 사고를 통해 과제를 해결하고 있다. 쌍곡평면에 대해 이론적 지식은 없지만, 테셀레이션을 구성하고 탐구하는 과정에서 귀납적으로 경험하며 다른 공리 체계를 인지하게 됨을 알 수 있다.

각 과제에서 두드러지게 나타나는 전략적 사고과정은 도형과 변환의 작도, 역동적 기하 환경, 쌍곡평면에서의 테셀레이션이라는 과제의 특징과도 연결이 되고 있다.

2. [연구 문제 2] GSP를 이용한 쌍곡평면 테셀레이션 구성 과정에서 수학 영재 학생들의 쌍곡평면의 도형의 성

질을 통해 비유클리드 기하체계를 인지하는 과정은 어떠한가?

GSP를 이용한 쌍곡평면 테셀레이션 구성하는 과정에서 학생들은 직관적으로 이해하기 힘든 다른 공리체계를 갖는 쌍곡평면과 도형의 특징을 귀납적으로 발견할 수 있는 기회를 가지며, 수학적 흥미를 불러 일으켜 지속적인 수학 활동을 하고자 하는 의욕을 고취시켰다.

가. 쌍곡평면에서 도형의 길이

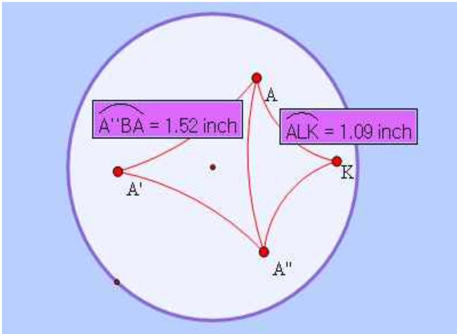
한 학생이 쌍곡평면 정삼각형을 작도 하고 한 변에 대하여 나머지 한 꼭짓점을 반전 변환시키는 점을 작도해 연결한 선분의 길이가 원래 정삼각형의 한 변의 길이와 같음을 확인하는 과정에서 오류를 경험하게 되었다(5.1).

<발췌문 5>

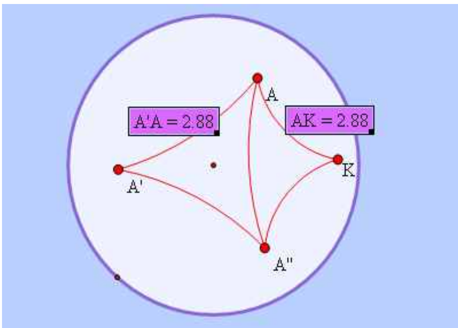
1. A: 헐~ 길이가 달라요.
2. 교사: 작도를 잘못 한 걸까?
3. A: 반전은 작도를 잘 한 것 같아요.
4. 교사: 그럼 같이 볼까?
5. B: 측정을 호의 길이로 측정한 것 같아요.
6. 교사: 그렇네. 옆에 쌍곡 메뉴에서 길이를 잴 수 있거든. 다시 측정해 볼께요.

<발췌문 5>에서 볼 수 있듯이 쌍곡평면에서는 반전 변환이 합동변환으로 길이가 보존된다고 했는데 선분의 길이가 다르게 측정됨을 보고 작도 과정에 오류가 생겼는지 검토하였으나 작도 과정에서는 오류가 없었다(5.3). 학생들은 함께 원인을 찾던 중 오류가 생긴 원인이 메뉴가 사용되는 기하체계가 다르다는 것과 이에 따라 쌍곡평면에서의 거리와 유클리드 평면에서 거리가 다르다는 것을 인지하는 경험을 할 수 있었다(5.5).

유클리드 평면의 측정도구로 호의 길이를 측정했을 때([그림Ⅳ-15])는 다른 길이가 나오지만 쌍곡평면의 길이를 그대로 번역하고 있는 쌍곡 메뉴에서 선분의 길이를 측정했을 때([그림Ⅳ-16])에는 반전에 의해 작도된 새로운 선분의 길이도 같아진다는 것을 확인함으로써 실험을 통해 쌍곡평면의 성질을 경험할 수 있게 되었다(5.5).



[그림 Ⅳ-15] 잘못 측정했던 호의 길이



[그림 Ⅳ-16] 쌍곡 선분의 길이

나. 쌍곡평면 도형의 내각의 합

학생들은 테셀레이션을 구성할 수 있는 정삼각형의 개수를 찾아가는 과정에서 정삼각형의 한 각을 측정한 후 삼각형의 내각의 합이 180도보다 작다는 것을 발견했다(6.3). 시각적인 개념으로 다가가니 비유클리드 기하체계에서도 도형의 성질을 파악하는 것이 어렵지 않았고, 수학에

다른 공리체계가 있다는 것을 실험을 통해 확인하면서 다양한 공리체계에 대한 수학적 호기심을 갖는 등 색다른 흥미를 유발 할 수 있었다.

<발췌문 6>

1. 교사: 9개가 한 꼭짓점이 모였을 때, 한 삼각형의 각 읽어봐
2. B: 40도요.
3. A: 어, 그럼 아까 문제에서 어떤 사람이 제시한 명제에 삼각형의 내각의 합이 180도보다 작아 진다는 게 있었는데..아까는 뭔 소리야 하고 넘어 갔는데 이거네요.
4. 교사: 아, 그럼 쌍곡 정삼각형의 내각의 합 한번 구해 봐봐. 지금 만들어진 삼각형 내각이 얼마니? 지금 측정되어 있는 거?
5. B: 지금 재어져 있는 거요? 45. 7도요.
6. 교사: 그럼 정삼각형의 내각의 합은 얼마겠어? 137.1도네..180도보다?
7. A: 작아요.

실험 시작 단계에 학생들의 기하수준을 알아보고 비유클리드 기하에 관한 문항을 접해 볼 수 있는 기회를 주기 위해서 했던 Van Hiele level Test 의 문항([그림 Ⅳ- 17])에서 보았던 내용에 대해 기억을 떠올리고 언급을 하며 유클리드 기하의 가정과는 다른 가정에서 출발한 기하학에 대한 내용을 내면화하고 있다(6.3). 또한 실험 이후 학습을 정리하며 B학생이 기록한 글([그림 Ⅳ- 18]) 에서 알 수 있듯이 삼각형의 내각의 합이 180도보다 작다는 것은 학생들에게 새로운 기하체계에서의 도형의 성질을 인식하는 것뿐만 아니라 수학을 바라보는 안목, 관점의 변화가 일어나게 하는 큰 발견임을 관찰할 수 있었다.

Ⅴ. 결론과 제언

본 연구에서는 중학교 3학년 수학영재학생 2명에게 역동적 기하 환경인 Poincare disk.gsp 파일에서 쌍곡평면 정삼각형 테셀레이션을 구성할

23. 수학자 J에 의해 발견된 새로운 기하영역은 다음과 같은 명제를 참으로 한다.

삼각형의 세 각의 합은 180도보다 작다.

다음 중 옳은 것은?
가) J는 삼각형 각을 잘못 측정하였다.
나) J는 논리적인 잘못을 하였다.
다) J는 참이라는 의미를 잘못 이해하고 있다.
라) J는 유클리드 기하의 가정과는 다른 가정에서 출발하였다.
마) 1~4 모두 옳지 않다.

[그림 Ⅳ- 17] Van Hiele level Test의 문항 23번

B	비유클리드 기하 평면이 있다는 것에 대해 놀랐다. 모든 삼각형의 내각의 합이 180도라는 나의 생각이 깨졌다. 삼각형 이게 180도가 아니라니. 인생도 마찬가지일지도. 내가 알고 있던 모든 것이 깨진다면.. 쌍곡기하는 단순한 수학, 그 이상의 의미를 갖고 있음이 틀림없다. 약간의 노가다가 있긴 했지만 재미있었다. 나의 근성을 자극하는.. 빈말이 아닌 정말로 기회가 되면 다시 해 보고 싶다.

[그림 Ⅳ- 18] B 학생이 학습지에 기록한 내용

수 있는 기회를 제공하였다. 이 과정에서 수학영재학생들이 귀납적으로 비유클리드 기하를 경험하는 과정을 살펴보고 학생들의 사고 과정을 분석하여 탐구과제를 해결하며 어떠한 전략적 사고 과정이 나타나는지 및 새로운 기하체계를 인지하는 과정을 살펴보았다. 본 연구의 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 실험에 참여한 학생들은 에셔의 유클리드 평면에서의 테셀레이션 뿐만 아니라 쌍곡평면 테셀레이션도 수학적 흥미를 갖고 도전하고 구성하였다. 테셀레이션은 이미 배운 개념들을 복습하거나 교정할 수 있는 기회를 제공하는 장점이 있어 자료개발이 많이 되어 있고 학교 수업에서도 다루어지는 반면 쌍곡평면 테셀레이션은 테셀레이션 종류의 분류 이상의 내용은 많이 다루어지지 않고 있다. 그러나 Poincare disk.gsp 파일을 이용하여 실험을 통해 귀납적으로 탐구하며 쌍곡평면 테셀레이션도 구성할 수 있다는 것을 알 수 있었다.

둘째, 실험에 참여한 학생들은 쌍곡평면 테셀레이션을 구성하는 과정에서 삼각형의 외심이나 원의 성질과 같은 중학교 교육과정 내에서 배운 도형의 개념과 성질을 활용하여 작도를 하였다. 직접 조작하며 구성하는 환경을 통해 이들 학생들은 적극적으로 탐구하였고, 각 탐구 과제의 특징에 따라 통합적 사고, 유연한사고, 발전적 사고, 분석법적 사고, 유추적 사고의 전략적 사고 과정이 나타났다.

셋째, 실험에 참여한 학생들은 쌍곡평면 원반모형의 성질을 보존하는 GSP 파일에서 작도를 하는 과정에 직관적으로는 받아들이기 어려운 새로운 공리체계에 대한 논리적 경험을 할 수 있었다. 새로운 공리 체계에서의 도형을 작도하고, 측정을 통해 도형의 성질을 발견하고 탐구하는 과정에 유클리드 기하 체계에 익숙해져 있는 이들 학생들이 새로운 수학에 대한 안목과 관점을 가질 수 있었고 수학을 발견하는 즐거움을 음미할 수 있었다.

끝으로 본 연구 결과를 토대로 다음과 같은 제언을 하고자 한다. 본 연구에서는 중학교 수학영재 학생들이 쌍곡평면 원반모형인 Poincare disk.gsp 파일에서 도형을 작도하고 변환 적용하는 것을 학습한 후 정삼각형을 바탕으로하는 테셀레이션을 구성하는 과정을 소개하였다. 이 후 후속 논문에서는 학생들이 다른 종류의 정다각형으로 구성된 정규 테셀레이션이나 두 개 종류의 정다각형으로 이루어진 준정규 테셀레이션 등 다양한 테셀레이션의 구성을 시도하는 보다 높은 수준의 기하학적 탐구 활동을 통해 수학에 대한 새로운 시각을 가질 수 있는 기회를 제공해 볼 것을 제언한다. 이 때 중학생들이 순수하게 독자적으로 해결하기 어려운 경우가 발생하더라도 교사들의 도움을 받아 이를 해결해 감으로써 영재학생들로 하여금 수학을 바라보는 새로운 시각을 형성할 수 있다는 점에서 영재교육에 시사점을 줄 수 있다고 본다.

참 고 문 헌

김원경, 백선수(2000). 테셀레이션을 활용한 초등학교 영재교육 프로그램 개발. **수학교육 학술지, 5**, 75-85.

나귀수(2011). 수학 영재 학생들의 발견과 증명에 대한 연구. **수학교육학연구, 21**(2), 105-120.

류희찬(1998). **수학교육과 컴퓨터**. 서울: 경문사.

류희찬, 조완영(1999). 학생들의 정당화 유형과 탐구형소프트웨어의 활용에 관한 연구. **수학교육학연구, 9**(1), 245-261.

류희찬(2004). 작도 문제 해결을 위한 분석 도구로서의 GSP. **청람수학교육, 14**, 17-26.

류희찬, 제수연(2009). 역동적 기하 환경에서 파

푸스의 분석법을 이용한 이차 곡선의 작도활동에서 나타난 학생들의 수학적 발견과 정당화. **학교수학, 25**(4), 168-189.

류희찬, 장인옥(2010). LOGO를 이용한 프로젝트 학습에서 나타난 초등 수학 영재 학생들의 전략적 사고, **수학교육학연구, 20**(4), 459-476.

박종률(2006). 쌍곡평면모형에서의 정규 타일링의 적용에 대한 연구. **한국수학학술지, 26**(2), 151-167.

백선수, 김원경(2007). 초등학교에서 테셀레이션의 수학적 원리 지도 가능성 탐색. **수학교육, 46**(1), 81-96.

백선수(2008). 테셀레이션 원리 지도를 위한 프로그램 개발 및 적용사례. **학습자중심교과교육연구, 8**(2), 203-229.

소현수(2001). **비유클리드 평면에서의 삼각함수 정리**. 홍익대학교 석사학위논문.

신원국(2009). **테셀레이션이 가지고 있는 다양한 수학적 성질에 관한 연구**. 서울시립대학교 석사학위논문.

이효심(2010). **학습동기 유발을 위해서 GSP를 활용한 테셀레이션 학습자료 연구**. 창원대학교 석사학 위논문.

임해경, 박은영(2002). 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수학습자료 개발 및 활용 방안. **수학교육논문집, 13**(2), 563-589.

전영아(2000). **수학 교수학습에서는 테셀레이션 활용 가능성 탐구**. 이화여자대학교 석사학위 논문.

정수진(2007). **역동적 기하환경에서 중학생을 대상으로 분석법을 이용한 증명 학습에 관한 연구 : 작도문제를 중심으로**. 한국교원대학교 석사학위논문.

최종현, 송상헌(2005). 주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료 개발에 관한 연구. **학교수학,7**(2), 169-192.

하선명(2006). **쌍곡평면의 원반모형에서의 regular tiling**. 전남대학교 석사학위 논문.

홍성관(2010). Geometer’s Sketchpad를 이용한 비유클리드 상반평면 학습 프로그램의 개발과 교수-학습과정 제안. **교사교육연구, 49**(3), 305-328.

홍성관(2013). GSP를 사용한 비유클리드 원판모델 학습에서 나타난 중학교 수학영재들의 평행선에 관한 인식 및 언어 표현 방식 분석. **수학교육학연구, 23**(1), 53-74.

홍성임(2010). **동적 조작을 통한 poincare disc model의 학습 지도 방법**. 부산대학교석사학위 논문.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역 (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Serra, M.(2008). *Discovering Geometry: An investigative approach*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Sheffield , L. J. (1999). *Developing mathematically promising students*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

A Study on the Configuring Process of Secondary Mathematically Gifted about the Hyperbolic Plane Tessellation Using Dynamic Geometry Software

Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)
Lee, Eun Joo (Seoul Sungdong High School)

This study analyzed Secondary Mathematically Gifted' mathematical thinking processes demonstrated from the activities. They configured regular triangle tessellations in the Non-Euclidean hyperbolic disk model. The students constructed the figure and transformation to construct the tessellation in the poincare disk. gsp file which is the dynamic geometric environmen, The students were to explore the characteristics of the hyperbolic segments, construct an equilateral triangle and inversion. In this process, a variety of strategic thinking process appeared and they recognized to the Non-Euclidean geometric system.

* Key Words : Non-Euclidean hyperbolic disk model(쌍곡평면 테셀레이션), hyperbolic tessellation(비유클리드 쌍곡 원반모형), Mathematically Gifted(수학영재)

논문접수 : 2013. 11. 08
논문수정 : 2013. 12. 15
심사완료 : 2013. 12. 20