대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 4, 921 ~ 940. Dec 2013

중심사영과 투시도의 작도 학습에서 나타나는 중학교 수학영재들의 수학적 사고특성과 교사의 역할

류 희 찬* · 강 경 민**

본 연구는 Cabri 3D와 GSP를 이용하여 중심사영에 대한 탐구학습에서 나타나는 중학교 수학영재들의 수학적 사고특성과 교사의 역할을 분석하여 수학영재를 위한 교수·학습 자료의 개발에 시사점을 주는데 목적이 있다. 연구결과 중학교 수학영재들은 중심사영에 의한 도형의 변환을 탐구하고 이를 투시도의 작도를 통해 확인하는 과정에서 다양한 수학적 사고특성을 보였고, 교사는 학생들의 탐구문제해결을 위한 사고의 촉진과 새로운 지식의 형성을 도우면서 수업설계자, 학습촉진자, 기술적 보조자, 상담자의 역할을 하는 것으로 나타났다.

Ⅰ. 서 론

각 개인의 자아실현이라는 개인적 측면과 국가 경쟁력 향상을 위한 인재육성이라는 국가적 측면에서 우리나라는 영재교육에 대한 지원을 확대하고 있다. 그 중에서도 수학영재교육이 강조됨에 따라 내실 있는 교육을 위해 수학영재들의 사고특성을 잘 파악하여 그들의 능력과 소질에 적합한 교육과정과 학습 자료를 제공할 필요가 있다.

수학영재들은 수학적 사실의 신속한 일반화 능력, 사고의 유연성 및 가역성, 쉽고 경제적인 문제해결법 열망, 문제해결에 대한 강한 과제집착력을 가진다(Krutetskii, 1976). 이런 특성을 고려하여 교사는 수학영재들에게 정규과정보다 복잡하고 추상적인 내용을 다루고 여러 기하의 세계를 접하게 하여 고등수학적 사고력과 창의성을 길러주어야 한다(Maker, 1996; Sheffield, 1999). 이에 본 연구에서는 중학교 수학영재들의 수학적 사고력 신장을 위한 교육자료 개발의 일환으로 중학교 수학영재들에게 중심사영을 탐구하고 투시도를 작도하게 하여 이 과정에서 나타나는 수학적 사고특성을 살펴보고자 한다.

누구나 사물이나 장면을 볼 때 원근감을 경험한다. 정확한 원근감 표현을 위한 르네상스 화가들의 원근법(투시도법) 연구는 사영기하학의 발생으로 이어졌다. 그리고 사영기하학의 연구결과는 예술과 건축, 영상산업 등에 활용됨은 물론 도형의 계량적 특성만을 고려하던 유클리드기하학에 대해 도형의 비계량적 특성인 위치적 특성이 도형의 본질적 특성이 될 수 있음을 인식시키는데 기여했으며 무한원점을 도입하여 평행한 직선들이 만난다고 가정해도 모순 없이 기하학적 이론을 전개할 수 있다는 점에서 기하학에 대한 새로운 관점을 제시했다(Kline, 1964).

* 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr
** 한국교원대학교 대학원, km-km@hanmail.net

NCTM(1989, 2000)은 기하교육이 예술, 건축과 같은 다른 영역의 문제를 해결할 수 있도록 하고, 해석기하적, 변환기하적, 벡터기하적, 비유클리드기하적 측면 등의 다양한 관점을 절충하여 이루어져야 한다고 주장하면서 함수적 사고의 함양과 강력한 문제해결을 위한 도구로서의 변환기하를 강조하고 있다.

그러나 현재의 교육과정은 도형의 이동과 같은 변환기하적 내용이 다소 약하며 특히 사영변환은 정사영만을 다루므로 수학영재들조차 도형의 다양한 변환을 경험하지 못한다. 따라서 수학영재들이 중심사영과 같은 도형의 변환을 탐구하고 이 과정에서 사영기하학의 가정까지 접할 기회를 갖는다면 그들은 도형의 성질을 연구하는 새로운 관점을 경험하여 수학에 대한 보다 유연한 시각을 갖게 될 것이다.

공간에서 일어나는 중심사영은 3차원 공간을 역동적인 변화 속에서 탐구할 수 있는 Cabri 3D를 이용하면 효과적으로 학습할 수 있다(김남희, 2006). 또한 중심사영에 의한 다양한 도형의 변환을 탐구한 후 투시도를 작도해 봄으로써 학생들은 스스로 중심사영에 대한 성질을 재인식하여 중심사영에 대한 학습을 확인할 수 있다. 이때 GSP는 정확한 작도를 가능하게 하고 작도 후 각 요소를 드래그(drag)함으로써 역동적인 조작이 가능하여 투시도를 작도하는데 적합하다(Cathi Sanders, 1995).

수학교실에서 공학 도구의 효율적인 활용 여부는 교사에게 달려 있다(NCTM, 2000). 교사가 학생들의 지식습득 과정을 효과적으로 중재하고, 복잡한 지식을 새롭게 구성해 가도록 격려하여 학습을 촉진시키며, 학생들의 독립적인 과제 수행과정에서도 협조자로서 학생들과 활발한 상호작용을 이룰 때 영재학생들의 능력은 최대한 발휘된다(VanTassel-Baska, 1992; Sheffield, 1994; Siege, 2005: 장인옥, 2010에서 재인용). 따라서 영재학생들의 성공적인 학습에서 가장 중요한 요인 중 하나는 교사이다(장인옥, 2010).

본 연구에서는 수학영재들에게 중심사영에 의한 도형의 변환을 탐구하고 투시도를 작도하면서 사영기하학이라는 새로운 기하 체계가 있음을 소개하고 이 과정에서 나타나는 수학영재들의 수학적 사고특성과 학생들의 수학적 지식 구성과 사고촉진을 위한 교사의 역할은 어떤 유형으로 나타나는가를 살펴보고자 한다. 이를 위해 다음과 같이 연구문제를 설정했다. 첫째, 공학도구를 이용하여 중심사영에 의한 도형의 변환을 탐구하고 투시도를 작도하는 과정에서 나타나는 중학교 2학년 수학영재들의 수학적 사고특성은 어떠한가? 둘째, 공학 도구를 이용하여 중심사영에 의한 도형의 변환을 탐구하고 투시도를 작도하는 과정에서 교사의 역할은 어떠한 유형으로 나타나는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 중심사영에 의한 도형의 변환

NCTM(1989)은 기하영역 가운데 해석기하학적, 변환기하적, 벡터기하적, 비유클리드기하적 측면 등의 다양한 관점을 절충한 기하교육을 요구하고 있다. 특히 변환기하는 함수적 사고를 함양하고, 장래 사영기하, 아핀기하, 위상기하 등의 학습을 준비하며, 강력한 문제해결을 위한 도구이자 대수학적인 내용과 기하학적인 내용의 관련성과 공통된 구조를 보여 주는 소재가 되므로 학교수학에 변환기하를 도입해야 한다고 주장하고 있다. 학교 기하에 변환기하를 도입하는 방법에는 변환 및 그 성질을 기하학습의 목표로 설정하는 방법과 유클리드기하를 학습한 후에 변환을 도입하여 새로운 관점에서 통합적인 해석

을 하는 방법이 있다(우정호, 1998).

그러나 현재의 중등학교에서는 도형의 계량적인 성질에 관한 사항만을 중시하는 경향이 있다. 즉 중등학교에서는 유클리드 기하학의 내용을 위주로 다룬다. 하지만 우리는 실제로 비유클리드 기하학적인 성질인 위상적 성질, 사영적 성질 등을 경험하고 있다(곽동애, 기우항, 우경수, 1998).

따라서 변환 기하에 관한 교육은 확대될 필요가 있다. 사영기하학은 변환기하적 성격이 강하다. 그러나 사영기하학은 내용의 난해함으로 인해 그 중요성과 실용성에 비해 중등학교수학에서 차지하는 비중이 매우 낮으므로 이를 개선하는 차원에서 중등교육과정에 사영기하학의 확대도입을 제안하거나(박억성, 1992), 수학영재를 위한 교육 자료로서 사영기하학의 공리를 학습소재로 활용한 연구들이 있었다(이상원, 2004; 전영주, 2010; 이지현, 2012).

이에 본 연구에서는 사영기하학의 배경이 되고 변환기하적인 측면을 다룰 수 있는 중심사영에 의한 도형의 변환과 투시도의 작도를 학습과제로 결정했다.

2. 수학영재의 사고 및 행동 특성에 관한 연구

수학영재아는 사고가 유연하고, 문제를 쉽고 명백하고 간결하게 해결하기를 갈망하며, 인내력이 있으며, 수학적 추론의 가역성 및 사고과정의 신속함과 자유로운 재구성 능력을 갖추고 있다(Krutetskii, 1976).

한국교육개발원(1996)과 황동주(2005)는 수학영재는 수학적 사고능력, 과제집착력, 창의성, 정보수집 능력, 의사소통 능력을 가진다고 하면서 수학적 사고능력은 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추상화 능력, 수학적 추론 능력, 일반화 및 적용 능력, 반성적 사고 능력으로 세분화했다.

홍진곤, 강은주(2009)는 수학영재의 사고특성을 문제에 대한 직관적, 구조적 통찰, 정보처리 과정의 단축과 능숙함, 패턴의 일반화 및 귀납적 추론, 시각적/도해적 추론, 논리적 사고 및 수학적 추상화, 발산적 사고 및 독창성, 방법을 중시하는 심미적인 경향성의 7개 항목으로 분류하기도 했다.

이와 같은 선행연구의 결과를 바탕으로 본 연구에서는 중학교 2학년 수학영재들이 중심사영

<표 Ⅱ-1> 수학영재의 수학적 사고특성에 대한 분석틀

수학적 사고특성	내용
직관적, 구조적 통찰	· 주어진 정보 사이의 관계나 구조를 직감적으로 파악하는 능력 · 문제해결의 결정적인 단서를 순간 떠올릴 수 있는 사고 · 새로운 자료에 대한 빠른 파악 및 자료를 체계화 하는 능력
패턴의 일반화 및 귀납적 추론	· 어떤 문제의 해결방법을 찾고자 할 때 특수한 사례로부터 일반적인 법칙을 도출하는 추론 능력 · 패턴의 차이와 유사성을 발견하는 능력
시각적/도해적 추론	· 시각적 정보를 읽고 이해하고 해석하는 능력 · 주어진 도형을 생생하게 머릿속에 상상하는 능력
논리적 사고 및 수학적 추상화	· 수학적 개념, 과정과 해를 언어적으로 잘 표현하는 능력 및 효과적인 추론 능력 · 양적이고 공간적 관계에 대한 논리적 사고
발산적 사고	· 하나의 문제를 해결하기 위해 다양한 방법을 찾는 능력

과 투시도의 작도 학습에서 나타나는 수학적 사고특성을 <표 Ⅱ-1>과 같이 분류하여 분석하고자 한다.

3. 공학도구의 도입에 따른 교사의 역할에 관한 연구

학생들이 기술공학을 사용할 때 교사의 역할이 좁아지거나 없어진 것처럼 보일지 모른다. 그러나 교사는 기술공학의 사용 여부와 언제, 어떻게 사용할 것인지를 결정하는 중요한 역할을 해야 한다(NCTM, 2000).

Heid, sheets & Matras(1990)은 테크놀로지가 풍부한 고등학교 수업에서 교사는 기술적적 보조자(Technical Assistant), 상담자(Counselor), 협력자(Collaborator)의 역할을 한다고 했다(정수진, 2007; 재인용). Farrell(1996)는 예비미적분의 전통적인 수업과 테크놀로지 통합형 수업의 비교 연구에서 교사의 운영자(Manager)로서의 역할은 비슷하게 나타났으나, 상담자(consultant), 협력자(fellow investigator)라는 새로운 역할이 나타났음을 확인했다. McGhee & Kozma(2003)는 공학 도구를 활용하는 여섯 학교의 사례 연구를 통해 전통적인 교실에서보다 새로워진 교사의 역할은 수업설계자(instructional designer), 훈련자(trainer), 협력자(collaborator), 팀 조정자(team coordinator), 조언자(advisor)의 역할이라고 했다. 여기서 조언자의 역할은 촉진자(facilitator)의 역할이라고도 한다. 또한 윤옥교(2011)은 학생들이 GSP를 이용하여 닮은 삼각형의 대응변 사이에 성립하는 비례적 성질에 기초하여 함수를 작도하는 과정에서 교사는 상담자, 기술적 보조자, 협력자의 역할을 한다고 했다.

이상의 내용을 종합하여 본 연구에서는 교사의 역할을 <표 Ⅱ-2>와 같이 분류하여 분석하고자 한다.

Ⅲ. 연구의 방법 및 절차

본 연구는 수학영재들의 수학적 사고특성과 교사의 역할을 분석하기 위해 결과물보다는 활동과정에서 어떤 반응이 나타나는지 살펴보는데 초점을 맞추고 있으므로 질적 연구로 수행되었다.

1. 연구 대상

연구를 위해 대구광역시 서부교육지원청 영재교육원에서 수학·과학 교과의 영재 수업을 받고 있는 중학교 2학년 학생 2명을 연구 대상으로 선정했다. 면담과 관찰일지를 통한 자세한 학생들의 특징은 다음과 같다.

<표 Ⅱ-2> 교사의 역할에 대한 분석틀

교사의 역할	내용
수업설계자	교사 스스로 수업에서 공학 도구를 효과적으로 사용하기 위해 과제를 설계, 계획, 조직하는 역할
학습촉진자	학생들의 고등 사고 활동을 격려함으로써 교사가 의도하지 않은 새로운 학습으로의 발전은 물론, 새로운 명령어의 필요성을 제언하는 비판적 사고를 이끌어 내는 역할
기술적 보조자	학생들이 하드웨어나 소프트웨어를 다루면서 겪게 되는 어려움을 도와주는 역할
상담자	학생들이 교사의 지원을 원할 때 충고와 도움을 주는 역할. 용기를 북돋워 주거나 격려하고 진단하는 역할 및 비판자(devil’s advocate)의 역할

S1은 초등학교 4학년 때부터 꾸준히 수학·과학 분야의 영재교육 받고 있으며 수학에 대해 강한 자신감과 호감 그리고 과제집착력이 있었다. 연구 과제를 수행하는 동안 S1은 새로운 정보와 지식을 매우 빨리 습득했고 자신의 생각을 논리적으로 설명했으며 공학 환경에 쉽게 적응하여 투시도의 작도에서 GSP를 비교적 쉽게 다루었다.

S2는 중학교 1학년 때부터 2년 동안 영재교육을 받고 있으며 수학에 대한 매우 강한 자신감과 호감이 있었다. S2는 과제집착력도 매우 강했는데, 이는 연구 과제를 수행하는 동안 S1보다 이해의 속도가 느려 다소 힘들어 하면서도 이해가 안 되는 부분에 대해 S1과 교사에게 질문하여 결국 알아내는 모습으로 확인되었다.

2. 연구 설계

학습 과제의 수행을 위해 총 4차시의 수업이 이루어 졌다. 1, 2차시에는 중심사영에 의한 다양한 도형의 변환에 대한 탐구활동이, 3, 4차시에는 투시도의 작도활동이 이루어 졌다. 공학 도구를 이용한 탐구활동은 학생 2명에게 1대의 컴퓨터를 제공하여 상호 간 의사소통을 통해 문제를 해결하도록 했다. 공학 도구를 이용한 활동이 끝난 후에는 개별 활동을 통해 생각을 정리하고 확인 문제를 해결하도록 했다.

예비실험을 통해 수정·보완된 학습지를 이용하여 2013년 9월 중순 약 2주간에 걸쳐 본 실험을 수행했다.

3. 자료 수집

가. 관찰자료

매 활동마다 학생들의 활동 장면을 비디오로 녹화했고 별도의 녹음기를 이용하여 대화를 녹음했다.

나. 문서자료

문서자료는 연구자가 기록한 관찰일지, 학생들이 학습지에 기록한 자료로 구성되었다.

4. 연구 과제

본 연구의 학습 과제는 중심사영에 의한 도형의 변환을 탐구하고 투시도를 작도하는 것이다. 3차원공간도형은 중심사영에 의해 2차원 평면으로 변환되면서 많은 성질들이 바뀐다. 따라서 학생들은 중심사영에 대한 명확한 이해를 위해 다양한 공간도형들이 중심사영에 의해 평면으로 어떻게 옮겨지는가를 자세히 탐구할 필요가 있다. 또한 작도는 학생 스스로 도형의 성질을 재인식하고 도형의 성질에 대한 학습을 확인할 수 있고(장혜원, 1997) 중심사영과 같은 사영기하학의 내용이 건축과 미술에 활용되는 예가 될 수 있으므로 학습 과제에 투시도의 작도를 포함시켰다. 구체적인 활동 내용은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

[활동2]에서 소개된 투시도의 작도에서 주로 이용하게 되는 용어인 소실점, 주소실점, 거리점, 1점 투시도의 뜻은 다음과 같다.

・소실점 : 화면과 한 점에서 만나는 직선 l 이 있을 때, 시선의 위치 E를 지나고 직선 l 에 평행한 직선이 화면과 만나는 점 V를 직선 l 의 소실점이라고 한다([그림 Ⅲ-1]).

・주소실점 : 화면과 수직인 직선들의 소실점이다.

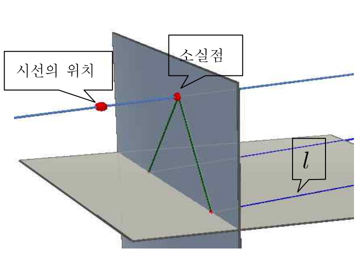
・거리 점 : 화면과 45°인 직선들의 소실점을 거리 점(distance point)이라고 하고, 주소실점과 거리 점 사이의 길이는 시선의 위치에서 화

면까지의 거리와 같다([그림 Ⅲ-2]).

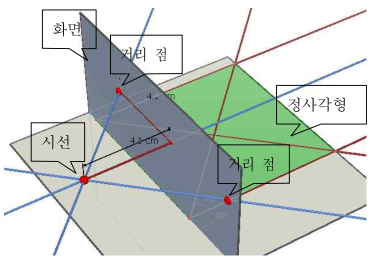
·1점 투시도 : [그림 Ⅲ-3]과 같이 직육면체의 세 방향의 평행한 변들 중 한 방향의 평행한 변들만 소실점을 갖도록 그린 그림이다.

<표 Ⅲ-1> 학습 과제의 주요 내용

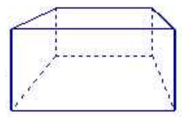
	활동 내용	유의점
활동 1	원근법에 담긴 수학적 원리 찾기	개별학습
활동 2	중심사영의 정의 및 중심사영에 의한 도형의 변환 탐구 - 점, 선분과 직선, 삼각형, 원, 원뿔곡선 등의 다양한 도형의 변환 탐구 - 소실점, 주소실점, 거리 점, 지평선(수평선) 이해 - 유클리드 평면에 무한원점을 추가한 사영평면에서 평행한 직선들이 무한원점에서 만난다는 사영기하학의 가정 이해	2명이 함께 Cabri 3D 파일을 이용하여 탐구
활동 3	중심사영에 대한 문제 해결	개별학습
활동 4	정사각형, 타일, 정육면체의 1점 투시도 작도 및 작도 후 시선과 화면의 위치 변화와 투시도의 모양 변화를 관찰	2명이 함께 GSP 이용하여 작도
활동 5	중심사영에 대한 문제 해결	개별학습



[그림 Ⅲ-1] 소실점



[그림 Ⅲ-2] 거리 점


[그림 Ⅲ-3] 1점 투시도

각 활동들에 대한 자세한 내용은 다음과 같다.

[활동1]은 공간에서 평행한 직선들은 원근법이 나타난 그림과 사진에서 어떻게 표현되어 있는가를 생각해 보면서 앞으로의 학습내용을 개관하는 활동이다. [활동1]의 주요 문항은 [그림 Ⅲ-4]와 같다.

[활동2]는 중심사영에 의한 도형의 변환을 탐구하는 활동이다. 이를 위해 먼저 중심사영의 뜻을 정의하고, 3차원 공간도형이 중심사영에 의해 2차원 평면으로 어떻게 변환되는가를 탐구하도록 한다. 도형의 변환에 대한 자세한 탐구를 위해 도형을 점, 선분과 직선, 삼각형, 원과 원뿔곡선으로 세분화하여 각각의 경우를 미리 예상하고 Cabri 3D로 그린 화면으로 확인하도록 한다. 한 예로 화면과 수직인 평행선들은 화면에 주소실점에서 만나는 직선들로 사영된다. 이 때, 주소실점은 투시도에서 중요하게 활용될 용어이므로 자세히 설명한다. 활동의 일부는 [그림 Ⅲ-5], [그림 Ⅲ-6]과 같다.

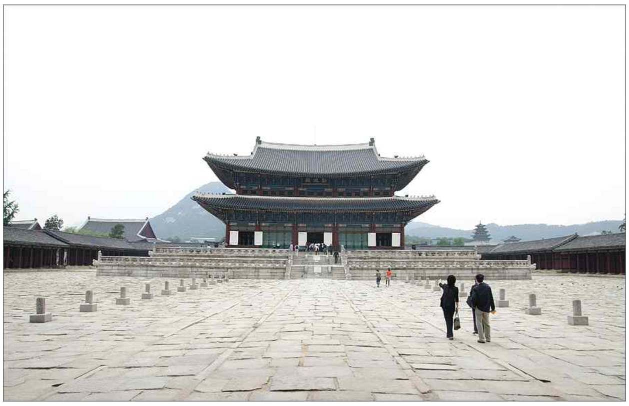
2. 원근법이 잘 나타나는 다음의 그림과 사진을 보면서 물음에 답하여라.

(1) 그림과 사진에서 실제로 평행한 직선들을 찾아보자.

(2) 실제 상황에서 평행한 직선들은 아래와 같은 그림과 사진에서 어떻게 나타나는가?

(3) 실제 상황에서 서로 다른 두 직선들의 교점은 아래와 같은 그림과 사진에서 교점이 되는가?

(4) 원근법을 잘 나타낸 그림과 사진에서 두 직선의 교점은 실제 상황에서도 두 직선의 교점이 되는가?



경복궁 - 근정전

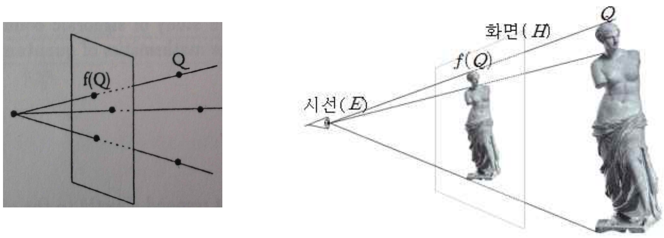
[그림 Ⅲ-4] [활동1]의 일부

(1) 중심사영 : 한 점 E와 E를 포함하지 않는 평면 H에 대하여 $f(Q)=\overleftrightarrow{EQ}\cap H$(점 Q는 $Q\neq E$, $Q\notin H$인 공간의 한 점)를 만족하는 f를 E를 중심으로 하는 중심사영이라고 한다.

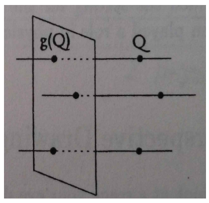
(2) 평행사영 : $\vec{v}\neq 0$ 이고 $H\nparallel\vec{v}$ 인 벡터 $\vec{v}$와 점 Q를 지나고 $\vec{v}$와 평행한 직선 L_Q에 대하여 $g(Q)=L_Q\cap H$를 만족하는 g를 $\vec{v}$ 방향으로의 평행사영이라고 한다.

※ 평행사영은 사영의 중심이 무한히 멀 때의 중심사영과 같다.

(3) 정사영 : 평행사영 중 사영 방향과 화면(view plane)이 수직인 경우이다.



중심사영



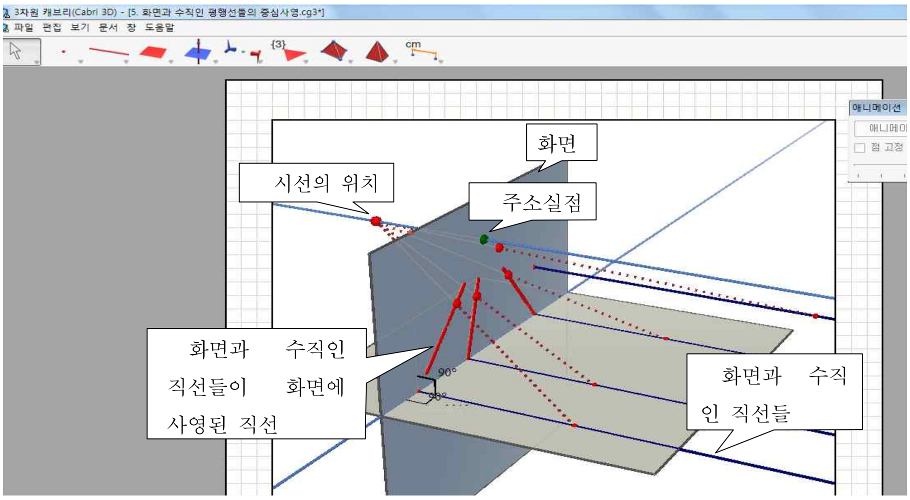
평행사영

[그림 Ⅲ-5] 중심사영과 평행사영의 정의

2. 중심사영에 의해 3차원 공간에 있는 도형이 2차원 화면에 어떻게 옮겨지는지 탐구해 보자. (먼저 예상한 결과를 적어보고, Cabri 3D의 파일을 열어서 확인해 보자.)

(5) **화면과 수직인 평행선들**은 중심사영에 의해 화면의 어떤 도형으로 옮겨지는가?

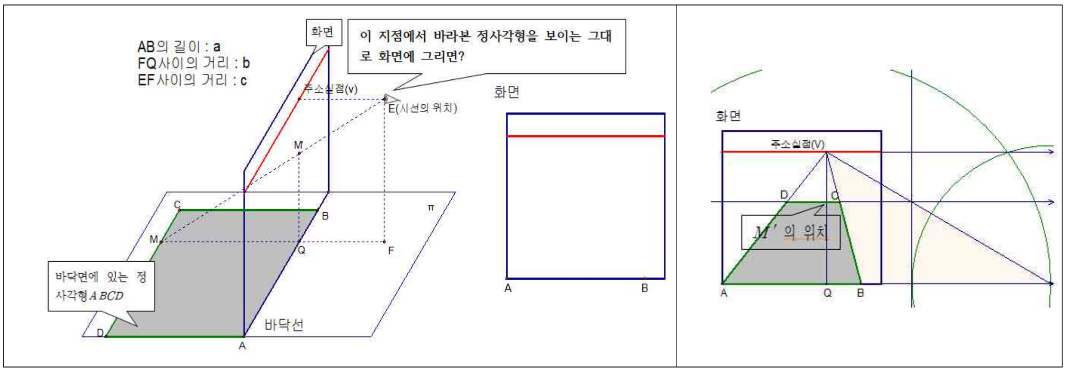
예상	공학 도구를 이용하여 확인 한 후



[그림 Ⅲ-6] 중심사영에 대한 탐구 문제 및 이 과정에서 제시한 Cabri 3D파일

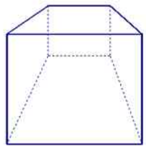
[활동3]을 설명하기 전에 [활동4]를 먼저 살펴보면, [활동4]는 GSP를 이용하여 정사각형, 타일, 정육면체의 1점 투시도를 작도하는 활동이다. 문제에서 제시한 그림과 학생들이 작도한 투시도는 다음의 [그림 Ⅲ-7]과 같다.

마지막으로 [활동 3]과 [활동 5]는 주어진 투시도의 소실점과 시선의 위치를 찾는 문제와 파스칼의 정리를 중심사영의 관점에서 생각해 볼 수 있는 문제 해결 활동이다([그림 Ⅲ-8]).



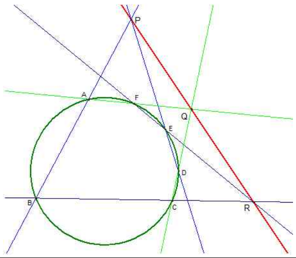
[그림 Ⅲ-7] 정사각형의 1점 투시도의 작도 문제에서 제시한 그림과 학생들이 작도한 투시도

1. 그림은 정육면체의 1점 투시도이다. 소실점을 찾아보고 시선의 위치를 생각해보자.



2. 다음은 고전 사영기하학에서 유명한 정리인 파스칼의 정리이다. 이 정리의 내용이 타원까지 확장될 수 있음을 설명해 보자.

[파스칼의 정리] 하나의 원에 내접하는 육각형에서 마주보고 있는 변들의 연장선은 각각 한 직선 위에 놓인 세 점에서 만나게 된다.



[그림 Ⅲ-8] 중심사영에 대한 문제

Ⅳ. 결과 분석

연구 과제를 해결하는 과정에서 나타나는 학생들의 수학적 사고특성과 교사의 역할을 알아보기 위해 수업에서 나타난 자료를 기초로 이론적 배경에서 제시한 분석틀을 이용하여 분석했다. 학생들의 사고 특성은 중심사영에 의한 도형의 탐구 과정과 투시도의 작도 과정으로 나누어 분석했다.

1. 공학 도구를 이용하여 중심사영에 의한 도형의 변환을 탐구하고 투시도를 작도하는 과정에서 나타나는 중학교 2학년 수학영재들의 수학적 사고특성은 어떠한가?

가. Cabri 3D를 이용하여 중심사영에 의한 도형의 변환을 탐구하는 과정에서 나타나는 수학적 사고특성

[활동2]의 탐구과정에서 학생들은 중심사영에 의해 공간에 있는 직선과 삼각형이 각각 화면에 직선과 삼각형으로 옮겨지는 경우를 쉽게 예상했지만(1.2, 1.11), 직선이 점으로 삼각형이 선분으로 옮겨질 수 있음을 예상하지 못했다. 그러나 교사가 제시한 Cabri 3D의 파일에서 시선을 지나는 직선과 시선을 지나는 평면위의 삼각형의 변환을 관찰한 후([그림 Ⅳ-1]), 직선이 점으로, 삼각형이 선분으로 옮겨질 수 있음을 발견했다. 이 때 S1은 삼각형이 선분으로 옮겨지는 것과 직선이 점으로 옮겨지는 것은 같은 원리임을 추론했고, 같은 현상이 원에서도 일어날 것이라고 생각했다(1.23). S1은 시선을 지나는 도형은 중심사영에 의해 차원이 낮아진다는 사실에 대한 패턴의 일반화 및 귀납적 추론을 했다고 볼 수 있다. 그러나 S1은 원은 곡선이므로 곡선으로 화면에 옮겨질 것으로 예상했고, Cabri 3D의 파일을 통해 확인한 후에도 원뿔곡선의 변환은 정확하게 이해하지 못했다. 이는 본 실험의 대상이 해석기하학적 지식이 부족한 중학생이었으므로 시각적으로 구별이 힘든 포물선과 쌍곡선을 구별할 수 없었기 때문이다.

이상으로 볼 때, 수학영재들은 중심사영의 정의를 적용한 도형의 변환을 기존의 지식과 경험

을 토대로 예상했고 공학 도구를 통해 미처 예상하지 못한 변환을 발견한 후에는 이것을 쉽게 일반화했다. 이 때 Cabri 3D는 학생들의 새로운 발견을 가능하게 하여 사고를 촉진시키는 도구가 되었다.

<u><발췌문 1 : 패턴의 일반화 및 귀납적 추론></u>

1 교사 : 2번 문제도 읽고 예상한 내용을 적어볼까?

2 S2 : 직선 아니에요?

3 교사 : 잘 생각해보고 예상한 내용을 간단히 적어 봐.

(잠시 후)

4 교사 : 그럼 파일을 열어서 확인 해 볼래? 파일 내용 조작이 힘들면 말해. 어떻게 하는지 알려줄게.

5 S1 : 우아. 직선이 점으로 옮겨지는 경우도 있네요.

6 교사 : 어떤 경우에 그렇지?

7 S2 : 잠깐만. 그러니까.. 아아. 직선이 시점을 지나는 경우네요.

8 교사 : 그렇지? 이해가 되니? 이런 경우는 예상하기가 힘들지? 그렇지만 이렇게 공학 도구를 이용하면 쉽게 확인 할 수 있겠지?

9 학생들 : 네. 완전 좋네요. 이 프로그램.

(중략)

10 교사 : 그럼 10번은 어떻게 될까?

11 S1 : 삼각형이 될 것 같네요..

12 교사 : 다른 도형은 될 수 없어?

13 S2 : 네? 다른 도형이 될 수도 있어요?

14 교사 : 그럼 파일로 확인해 볼까? 어때?

15 학생들 : 삼각형이 되네요.

16 교사 : 다른 경우는 없을까?

17 학생들 : 네?

(교사는 학생들에게 삼각형이 그려진 평면을 움직여 보도록 했으나 학생들은 여전히 다른 경우를 찾지 못했다. 한참 후 교사는 삼각형이 선분으로 옮겨지도록 만들어 놓은 파일을 열어 확인하도록 했다.)

18 S1 : 어! 삼각형이 있는 평면이 시선을 지나네요.

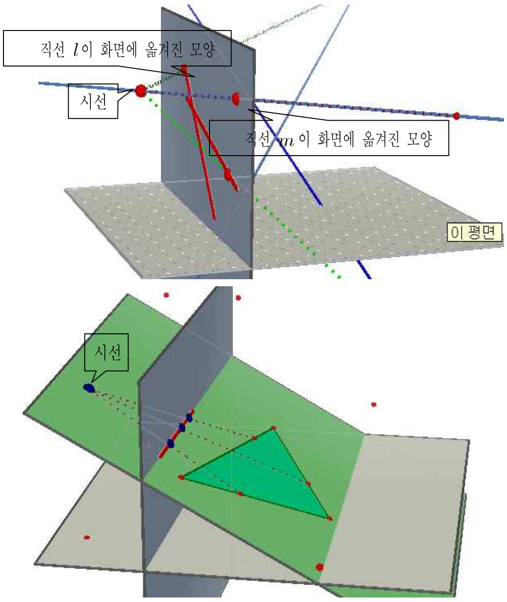
19 교사 : 이 경우는 삼각형이 어떻게 보일지 확인 해 볼래?

20 학생들 : 선분이 되네요.

21 S1 : 어! 아까 시점을 지나는 직선은 화면에 점으로 나타난다고 한 거랑 같은 거네요. 시점을 지나는 직선은 점으로, 시점을 지나는 삼각형은 선분으로.

22 교사 : 그렇지. 잘 생각했어. 11번 볼래? 어떻게 될까?

23 S1 : 방금 삼각형이랑 같은 거 아니에요? 전원 또는 곡선으로 나타날 것 같은데요.



[그림 Ⅳ-1] 시선을 직선과 삼각형의 중심사영

나. GSP를 이용하여 투시도를 작도하고 [활동 5]의 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 수학적 사고특성

<발췌문 2>는 [활동 4]의 1번 정사각형의 1점 투시도의 작도를 시작하는 단계에서 이루어지는 학생들의 대화이다. 문제를 이해한 학생들은 문제의 상황을 머릿속에서 상상하는(2.1) 시각적/도해적 추론을 통해 작도를 시작하기 전 완성된

투시도의 모양이 사다리꼴이 될 것을 예상하고 (2.3) 작도를 시작했으며, 작도를 하는 동안 화면에 나타나지 않는 시선의 위치와 화면과의 관계를 머릿속에 떠올리면서 주소실점을 찾았다(2.7).

<u><발췌문 2 : 시각적/도해적 추론></u>

1 S1 : (학습지를 들고) 바닥에 있는 정사각형을 여기서(어떤 지점을 손으로 가리키며 보이는 듯이) 봤을 때 이 화면에 어떻게 나타날지를 그리는 거네요.
2 교사 : 그렇지.
3 S2 : 사다리꼴로 그려야겠네요.
4 교사 : 그렇겠지. 그럼 뭐부터 생각하고 그려야 될까?
5 S2 : 소실점요.
6 교사 : 그렇지. 문제를 보고 화면에서 소실점을 찾을 수 있겠니?
(잠시 후)
7 S1 : 그렇지. 그러니까 이걸 이쪽에서 보면.. 니가 눈이 여기 있어(손짓으로 표시한다). 그럼 소실점은 여기네. 선생님 이게 주소실점이죠?
8 교사 : 맞아.

화면에서 주소실점을 찾고 직선 AD와 BC가 화면에 옮겨진 선분 AV와 BV를 작도한 후, 학생들은 한참 동안 점 C와 D가 선분 AV와 BV의 어디에 있는지를 찾지 못했다. 학생들이 좀처럼 아이디어를 찾지 못하자 교사는 문제를 다시 한 번 읽고 잘 생각해 볼 것을 권유했고, 문제에서 주어진 그림을 주의 깊게 살펴보던 중 S1은 문득 점 M'을 이용할 수 있음을 발견했다(3.1). 화면에서 M'를 찾기 위해 소실점 V, M', Q가 화면에서 일직선 위에 있음을 이용하여 화면에서 Q를 먼저 찾았다(3.3). 점 Q를 작도한 후에도 점 M'의 위치를 찾는 일은 쉽지 않았지만, S1은 해결의 단서를 꼭 찾겠다는 의지를 가지고 계속 고민하던 중 문제에서 주어진 길이들을 잘 활용하면 M'을 찾을 수 있을 것이라고 생각했다(3.4, 3.6). S1이 문제에 주어진 삼각형 EMF를 그리겠다는 S1의 생각을 확인한 교사는 어디에 삼각형을 그릴지를 물어봤다. 잠시 생각을 하던 S1은 문득 삼각형 EMF를 화면 안에 그릴 수 있음을 생각했다(3.10). 그 후 삼각형 EMF의 변 EF를 화면의 VQ에 대응하도록 하여 점 M'의 정확한 위치를 찾았고([그림 Ⅲ-7]), M'에서 선분 AB에 평행선을 그어 작도를 완성했다.

<u><발췌문 3 : 직관적, 구조적 통찰></u>

(점 C의 위치를 찾아야 하는 상황에서 어려움을 겪고 있는 학생들에게 교사는 문제를 다시 한 번 잘 읽고 생각해 볼 것을 권유했다.)
1 S1 : 문제의 그림을 보면 M'를 찾으면 될 것 같은데.. 이걸 어떻게 찾을까? Q점을 이용하면 될 것 같은데..
2 S2 : Q점을 어떻게 이용해야 될까? QM'와 AB는 수직인데..
3 S1 : 그렇지. 근데 M'의 정확한 위치는 지금 모르는 거지. 그렇지만 소실점 밑에 있겠지.
(잠시 후)
4 S1 : 닮음을 이용하면 안돼요?
5 교사 : 어떻게?
6 S1 : 일단 정사각형이니까 $\overline{MQ}$의 길이를 알고 b의 길이 알고, c의 길이도 아니까 닮은 삼각형을 이용하면 $\overline{M'Q}$의 길이도 알 수 있지 않을까요?
7 교사 : 좋은 생각인데. 그럼 이 삼각형을 그리겠다는 거니?
8 S1 : 그렇죠.
9 교사 : 어디에 그리려고?
10 S1 : 음... (잠시 후) 아아! 바닥선과 지평선까지의 거리가 c니까 VQ가 c가 되니까.. 삼각형 EMF를 옆으로 돌려서 점 E를 V에 오게 하면 F는 Q에 오고, QF의 길이 알고, 정사각형의 한 변의 길이 아니까 그릴 수 있을 것 같은데요([그림 Ⅲ-7]의 오른쪽).

1번의 작도가 완성된 후, 중심사영에서 배운 내용을 이용하는 좀 더 간단한 방법은 없을까?

라는 교사의 발문으로 학생들은 새로운 작도방법을 찾아냈다. 이는 자발적이라고는 할 수 없지만 교사의 간단한 발문에 의해 학생들 스스로 새로운 작도방법을 찾았다는 점에서 발산적 사고가 일어났다고 볼 수 있다. 앞서 학생들은 정사각형의 1점 투시도를 합동인 삼각형을 이용하여 작도했다. 그러나 중심사영에서 탐구한 내용을 잘 이용하면 좀 더 간단히 작도할 수 있고, 중심사영에 의한 도형의 변환을 다시 한 번 탐구할 기회를 가질 것이라는 판단한 교사는 학생들에게 중심사영을 이용하는 더 간단한 작도 방법이 없는지를 질문했다(4.3). 중심사영에 대한 내용을 다시 보면서 한참을 고민한 후 S2는 문득 대각선을 이용할 수 있음을 떠올렸고(4.5), 이를 토대로 S1은 앞에서 학습한 거리 점(distance point)을 이용하여(4.6) 작도를 완성했다([그림 Ⅳ-2]).

이상으로 볼 때, 수학영재들은 문제해결에 대한 강한 과제집착력, 기존의 지식, 교사의 권유에 의한 문제의 면밀한 검토, 다른 학생의 스치는 말도 놓치지 않는 세심함의 통합을 통해 문제해결에 대한 순간적인 통찰을 해낼 수 있음을 알 수 있다. 이 때 작도문제해결에 필요한 주요 단서들은 머릿속에서 생각했고, GSP를 머릿속에서 생각한 해법을 확인하는 도구로 이용했다. 그러나 GSP를 통해 자신들 생각을 곧바로 확인한 학생들은 자신들의 생각에 확신을 갖고 다음 단계로 넘어갔다.

<발췌문 4 : 발산적 사고>

1 교사 : 지금까지는 여러분들에게 익숙한 합동인 삼각형을 이용해서 점 C, D가 화면에 어떻게 옮겨졌는지를 알아냈죠? 이렇게 찾으니까 C, D를 찾는 과정이 상당히 복잡하지?

2 S2 : 네.

3 교사 : 그럼 더 간단한 방법은 없을까? 중심사영에서 배운 내용을 다시 한 번 확인해 보면서 생각해 볼 수 있을 것 같은데.

4 교사 : 이미 작도를 한 번 해 봤으니까 어떤 모양이 될지 알겠지?(중략 : 교사는 학생들에게 이미 작도한 답을 숨겨놓고 다시 한 번 작도를 하도록 한다.)

(한참 후)

5 S2 : 대각선을 이용해야 될 것 같은 감이 딱 오긴 한데.. 어떻게 할지..

6 S1 : 거리 점을 이용하면 될 것 같네요. 주소실점에서 b 만큼 떨어지면 되겠고..

7 교사 : 거리 점은 무엇의 소실점이었어.

8 S1 : 화면과 45° 되는 점의 소실점이요.

9 교사 : 그렇지.

10 S2 : 대각선이 45° 잖아.

11 교사 : 그럼 대각선이 화면에 나타나는 지 알 수 있어?

12 학생들 : 그렇죠.

13 S1 : 거리 점이 여기니까 대각선을 포함한 직선을 이렇게 이으면 되는 거죠? 맞죠?

14 교사 : 일단 해보면 알 수 있지 않을까?

15 S1 : 맞네 맞네. 그럼 변과 대각선의 교점이.. 아아. 봐봐. 정사각형에서 점 C는 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 교점인 거잖아. 그리고 교점은 교점으로 옮겨질 테니까.

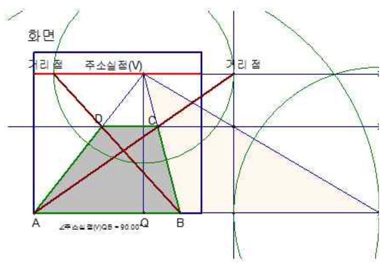
(작도를 시작한다.)

16 교사 : 작도를 다 했으면 아까 숨긴 도형 보이게 해서 확인해 볼래?

17 S1 : 어떻게 보이게 해요?

18 교사 : 마우스 오른쪽을 클릭해봐. 중간쯤에 있는 숨겨진 개체모두 보이기 눌러보면 돼.

19 학생들 : 어! 똑같네요.



[그림 Ⅳ-2] 거리 점을 이용한 작도

거리 점을 이용한 정사각형의 1점 투시도의 작도까지 완성된 후, 교사는 학생들에게 시점의 위치를 이동하면서 작도한 투시도가 어떻게 되는지 확인해 보도록 했다. 학생들은 시점을 움직이면서 우선 자신들이 잘못 작도한 부분을 찾아 수정했고(5.4, 5.6) 시점의 위치와 화면의 관계가 변하면 같은 도형의 투시도가 다르게 될 수 있음을 확인했다(5.10). 이 과정에서 학생들은 시점과 화면의 위치관계에 따라 투시도의 모양(투시도에서 변의 길이와 각)이 변하고(5.17) 거리 점의 위치는 변하지만 주소실점과 거리 점 사이의 길이는 시점과 화면 사이의 길이와 항상 같음을 이해했다(5.19). 또한 평행한 직선들은 여전히 같은 소실점을 가지며 직선들의 교점은 여전히 교점이 되는 변하지 않는 성질이 있음을 이해했다. 이를 통해 학생들은 선분의 길이와 각의 크기뿐만아니라 도형의 위치관계 역시 도형의 성질이 될 수 있음을 경험할 기회를 갖게 되었다.

<발췌문 5: 논리적 사고 및 수학적 추상화>

1 교사 : 이제 시점인 점 E를 옮겨 볼래?
2 S1 : 위아래로 밖에 안 옮겨지는데요.
3 교사 : 그럼 일단 위아래도 옮기면서 정사각형의 투시도가 바뀌는지 한 번 살펴볼래?
4 S1 : 어! 시점을 옮기니까 투시도가 망가져요. 왜 그렇죠?
5 교사 : 뭔가 문제가 있니?
6 S1 : 교점을 잘 못 찍은 것 같아요. 수직선도요.. 근데 고칠 수 있을 것 같아요. 일단 해볼게요.
7 교사 : 그래. 혹시 교점 찍기가 애매하면 작도 메뉴의 교점을 이용해.
8 S1 : 아. 네..
(잠시 후)
9 교사 : 이제 되니? 그럼, 시점을 움직이면서 투시도 다시 확인해 볼래?
10 S2 : AD, BC가 달라지네요. 길이도 변하고.. 지평선 높이도 달라지고..
11 S1 : 지평선 높이는 시점 높이랑 같아서 그렇겠네요.
12 교사 : 그럼 AB와 AD사이의 각은 어때?
13 S2 : 달라져요.
14 교사 : 이제 F를 움직여 볼래?
15 S1 : 어! E도 같이 움직이네요.
16 교사 : 그렇지. 그건 E를 F를 이용해서 그렸기 때문이야. 지난 번 GSP 수업 때 확인해 봤지? E가 움직여지면서 투시도는 어떻게 돼?
17 S2 : 거리 점이 움직여요. 그리고 길이랑 각도 달라지네요..
18 교사 : 그런데 거리 점은 왜 움직일까?
19 S1 : 거리 점을 선분 FQ랑 같아서 그렇죠?

1번의 작도를 힘들게 완성하면서 학생들은 공간에서 평행한 직선들의 소실점이 같다는 사실을 명확하게 이해했다(6.7, 6.14). 이는 평행선들의 소실점에 대한 일반화가 일어났다고 볼 수 있다. 그 결과 정사각형 안에 16개의 작은 정사각형이 타일 모양을 이루고 있는 타일의 투시도와 정육면체의 투시도는 큰 어려움 없이 완성했는데([그림 Ⅳ-3]), 이것은 수학영재들의 유사한 상황에 대한 뛰어난 적응능력을 보여준다.

<발췌문 6 : 패턴의 일반화 및 귀납적 추론>

1 S1 : 2번은 1번보다는 쉬울 것 같아.
2 S2 : 쉽다고?
3 S1 : 1번에서 바깥 선은 다 작도해 봤으니까 똑같이 하면 되고..
(중략)
4 S2 : 대각선을 그린 다음에는 어떻게 해?
5 S1 : 1번 문제와 같은 방법으로.
6 교사 : 오오. 잘 했네. 왜 그런 선들을 여러 개 그렸어?
7 S1 : 대각선끼리는 다 평행하니까 소실점이 모두 같아서요.
(중략)
8 S1 : 다음엔 거리 점을 이용해서 대각선을 긋고...
9 S2 : 밑변은 다 그렸으니까 이제 윗면의 화면과 만나는 이 꼭짓점부터 그리면 되지? 이게

정육면체니까 거리를 똑같이 해서..

10 S1 : 맞네. 화면과 만나니까.

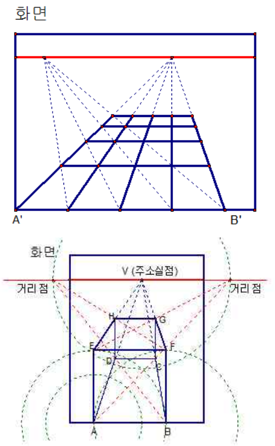
11 교사 : 잘하고 있네. 이제 뭐만 찾으면 되지?

12 S1 : 윗면의 뒤쪽에 있는 꼭짓점만 찍으면 돼요.

(잠시 고민한 후 S1은 화면과 만나는 윗면의 꼭짓점과 거리 점을 잇는다.)

13 교사 : 잘 했네. 왜 그렇게 했지?

14 S1 : 윗면도 정사각형이니까 거리 점을 이용하면 되잖아요.



[그림 Ⅳ-3] 학생들이 작도한 타일과 정육면체의 1점 투시도

작도 활동이 모두 끝난 후 제시한 [활동5]의 2번은 파스칼의 정리에 대한 문제였다. 본 연구의 대상 학생들에게 기존의 지식과 앞서 학습한 내용만으로 파스칼의 정리에 대한 증명이나 정당화는 힘들 것으로 판단한 교사는 문제의 초점을 정리의 내용이 원에서 타원으로 확장될 수 있는 이유를 찾는데 두었다. 중심사영과 투시도의 작도를 학습한 학생들은 [그림 Ⅳ-4]와 같이 답안을 작성하여 중심사영에 의해 원이 타원으로 직선이 직선으로 옮겨 질 때, 직선 위의 점은 역시 옮겨진 직선 위에 있으며 직선의 교점은 직선의 교점으로 옮겨지는 도형의 관계를 이해하고 있음을 보여 줬다.

원을 중심사영시키면 타원이 되는데 이때 원위의 직선이나 다른 직선들도 모두 직선이 된다. 그러면 타원일 때도 마주보는 변의 연장선의 교점들이 한 직선 위에 있게 된다.

S1의 답

[그림 Ⅳ-4] [활동5]의 2번 문제와 학생 답안

2. 공학 도구를 이용하여 중심사영에 의한 도형의 변환을 탐구하고 투시도를 작도하는 과정에서 교사의 역할은 어떠한 유형으로 나타나는가?

가. 수업설계자

학교수학에서 변환기하 교육은 확대되어야 하고(NCTM, 1989; 우정호, 1998), 사영기하학의 내용은 수학영재들의 다양한 수학적 사고를 촉진시키고 수학에 대한 안목을 넓힐 수 있다(전영주, 2010; 이지현, 2012). 이를 바탕으로 본 연구의 연구자인 교사는 중심사영에 의한 도형의 변환을 학습 과제로 결정하고, 중심사영에 의한 다양한 도형의 변환 탐구, 투시도의 작도, 중심사영에 대한 문제의 해결로 학습 활동을 세분화했다.

학생들의 사고를 활성화 시킬 수 있는 활동을 구성하기 위해 본 연구자는 실험대상자들이 참여하고 있는 영재원에서 강사로 수업하면서 파악한 연구 대상자들의 특성을 토대로 학습 활동을 계획했다. 중심사영에 의한 도형의 변환에 대한 탐구 범위와 순서, 그리고 정사각형, 타일 정육면체의 투시도 작도 활동은 학생들의 일반화 및 귀납적 추론 등을 염두에 두고 구성했다. GSP를 이용한 작도 문제의 해결과정에서 수학영재들은 문제해결 전략을 학습하고 문제해결 능력이 향상될 수 있으며(김상훈, 2007), 작도 후 시선의 위치에 따른 투시도의 변화를 관찰하면서 같은 도형이 중심사영에 의해 선분의 길이와 각의 크기가 다른 도형으로 변환될 수 있음을

체험하고 이러한 변화 속에서도 변하지 않는 도형의 성질을 발견할 수 있다. 또한 이를 통해 학생들이 도형의 성질에 대한 새로운 시각을 갖게 될 수도 있을 것이라는 판단에서 투시도 작도에 GSP를 이용하도록 했다.

자료의 적절성을 검증하기 위해 2013년 7월 예비실험을 실시한 결과, 예비실험의 대상 학생들은 일상생활에서 경험하는 원근법이 수학적 탐구 소재가 된다는 사실을 신기해하며 학습 과제에 흥미를 보였다. 그러나 학생들은 지필환경에서 중심사영에 의한 도형의 변환을 이해하는데 어려움을 겪었고 이것은 작도의 어려움으로 이어졌다. 이를 해결하기 위해 교사는 중심사영에 의한 도형의 변환 학습에서 Cabri 3D를 이용하기로 결정했다. 그리고 두 가지 공학 도구의 사용에 따른 학생들의 부담을 줄이기 위해, 중심사영을 탐구하는데 필요한 Cabri 3D의 파일을 미리 만들어 제시하여 학생들은 간단한 드래그(drag)만으로 탐구하고자 내용을 확인할 수 있도록 했다.

나. 학습촉진자

3차원 공간이 중심사영에 의해 2차원 평면으로 옮겨질 때, 중심을 지나는 직선과 평면은 각각 점과 직선이 되고 이들은 사영평면에서 점과 직선으로 정의되어 사영기하의 이론을 전개해 나가는 기초가 되므로, 중심사영을 학습할 때 차원이 보존 되지 않는 경우에 대해 탐구할 필요가 있다. 그러나 학생들이 중심사영에 의해 차원이 보존되지 않는 경우를 생각하기는 쉽지 않다. 학생들의 특성 파악을 통해 이런 상황을 미리 예측한 교사는 이에 대한 파일을 따로 만들어 필요할 경우를 대비했다. 그러나 교사는 가능하면 학생들이 직접 발견하길 바라며 다른 파일을 먼저 제시해 학생들이 파일의 점과 직선들을 움직이면서 위의 성질을 발견할 수 있는 기회를 다시 한 번 주었고(1.4), 그래도 발견을 하지 못하자 따로 만들어 놓은 파일을 제시하여 직선이 점으로 삼각형과 원이 선분으로 옮겨짐을 확인하도록 했다(1.18). 이를 통해 학생들은 중심사영에 의한 도형의 변환에 대해 보다 구체적인 부분까지 탐구했고, 중심을 지나는 직선과 평면은 중심사영에 의해 차원이 보존되지 않는 현상이 일어난다는 사실을 이해하고 가능한 범위에서 일반화가 일어났다(1.21).

투시도의 작도 과정에서 교사는 어디서부터 시작할지 망설이는 학생들이게 쉬운 것부터 시작해 볼 것을 권유하여 작도를 시작하게 했다(2.4). 그 후 학생들이 점 C, D를 찾기를 어려워하자 교사는 지난 시간에 학습한 내용을 다시 한 번 잘 생각해 보도록 하여 학생들이 스스로 작도의 방법을 찾도록 했다. 학생들이 정사각형의 1점 투시도의 작도를 완성한 후에는 "더 간단한 방법은 없을까?"라고 발문하여(4.3) 학생들이 중심사영을 이용한 더 간편한 작도법을 찾도록 했다. 정사각형의 1점 투시도의 작도가 완전히 끝난 후, 학생들에게 시선의 위치를 움직여 보면서 작도된 도형을 관찰하고 중심사영에서 중심이 변함에 따라 사영된 도형의 모양이 어떻게 변하는 지를 확인하도록 하여 학생들은 시점의 위치변화와 투시도의 변화를 시각적으로 확인하면서 시점과 투시도의 관계를 좀 더 명확하게 이해했다.

이상과 같이 투시도의 작도과정에서 교사는 다양한 발문을 통해 학생들의 작도 활동을 촉진시켰다. 그러나 지우기 기능이 있는 GSP가 다양한 시행착오를 통해 작도활동을 촉진할 것이라는 교사의 기대와 달리 투시도의 작도과정에서 학생들은 GSP를 자신들이 머릿속에서 계획한 것을 실행하고 확인하는 정도로 이용했다.

다. 기술적 보조자

본 연구에서 처음으로 Cabri 3D를 접하는 연구대상 학생들을 위해, 교사는 점의 드래그, 화면 돌리기, 흔적지우기, 애니메이션 정도의 간단한 기능만 익히면 원하는 탐구를 할 수 있도록 제작한 파일을 제공하고, 탐구 활동에 필요한 기능을 간단히 설명하고 몇 번 시범을 보인 후 학생들에게 직접 조작을 하도록 했는데 학생들은 처음 보는 프로그램에 대한 거부감보다는 오히려 입체도형을 실감나게 표현 해 주는 기능에 대해 신기해했고(1.9) 쉽게 적응했다.

<발췌문 7>에서는 GSP의 기능에 대한 보조자의 역할을 확인할 수 있다. 학생들은 주어진 선분의 길이를 반지름으로 하는 원을 작도하는 방법을 알고자 했고 교사는 중심과 반지름을 지정하여 원을 작도할 수 있음을 알려줬다(7.4).

수학영재 학생들은 공학 도구의 사용에 대한 거부감이 거의 없었고 한 번 배운 사용법은 잘 기억하고 비슷한 상황에 대한 적용능력도 뛰어나 교사의 기술적 보조자 역할은 기대보다 크지 않았다.

<발췌문 7 : 교사의 기술적 보조자 역할>

1 S1 : AQ의 길이를 어떻게 그리지?

2 S2 : AQ랑 같은 거리의 점을 찾으려면 원의 반지름을 이용하면 되는데..

3 S1 : 반지름을 알면 원을 그릴 수 있어요?

4 교사 : 영재원 수업시간에 그려봤잖아. 원의 중심이 될 점을 선택하고 선분 AQ를 택한 다음 작도 메뉴에서 중심과 반지름의 길이가 주어진 원을 클릭하면 그려져.

라. 상담자

투시도의 작도는 학생들이 경험했던 작도보다 길고 복잡한 과정을 거치야 했다. 따라서 학생들은 자신들의 노력이 실패로 돌아가 또 다시 복잡한 과정을 거치게 될 것을 우려하여, 작도를 하는 도중에 교사에게 자신들의 작업이 바르게 진행되고 있는지를 확인받으려고 했다(8.7). 이에 교사는 긍정의 답을 바로 주기도 하고, 좀 더 진행해 보면 알 수 있을 것이라는 답을 주기도 하면서(8.8) 학생들이 자신감을 가지고 작도를 계속해 나갈 수 있도록 했다. 즉, 수학영재에게도 필요한 순간 교사의 적절한 개입은 학생들의 사고촉진에 도움이 되었다.

<발췌문 8 : 교사의 상담자 역할>

1 교사 : 거리 점은 무엇의 소실점이었어.

2 S1 : 화면과 45° 되는 점의 소실점이요.

3 교사 : 그렇지.

4 S2 : 대각선이 45° 잖아.

5 교사 : 그럼 대각선이 화면에 나타나는 지 알 수 있어?

6 학생들 : 그렇죠.

7 S1 : 거리 점이 여기니까 대각선을 포함한 직선을 이렇게 이으면 되는 거죠? 맞죠?

8 교사 : 일단 해보면 알 수 있지 않을까?

9 S1 : 맞네 맞네. 그럼 변과 대각선의 교점이.. 아아. 봐봐. 정사각형에서 점 C는 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 교점인 거잖아. 그리고 교점은 교점으로 옮겨질 테니까.

교사는 학생들의 생각을 비판하는 역할도 했다. 정사각형의 1점 투시도를 작도하는 과정에서 학생들은 점 C, D를 찾기 위해 길이를 계산하려고 했다. 그러나 투시도의 작도는 중심사영의 원리를 탐구하는 관점에서 제시했고 작도란 원래 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용하는 것이므로 교사는 학생의 생각을 비판하여(9.5) 학생들의 도형의 관계에 대한 통찰을 이끌어 냈다.

<발췌문 9 : 교사의 상담자 역할>

1 교사 : 잘했네. 거의 다 됐네. 이제 뭐만 찾으면 작도를 완성할 수 있을까?

2 S1 : 점 C요.

3 교사 : 그렇지. 그건 어떻게 찾을까?
4 S1 : 길이를 계산하면 안돼요?
5 교사 : 길이를 직접 구할 수도 있지만.. 그럼 길이가 바뀔 때 마다 다시 재서 그려야 되니까 도형의 관계를 이용하면 좋을 것 같은데.. 문제를 다시 잘 읽어 보고 생각해 볼래?
6 S1 : 문제의 그림을 보면 M' 를 찾으면 될 것 같은데.. 이걸 어떻게 찾을까? Q 점을 이용하면 될 것 같은데..

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 중심사영에 의한 도형의 변환과 투시도의 작도 학습은 중학교 수학영재들에게 수학에 대한 새로운 시각과 다양한 수학적 사고의 경험을 제공 했다. 학생들은 원근법에 수학적 원리가 담겨있다는 사실과 합동변환, 닮음변환 이외의 도형의 변환을 학습하는데 호기심을 가지고 적극적으로 참여했다. 그리고 일상생활에서 경험하는 투시원리가 중심사영이라는 수학적 개념이 되어 새로운 수학적 성질을 만들어 내고 사영기하라는 더욱 추상적인 수학으로 발전해 나간다는 사실을 알게 되어 수학에 대한 시각을 바꾸게 되었다고 반응했다. 또한 투시도의 작도과정에서는 학생들의 다양한 수학적 사고가 활발하게 나타났다. 따라서 중심사영과 투시도의 작도는 중학교 수학영재들의 학습 자료로 적합한 것으로 판단된다.

둘째, 3차원 공간을 시각화한 기하 소프트웨어인 Cabri 3D는 학생들이 중심사영에 대한 개념을 보다 정교화 하는데 유용한 도구로 활용되었다. 중심사영의 정의를 학습한 학생들은 중심사영에 의한 일반적인 도형의 변환을 이해했으나, 시선을 지나는 직선과 삼각형의 변환, 화면과 45°를 이루는 직선들의 소실점 그리고 곡선의 변환과 같은 특수한 경우는 쉽게 이해하지 못했다. 이 때 Cabri 3D는 시각적이고 직관적인 검토를 가능하게 하여 학생들이 중심사영을 이해하는 강력한 도구로 작용하여 학생들이 시선을 지나는 도형의 변환에 대해 일반화를 할 수 있도록 했다. 그러나 포물선과 쌍곡선처럼 시각적으로 구별이 힘든 곡선의 경우는 Cabri 3D만으로는 부족하며 해석기하적인 방법으로 확인하는 절차가 필요할 것이다.

셋째, 수학영재들은 투시도를 작도하고 이를 관찰하는데 역동적인 기하 소프트웨어인 GSP를 유용하게 활용했다. 학생들은 작도의 아이디어를 주로 사고과정을 통해 찾아냈으나 이를 GSP로 곧바로 확인하면서 자신들의 생각에 확신을 갖고 다음 단계로 나아갔다. 작도를 완성한 후에는 시선의 위치를 움직여 투시도의 변화를 직접 확인하면서 같은 도형도 변환된 후 선분의 길이와 각의 크기가 바뀔 수 있음을 이해했다. 이를 통해 학생들은 선분의 길이와 각의 크기가 도형의 본질이 아님을 받아들일 토대를 마련했다.

넷째, 본 연구의 학습 과정에서 교사는 학생들의 사고를 촉진시키기 위해 다양한 역할을 하며 학생들의 수학적 지식 형성에 기여했다. 수학영재들도 교사가 제시하는 학습 과제와 제시 방법에 따라 문제해결에 필요한 사고를 하게 된다. 그러므로 교사는 그들의 사고가 활발하게 일어날 수 있는 적절한 학습 과제를 선정하고 이를 잘 해결할 수 있는 방법 및 도구를 제시해야 할 것이다. 학생들이 학습을 하는 과정에서는 적절한 발문과 도움을 주며 학생들의 사고를 이끌어 내고 학습 후에는 학생들이 자신들의 학습에 대한 의미를 잘 부여할 수 있도록 해야 할 것이다.

본 연구의 결론을 토대로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 중심사영에 관한 학습과제를 고등학교 영재들에게 투입한다면 보다 풍부한 탐구거리를

제공할 것이다. 중학교 2학년 수학영재들이 공간 도형에 대한 증명이나 원뿔곡선의 변환을 자세히 학습하는 것은 지나친 속진의 우려가 있으므로, 본 연구에서는 중심사영에 대한 도형의 변환을 구체적으로 증명하거나 원뿔곡선에 대한 자세한 학습이 이루어 질 수 없었다. 따라서 고등학교 수학영재들을 대상으로 중심사영에 대한 학습이 이루어진다면 도형의 변환에 대한 증명이나 연역적 정당화가 가능하고, 논증기하적 방법과 해석기하적 방법을 모두 적용할 수 있어 원뿔곡선의 변환을 탐구할 때 해석기하적인 방법을 이용하여 포물선과 쌍곡선과 같이 시각적으로 구별이 힘든 도형까지 정확하게 학습할 수 있을 것이다.

둘째, 중심사영에 의한 도형의 변환을 이해한 학생들이 좀 더 다양한 투시도를 작도해 본다면 학생들은 수학이 미술과 건축과 같은 다른 영역에 활용되는 사례를 직접적인 경험을 통해 확인하고 수학의 유용성을 더욱 실감할 것이다.

셋째, 본 연구에서는 변환기하와 함수적 사고의 관계에 대한 분석을 다루고 있지 않으므로 변환기하가 학생들의 함수적 사고에 미치는 영향에 대한 후속연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

곽동애, 기우항, 우경수(1998). 변환에 의한 기하교육. **경북대학교 과학교육연구소, 22**, 51-78.

김남희(2006). 문제해결력 신장을 위한 Cabri 3D의 교육적 활용. 대한수학교육학회지 **수학교육학연구, 16**(4), 345-366.

김상훈(2007). **작도를 활용한 수학영재 교육 자료의 개발 및 적용**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김홍원, 김명숙, 송상헌(1996). **수학 영재 판별 도구 개발 연구(Ⅰ) - 기초연구편**. 서울:한국교육개발원.

나귀수(2000). 영재교육 : 수학 영재교육 프로그램 개발을 위한 연구: 렌줄리 3부 심화 학습 모형을 중심으로. 대한수학교육학회지 **학교수학, 2**(1), 311-331.

박억성(1992). **고등학교 수학교과 과정에서의 사영개념 도입방안 연구**. 건국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울; 서울대학교출판문화원.

윤옥교(2011). 역동적 기하 환경에서 비례를 이용한 중학교 함수의 작도. 대한수학교육학회지 **학교수학, 13**(1), 19-36.

이상원(2004). **사영기하학과 문제설정을 통한 효율적인 문제해결**. 아주대학교 박사학위 논문.

이지현(2012). Lakatos의 관점을 반영한 수학영재 대상 교수단원 개발연구-데자르그 정리와 무한원점을 중심으로-. **한국수학사학회지, 25**(2). 57-70.

장인옥(2010). **LOGO를 이용한 프로젝트 학습에서 나타난 초등 수학 영재 학생들의 전략적 사고와 교사 역할**. 한국교원대학교 박사학위 논문.

장혜원(1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰. 대한수학교육학회지 **수학교육학연구, 7**(2), 327-336.

전영주(2010). 수학영재를 위한 기하 프로그램 설계 및 교수전략. **한국학교수학회논문집, 13**(2), 225-241.

정수진(2007). **역동적기하환경에서 중학생을 대상으로 분석법을 이용한 증명학습에 관한 연구 : 작도문제를 중심으로**. 한국교원대학교 석사학위 논문

황동주(2005). **수학 영재 판별의 타당도 향상을 위한 수학 창의성 및 문제 해결력 검사 개발**

과 채점 방법에 관한 연구. 단국대학교 박사 학위 논문.

Cathi Sanders (1995). *Perspective Drawing with the Geometer's Sketchpad*. Key Curriculum Press, C.A.

Farrell, A. (1996). Roles and behaviors in technology integrated pre-calculus classrooms. *Journal of Mathematical Behaviour*, 15, 35-53.

Jennings, G. (1994). *Modern geometry with applications*. Springer.

Kline, M. (1964). Mathematics in western culture. Oxford University Press. 박영훈 역(2005). **수학, 문명을 지배하다**. 서울; 경문사.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilites in School Children*. Trans. J. Teller. Eds. J. Kilpatrick & I. Wirszup. Chicago: The University of Chicago Press.

Maker, C., & Schiever, S. W. (1989). *Defensible Programs for Cultural and Ethnic Minorities. Critical Issues in Gifted Education*. Volume II. Pro-Ed, 8700 Shoal Creek Boulevard, Austin, TX 78758.

McGhee , J, J. (1998). Interactive Technology and Classic Geometry Problems. *The Mathematical teacher*, Vol. 91. No. 3, pp. 204-208.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Sheffield, L. J. (1999). *Developing Mathematically Promising Students*. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1593.

A Study of Mathematically Gifted Middle School Students' of Mathematical Thinking and the Teacher's Role in Teaching and Learning about the Central Projection and Perspective Drawing

Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)
Kang, Kyung Min (Graduate School, Korea National University of Education)

This study is to analyze mathematically gifted middle school students' characteristics of mathematical thinking and the teacher's role in teaching and learning about the central projection and perspective drawing. And it will help to develop teaching and learning materials for the mathematically gifted. The result of this study is as followings : mathematically gifted middle school students show the various characteristics of mathematical thinking like as intuitive insight, generalization, logical thinking & mathematical abstraction and so on, and the teacher plays roles as instructional designer, facilitator, technical assistant and counselor.

* Key Words : central projection(중심사영), perspective drawing(투시도), mathematically gifted(수학영재), mathematical thinking(수학적 사고), teacher's role(교사의 역할)

논문접수 : 2013. 11. 10
논문수정 : 2013. 12. 15
심사완료 : 2013. 12. 20