대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 4, 847 ~ 866. Dec 2013

평면도형의 넓이 수업에서 학생들의 다양한 해결 방법에 근거한 교사의 형식화 도출 과정 분석

김 상 화* · 방 정 숙** · 정 유 경***

본 연구는 평면도형의 넓이 구하기 수업에서 드러나는 학생들의 다양한 해결 방법을 분석하고, 이 다양한 방법으로부터 의미 있는 형식화가 이루어지기 위한 교수-학습 상의 시사점을 알아보고자 하였다. 수업에서 교사는 학생들이 찾은 여러 해결 방법 중 형식화를 도출하기 쉽거나 학생들이 이해하기에 용이하다고 판단되는 것을 선택하여 몇 가지 방법에서 형식화 과정을 드러내려고 하였다. 해결 방법 및 형식화 과정을 분석한 결과 의미 있는 형식화가 되기 위해서는 우선 평면도형의 넓이를 구하기 위해 어떤 조건을 알아야하는지를 살펴보고 밑변, 높이, 대각선에 대한 명확한 개념의 형성과 관계 이해가 이루어져야 한다는 것을 알 수 있었다. 또한 많은 학생들이 찾은 해결 방법 중에서 변형된 도형이나 보존 방법 등이 가능하면 다양하면서도 최대한 간결한 식으로 표현이 가능한 것을 선택하여 형식화를 유도하는 것이 효율적임을 알 수 있었다. 이와 같은 연구 결과를 토대로 학생들의 다양한 해결 방법 중에서 합리성과 간결성을 고려한 형식화 과정이 의미 있게 드러나게 하기 위한 교수-학습 상의 시사점을 제시하였다.

I. 서 론

교육부에서 공교육의 신뢰회복과 미래 역량을 갖춘 인재 양성을 위해 창의성과 인성 함양을 강조하면서 수학교육에서도 창의성 신장에 기여할 수 있는 방안에 관심이 모이고 있다. 수학교육에서 강조하는 창의성은 새로운 지식을 창조하기보다 기존에 이미 알고 있는 지식을 바탕으로 수학적 지식을 재발견하기 위한 힘이다. 그러기 위해서는 수학 수업에서 전 학년, 혹은 전 단원에서 연결되는 학습 내용을 파악하고, 학생들이 기존에 알고 있는 것으로 생각하는 힘을 길러 배울 내용의 개념이나 원리를 탐구하는 과정이 중요시되어야 한다. 이때, 학생들이 스스로 혹은 협력해서 발견한 다양한 해결 방법을 존중하고 격려하여 학생들이 찾은 아이디어를 이해하고 공유하며 자신의 아이디어와 비교분석하는 반성적 사고과정을 거쳐 더 나은 방법을 찾아내는 과정이 매우 중요하다.

그러나 식이 도출된 과정을 살펴보기보다 공식이라 칭하는 알고리즘을 암기하고 이를 단순 적용하는 문제해결 위주로 선행 학습을 한 학생들이 많고, 학교 교실에서조차 이러한 형태의 수학수업이 이루어지는 경우가 있다. 이럴 때는 학생자신의 방법을 찾고 원리를 탐구해보려는 태도조차 갖기 힘들게 된다. 이런 학습형태가 반복되면 학생들은 수학수업에서 수학적 사고력 및

* 용인산양초등학교, exit90@dreamwiz.com
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr (교신저자)
*** 한국교원대학교 대학원, zucchini60@naver.com

창의력을 신장시킨다는 것은 어려우며 현실적으로 이러한 문제가 개선되기 쉽지 않은 실정이다. 이러한 측면은 여러 내용 영역에 걸쳐 일어날 수 있는데, 본 연구에서는 측정영역에서 평면도형의 넓이를 구하는 학습에 주목하였다. 그 이유는 실제로 평면도형의 넓이 공식을 활용하여 문제를 해결할 때 학생들은 오류를 많이 보이며, 공식이 성립하는 이유를 설명하는 부분에서 매우 어려워하기 때문이다(김정하, 강문봉, 2011; 나귀수, 2012).

평면도형의 넓이 구하기 수업에서 의미 있는 형식화가 이루어지기 위해서는 먼저 학생들의 다양한 반응을 살펴볼 수 있는 과정이 중시되어야 한다(박성선, 2011; 유연자, 방정숙, 2008). 그런데 다양한 해결 방법만 강조하다보면 학생들은 문제 해결의 효율성이나 간결성 등을 고민하지 않고, 남과 다른 해결 방법을 찾으려고만 할 수 있으며, 교사들은 다양한 방법만 찾아보고 학생들을 존중하는 수학수업을 하면 좋은 수업을 한 것이라 생각해버리는 경우도 종종 볼 수 있다. 하지만 다양성뿐만 아니라 수학에서 추구하는 효율성·간결성이 강조될 필요가 있으며 이러한 과정을 통해 점진적 형식화가 이루어져야 한다(유연자, 방정숙, 2008; 최지선 외, 2008).

평면도형의 넓이 구하기 수업에서의 학생이해와 교사의 역할을 논한 연구들을 살펴보면, 평면도형의 넓이를 구하는 학습에 대해 수업 방안을 구안하여 수업을 하고 수업 사례 분석을 통해 효과를 살펴보는 연구(박성선, 2011; 유미현, 강홍규, 2009; 임아름, 박영희, 2011), 수업을 통해 나타난 학생들의 해결 방법을 분석한 연구(유연자, 방정숙, 2008), 검사지를 통해 학생들의 평면도형 넓이 이해 정도나 장애를 분석한 연구(김정하, 강문봉, 2011; 나귀수, 2012; 박은률, 백석윤, 2010; 박혜경, 김영희, 전평국, 2006; 정경순, 임재훈, 2011), 검사지와 수업분석을 통해 평면도형의 넓이 지도에 대한 교사의 PCK를 분석하고, 교사의 역할에 대해 논한 연구(박선영, 강완, 2012; 안선영, 방정숙, 2006), 넓이 개념에 대해 새수학 방식의 실패 요인 분석(박선용, 최지선, 박교식, 2008), 평면도형 넓이 학습에 대한 고전과 현재의 중국과 한국 교과서 비교를 통한 효율적인 방안 연구(최길남, 박영식, 2010) 등이 있다.

이와 같은 선행연구를 통해 평면도형의 넓이에 대한 학생들의 다양한 해결 방법을 살펴볼 수 있고, 교사의 역할이나 수업 방법에 대한 여러 가지 시사점을 얻을 수 있다. 그러나 현재 2007 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서 흐름에 따른 실제 수업 사례연구가 거의 없고, 평면도형의 넓이를 학습하는 순서대로 일관성 있게 수업하여 얻어진 학생들의 반응에 대한 분석도 미흡하다. 또한 대부분의 연구에서 넓이 공식을 암기하거나 넓이 공식 활용 위주의 수업보다는 공식을 유도하는 형식화 과정의 중요성을 강조하고 있으면서도 그에 대한 방안을 제시한 연구는 찾아보기 힘들다. 다시 말해, 현재 적용되고 있는 교과서 수업에서 나타나는 다양한 학생 반응을 통해 평면도형의 넓이를 구하는 방법에 대한 특징을 살펴보면서 학생 이해 측면을 연구할 필요가 있으며, 특히 수업 내에서 다양한 해결 방법에 대한 공유 후 어떻게 형식화 과정으로 가는지에 대한 사례 연구를 통해 의미 있는 형식화 과정에 대한 교수-학습 방안을 모색해볼 필요가 있다.

이러한 연구의 필요성에 따라 본 연구는 세 명의 연구자가 선행연구에서 얻은 시사점과 학생이 생각할 수 있는 힘을 기르기 위한 방안에 초점을 맞추어 5학년 1학기 평면도형의 넓이 단원 7차시 수업을 구상하고 연구자 중 한 명이 이 단원 전체의 수업을 실행하였다. 실제 수업에서 학생들의 다양한 해결 방법과 형식화 과정이 도출되도록 수업을 구상하고 실행하였다. 이러한

수업을 통해 드러난 학생들의 넓이 구하기 방법을 해결 방법 분류기준(유연자, 방정숙, 2008)에 따라 분류해보고, 교사가 형식화를 도출하는 과정을 중점적으로 분석하였다. 본 연구는 평면도형의 넓이 구하기 수업에서 드러나는, 학생들의 다양한 해결 방법을 통해 학생 이해를 높이고, 다양한 반응에서 교사가 형식화를 도출하는 방법을 분석하여 의미 있는 형식화가 이루어지기 위한 교수-학습 상의 시사점을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 평면도형 넓이 학습에서의 형식화 과정

형식화는 알게 된 내용을 수학적으로 표현하기 위한 과정이며 의사소통의 더 나은 수단들을 얻기 위한 언어적 활동이다. 형식화는 알고리즘의 개발을 촉진한다(강문봉 외, 2001). 학교수학은 관찰된 특수한 사례의 공통성에 주목하여 일반적인 법칙을 이끌어내는 귀납추론과 유추에 의해 전개되는 경우가 많다. 특히 초등학교에서는 개별적이고 구체적인 사례들에서 공통성을 찾고 합리성을 추구하면서 논리적 추론을 거쳐 점진적으로 형식화가 이루어지며(우정호, 1998), 공식과 같은 대수적 표현을 강조하여 학습하지는 않는다. 그러나 공식, 알고리즘 등을 언급하지 않더라도 여러 가지 해결 방법을 경험한 후, 평면도형의 넓이를 구하는 방법을 말하거나 써보는 과정에서 대부분 공식이라 말하는 간략한 식으로 정리하고 학습한다.

학생들이 여러 가지 방법을 찾아 넓이를 구해보는 것으로 끝나지 않고 그 방법들에서 추론과 유추를 통해 더 합리적이고 효율적인 방법을 찾아보고, 최대한 간결하게 표현될 수 있는 식을 도출할 필요가 있다. 즉, '공식을 알아야 한다'가 아니라 '다양한 방법 중에서 어떻게 하면 더 간결하게 해결할 수 있을까'를 찾아나가는 과정이 필요하다. 수학교육의 본질 추구를 위해서도 이 과정이 요구되며 본 연구에서는 우리가 일반적으로 넓이 공식이라고 표현하는 가장 간결한 식으로 가는 과정을 형식화 과정이라고 좁은 의미로 보았다.

학생이 형식화 과정을 주도하는 것이 가장 바람직하지만 일반적인 수학 수업에서 학생이 독자적으로 공식을 찾아가는 것은 무리가 있다고 판단되어 본 연구에서는 학생들이 찾은 다양한 해결 방법 중에서 교사가 어떤 것을 어떻게 선택하여 공식으로 유도하는지 그 과정을 분석하고자 하였다.

2. 평면도형의 넓이 측정 개념과 해결 방법

넓이를 학습하기 위해 가장 먼저 선행될 학습 과정으로 직접비교, 간접비교 과정을 거쳐 임의 단위로 넓이 비교를 하면서 보편단위의 필요성을 인식하고, 보편단위의 필요성을 통한 넓이 단위(1㎠, 1㎡) 도입이 이루어진다. 그런 다음 단위 반복의 개념을 통해 직사각형과 정사각형의 넓이 구하는 방법을 학습하고, 직사각형의 넓이 구하는 방법을 기초로 하여 여러 가지 평면도형의 넓이를 학습하게 된다. 주어진 평면도형의 넓이를 구할 때, 기존에 배운 도형으로 변형하거나 분할하는 등의 방법으로 넓이를 구하고 그러한 과정 속에서 의미 있게 공식을 도출하는 것이 바람직하다.

넓이 측정을 학습하는 기초 개념으로 분할, 단위 반복, 보존, 배열 구성의 방법이 있다(Stephan & Clements, 2003). 첫째, 분할은 주어진 도형을 이미 알고 있는 지식에 의해 넓이를 구할 수 있는 도형으로 세분하여 넓이를 구하는 방법을 말

한다. 둘째, 단위 반복은 단위가 되는 넓이 단위로 영역을 덮는 것이다. 일반적으로 학생들은 닮은 모양으로 덮으려는 경향이 있다(Joram, 2003; Lehrer, 2003). 셋째, 보존은 다른 모양을 만들기 위해 도형의 일부분을 재배열하거나 도형을 분할·변형하여 생각해도 넓이가 같다는 것을 의미한다. 보존 개념이 형성되어야 기존에 알고 있는 방법을 활용하여 해결하려는 생각을 갖게 되며 매우 중요한 개념이다. 넷째, 배열은 단위넓이의 재배열을 통해 길이의 곱으로써 넓이를 생각하는 기초가 되며 평면에서 공간을 재배열하는 것은 넓이 측정의 핵심이다(Lehrer, Jaslow, & Curtis, 2003).

실제로 평면도형의 넓이를 구하기 위해 학생들은 주로 분할, 변형, 제거의 방법을 사용한다. 그 중 변형의 경우 변형된 도형과 처음 도형의 넓이 관계에 따라 등적변형, 반적변형, 배적변형으로 구분할 수 있고(정동권, 2001), 제거의 방법이 있을 수 있다. 제거는 주어진 도형에 외접하는 도형의 넓이에서 빈 공간의 넓이를 빼서 넓이를 구하는 경우이다(방정숙, 김상화, 박금란, 2006). 이러한 연구를 바탕으로, 유연자와 방정숙(2008)은 학생들의 해결 방법 분류 기준을 분할, 변형(등적변형, 반적변형, 배적변형), 제거, 복합으로 구분하였다. 본 연구에서는 이 분류 기준을 따르되 학생들의 반응 중 주어진 도형에 포함된 단위 넓이의 개수를 세어 넓이 구하는 방법이 있기 때문에 단위 넓이에 의한 방법을 추가하여 <표 Ⅱ-1>과 같은 기준을 활용하였다.

3. 선행연구 고찰

본 연구는 평면도형의 넓이 학습에서 학생들이 다양한 해결 방법을 살펴보면서 원리를 알아가는 과정과 다양한 방법들을 어떻게 의미 있게 형식화할 것인가에 대한 방안을 모색해보는 것이다. 측정 영역 특히 넓이 학습에서 다양한 해결 방법과 형식화의 연결 방안이나 형식화 과정에 대한 사례 연구는 찾아보기 힘들다. 나귀수(2012)는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 검사지를 활용하여 넓이의 의미 이해, 넓이 구하기, 공식 제시하기, 공식 성립 이유 설명하기로 구분하여 넓이 개념의 이해를 분석하였는데, 그 결과 공식 성립 이유를 설명하는 문항에서 가장 낮은 수행 정도를 나타내었고, 특히 직사각형의 넓이 공식을 이끌어내는 과정이 평행사변형이나 삼각형의 넓이 공식을 이끌어내는 과정에 비해 상대적으로 더 낮은 수행 정도를 보였다. 공식의 성립 이유를 설명한다는 것은 원리를 이해하고 있고 그것을 표현할 수 있다는 것으로 특히,

<표 Ⅱ-1> 평면도형의 넓이 해결 방법 분류 기준

방법		특 징
단위 넓이		단위넓이(1㎠)로 주어진 도형을 덮었을 때 몇 개가 들어있는지 세어보는 경우, 단위넓이를 세기 좋게 재배열하고 세는 경우
분할		주어진 도형의 넓이를 구하기 위해 넓이를 구할 수 있는 도형으로 세분한 경우
변형	등적	도형의 넓이는 변화시키지 않고 모양만 바꾸는 경우
	반적	주어진 도형 넓이의 반이 되도록 모양을 바꾸는 경우
	배적	주어진 도형 넓이의 2배가 되도록 모양을 바꾸는 경우
제거		주어진 도형에 외접하는 도형에서 주어진 도형을 뺀 부분의 넓이를 외접하는 도형의 넓이에서 빼는 경우
복합		위의 방법들을 2가지 이상 혼합하여 사용한 경우

2009 개정 수학과 교육과정에서는 넓이 구하는 방법을 다양하게 추론할 것을 강조하고 있어(교육과학기술부, 2011a), 본 연구의 목적과 일치하는 점이라 할 수 있다.

드모르간(De Morgan, 1806 -1871)은 역사발생적 과정의 준수, 점진적 형식화의 지향, 오류를 통한 학습, 개인적 지식의 강조가 수학수업에서 매우 중요하다고 주장하였고, 이러한 수학교육관이 현 수학교육에서도 반드시 중요시 되어야 한다(최지선 외, 2008). 측정영역에 대한 연구는 없었으나 드모르간의 수학교육관을 넓이 학습에 적용한다면 넓이를 구하는 방법을 학생들이 찾아내고, 다양한 해결 방법과 경험에 의해 효율성과 간결성을 추구하며 점진적인 형식화 과정으로 넓이 공식을 도출하고, 적용단계에서 학생들이 갖고 있는 오개념이나 오류를 논의하여 학습하는 것이 중요하다. 이러한 연구들은 본 연구의 평면도형의 넓이 학습 과정에서 중요시해야할 점과 목표 설정에 도움을 주었다.

평면도형의 넓이 학습에서 다양한 해결 방법과 의미 있는 형식화 과정을 구현하기 위한 수업 방법을 모색하기 위해 관련 연구를 살펴보았다. Freudenthal의 수학화 이론을 근거로 단원을 재구성하여 적용한 연구(유미현, 강흥규, 2009)에서는 현실맥락을 고려하고 모눈종이를 활용하여 도형을 제시하는 등 비형식적인 방법을 계획하고 학생들이 공식을 발견할 수 있도록 구성하였다. 결국 공식은 다양한 맥락과 비형식적인 활동을 통해 통합적인 이해가 가능하게 해야 한다는 점이 강조된다. 또한 탐구학습과정으로 넓이 공식을 유도하는 것이 효과적이라는 연구(박성선, 2011)와 개방형 교수법을 통한 평면도형 넓이 지도가 효과적이었다는 연구(임아름, 박영희, 2011)가 있다. 교수-학습 방안을 제시한 연구들의 공통점은 학생들이 다양한 사고와 활동을 통해 넓이 구하는 방법을 다양하게 찾아내고 통합적으로 공식을 도출할 수 있도록 구성하자는 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구를 위해 경기도에 있는 S초등학교 5학년 1개 학급을 연구대상으로 선정하였다. 연구대상인 학급은 담임교사가 모든 교과 수업에서 소통과 공유를 강조하여 전체 혹은 소집단이 서로 논의하기를 즐겨하는 수업 분위기를 고려하여 선정하였다. 상호작용이 활발한 학급을 선정한 이유는 수업에 적극적으로 참여하는 교실 문화를 조성하여 다양한 해결 방법과 형식화 과정에서 학생들의 사고와 표현 활동이 중요시되어야 하는 본 연구 목적에 적합하기 때문이다. 학급 구성은 남학생 16명, 여학생 15명으로 총 31명이며, 사교육을 통해 31명 중 29명 약 94%의 학생들이 수학과 선행학습을 하고 있다. 본 연구를 위해 평행사변형의 넓이 단원 수업은 담임교사가 아닌 연구자가 수업을 하였다.

수업자는 수학과 전문성을 인정받은 수석교사이고 초등수학교육 박사학위를 취득하였으며, 본 학급 학생들과 원활한 수업을 위해 사전에 소집단 활동과 토의과정에 중점을 둔 수학 수업을 몇 차례 실시하였다. 학생들이 해결 방법을 다양하게 찾을 수 있도록 4명씩 8개의 소집단으로 구성하였다. 또한 소집단별로 자신들이 찾은 방법을 발표할 때, 이미 발표한 내용과 같은 경우 어떤 모둠의 몇 번째 방법과 같다고 정확히 표현하도록 강조하여, 다른 모둠의 해결 방법을 경청하고 자신들의 방법과 비교할 수 있도록 하였다.

2. 수업 계획

가. 연구 대상자들의 출발점 행동 진단

연구대상인 학급의 31명 학생들에게 평면도형의 넓이 학습 이해도를 알기 위해 4학년 때 학습했던 내용을 바탕으로 직사각형과 정사각형 넓이 문제를 해결하게 하고, 풀이과정과 답, 단위표현, 풀이과정에 대한 설명을 써보게 하였다. 그 결과 직사각형은 31명, 정사각형은 25명이 풀이과정과 답을 맞게 표현하였으며, 단위 표현의 오류를 보인 학생이 5명이었다. 학생들은 직사각형이나 정사각형 넓이를 구하는 문제에서 ‘(가로)×(세로)’라는 알고리즘을 대부분 이용하였지만, 그 풀이과정에 대한 이유나 근거를 물어보았을 때, 단위넓이의 개수를 구하기 위한 것이라는 표현을 하지 못하였다. 따라서 학생들은 단위넓이의 개수를 알아보기 위해 넓이를 구하고 그에 따라 직사각형의 넓이 구하는 식이 나왔다는 인식을 대부분 하지 못하는 것으로 판단되며, 평행사변형의 넓이를 1차시로 진행하기 이전에 넓이의 개념과 단위넓이에 대한 이해, 그로 인해 직사각형과 정사각형 넓이를 구하는 과정을 한 시간 재구성할 필요가 있었다. 재구성한 수업에서 평면도형의 넓이를 왜 구하려고 하는 지, 넓이를 어떤 방법으로 구할지 학습 동기유발 및 학습방법을 자신이 찾도록 하였다.

나. 출발점 진단을 바탕으로 수업 재구성 계획

학습 단원은 5학년 1학기 7단원 ‘평면도형의 넓이’이다. 학생들의 넓이 개념에 대한 출발점 행동 진단을 한 결과 4학년 때 학습한 내용을 다시 상기시킬 필요가 있었다. 따라서 <표 Ⅲ-1>과 같이, 7단원의 첫 수업에 1차시를 추가하여 4학년 때 배운 넓이 단위의 개념과 직사각형·정

<표 Ⅲ-1> 평면도형의 넓이 단원 재구성 계획

학년/학기	5학년 1학기	단원	7. 평면도형의 넓이	차시	1~8 차시
단원 학습 목표	① 평면도형 넓이를 “왜 배우는 걸까?”, “정말 중요한가?”에 대한 질문에 대한 답을 함께 찾아보고 학습 동기를 가질 수 있다. [재구성 1차시-되돌아보기] ② 단위 넓이(1㎠) 개념과 직사각형과 정사각형의 넓이를 구하는 방법과 원리를 이해하고 넓이를 구할 수 있다. [재구성 1차시-되돌아보기] ③ 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 넓이를 구하는 다양한 방법을 이해하고, 형식화된 방법으로 넓이를 구할 수 있다. [2~8차시]				

차시	주제	수업 내용 및 활동	수업 의도
1 (재구성)	직사각형, 정사각형의 넓이	· 넓이 학습의 필요성 논의 · 넓이단위(1㎠) 이해 · 직사각형의 넓이 구하기 · 정사각형의 넓이 구하기	[4학년 2학기 학습내용 되돌아보기] · 보편단위의 필요성에 의해 넓이 단위(1㎠) 이해하기 · 주어진 도형에 깔린 단위 넓이의 개수로 직사각형과 정사각형 넓이 구하기
2~3	평행사변형의 넓이	· 넓이 단위, 직사각형 넓이 해결 방법을 이용하려는 생각 갖기 · 평행사변형의 넓이 구하는 다양한 방법 찾기, 밑변과 높이에 대한 의미 알기, 원리 이해하기 · 평행사변형 넓이 구하는 식 일반화하기	· 주어진 도형의 정의와 성질 살펴보기 · 이미 배운 것을 이용해서 다양한 방법으로 주어진 도형의 넓이 구하기 · 공식 이해하기(의미 있는 형식화 과정) · 적용하기(미션수행) - 단순히 공식 적용 문제 풀이가 아니며, 넓이를 구하기 위해 필요한 요소들 간의 관계를 통한 문제 해결로 개념이나 원리 형성이 부족한 부분에 대한 오개념 논의 학습(확인과 피드백 과정)
4~5	삼각형의 넓이	· 넓이 단위, 직사각형의 넓이, 평행사변형의 넓이 해결 방법을 이용하려는 생각 갖기 · 삼각형의 넓이 구하는 다양한 방법 찾고 원리 이해하기 · 삼각형의 넓이 구하는 식 일반화하기	
6~7	사다리꼴의 넓이	· 넓이 단위, 직사각형의 넓이, 평행사변형의 넓이, 삼각형의 넓이를 이용하려는 생각 갖기 · 사다리꼴의 넓이 구하는 다양한 방법 찾고 원리 이해하기 · 사다리꼴의 넓이 구하는 식 일반화하기	
8	마름모의 넓이	· 앞에서 배운 모든 해결 방법을 이용하려는 생각 갖기 · 마름모의 넓이 구하는 다양한 방법 찾고 원리 이해하기 · 마름모의 넓이 구하는 식 일반화하기	· 마름모의 정의와 성질 살펴보기 · 이미 배운 것을 이용해서 다양한 방법으로 마름모 넓이 구하고 원리 이해하기

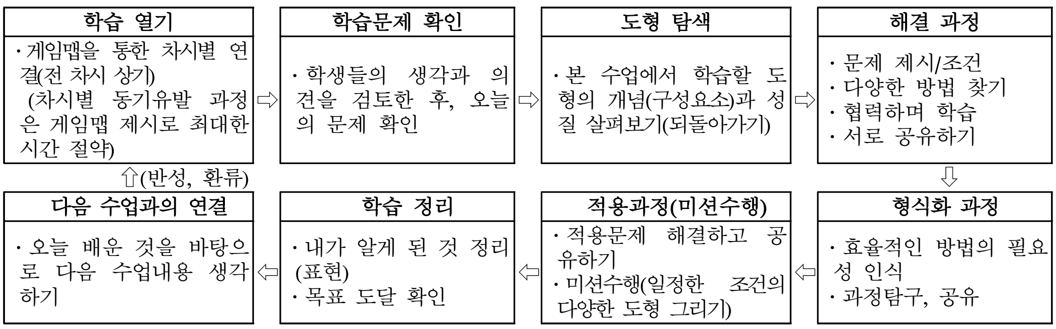
사각형의 넓이 해결 원리를 이해하는 것이 중요하였다. 또한 1차시는 이 단원을 왜 배우며, 출발점과 도착점은 어디인지 단원의 전체에 대해 파악할 필요가 있었다. 따라서 1차시 재구성을 통해 이 단원 학습의 목표와 방향 제시, 그리고 이전에 배운 내용에 대한 상기를 목적으로 구성하였다.

평면도형의 넓이를 구하는 학습은 계열성이 매우 강하고, 각 차시별로 주어진 도형의 넓이를 살펴보기 때문에 주제별 수업 흐름을 거의 유사하게 구성하였다. 한 단원의 주제별 학습을 유사한 흐름으로 수업할 경우, 주제(차시)별 연결이 매우 용이하여 학생 사고나 표현 활동에 시간을 더 많이 쓸 수 있는 장점이 있다. 4학년 때 학습한 내용을 되돌아보고, 이 단원에서 무엇을 배울 것이고 왜 배울까에 대해 생각해보는 1차시 재구성 수업을 제외한 2～8차시 수업은 이미 아는 것을 이용하여 넓이 구하는 방법을 찾아본다는 아이디어를 기본으로 [그림 Ⅲ-1]과 같은 모형대로 수업을 실행하였다. 교육과정에서 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴의 넓이 구하기는 2차시씩 묶어서 구성되어 있으며 본 연구를 위한 수업에서도 2차시씩 묶어서 수업을 실행하였다. [그림 Ⅲ-1]의 수업 모형은 80분 수업을 기준으로 구성된 수업 흐름이다. 8차시 마름모의 넓이 구하기 수업은 40분으로 구성되어 있어 이 수업 모형 중 형식화 과정까지 진행하였다. 본 수업의 흐름은 학생들의 다양한 해결 과정을 충분히 살펴볼 시간 확보와 의미 있는 형식화 과정에 초점을 둔 수업 모형이다.

수업모형을 적용하여 같은 패턴의 수업으로 학생들에게 생각하고 논의하여 다양한 해결 방법을 찾는 시간을 더 확보하였다. 평면도형의 넓이를 구하는 방법을 알아보기 위해 학생들이 직접 오리고 재배열해보는 활동을 할 수 있도록 다양한 색깔의 종이에 주제에 맞는 도형을 제시하였으며, 단위 넓이를 활용할 수 있도록 하기 위해, 가로와 세로가 1cm씩인 격자 모양이 그려진 도형을 학습 자료로 활용하였다. 격자 모양이 있는 도형으로 넓이를 구할 때 필요한 부분의 길이를 재기 쉬우며, 밑변과 높이를 어떤 부분으로 해야 할 지, 혹은 어떻게 분할하거나 변형해야 넓이를 쉽게 구할 수 있는지에 대해서도 수학적 사고를 통해 찾아내도록 하기 위함이었다. [그림 Ⅲ-1]의 수업 모형을 고려한 수업의 예로 2～3차시 평행사변형의 넓이 구하기 수업 흐름은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

3. 자료 수집

본 연구의 연구자들은 함께 수업 흐름을 계획하고 수업자, 수업녹화 및 기록 담당을 각각 맡



[그림 Ⅲ-1] 다양성과 형식화 과정에 중점을 둔 원리탐구수업모형

<표 Ⅲ-2> 평행사변형의 넓이 구하기 수업 흐름

단원명	7. 평면도형의 넓이	차시(분)	2~3/11(80분)
학습 주제	평행사변형의 넓이 구하기	수업모형	원리탐구 수업모형
학습 목표	① 평행사변형의 넓이를 구하는 원리를 이해하고 구할 수 있다. ② 주어진 넓이의 평행사변형을 협력하여 그릴 수 있다.		
수업 흐름	**[학습 열기]** 게임맵을 보며 지난 시간에 배운 것이 무엇인지 살펴본다. 직사각형의 넓이를 구하는 방법과 정사각형의 넓이를 구하는 방법을 다시 한 번 상기하고, 우리가 흔히 쓰는 A4용지의 넓이가 얼마일지 예측해보게 한다. 넓이에 대한 양감 그리고 오늘 배울 것이 무엇인지 학생들의 생각을 듣고, 학습문제를 판서한 후 함께 확인한다. **[도형 탐색]** 우선 평행사변형(단위넓이가 나타나있는 평행사변형)을 하나씩 주고, 평행사변형에 대해 아는 것을 이야기해본다. 이 과정은 평행사변형의 넓이를 구하기 전에 4학년 때 배운 평행사변형의 개념과 성질을 이해하고 그에 따라 넓이 구하는 방법에 응용됨을 자연스럽게 도출하기 위함이다. **[해결 과정]** 나누어준 평행사변형의 넓이를 어떻게 구할 것인지 먼저 전체 공유 시간을 가진다. 이 과정에서 이미 배운 것을 이용해야 한다는 점을 강조한다. 평행사변형을 직사각형으로 만들면 넓이를 구할 수 있다는 생각이 공유되도록 유도한다. 주어진 길이로 넓이를 구하는 과정을 생각해보고 모둠협력학습을 통해 방법을 정리한다(화이트보드를 활용하여 모둠별로 생각을 정리하고 발표한다). 학생들의 다양한 의견을 공유한 후, 밑변과 높이에 대한 정의를 함께 살펴본다. 교사가 밑변과 높이가 무엇인지 설명하고 배우는 것이 아니라 “평행사변형의 넓이를 구하기 위해서는 어느 부분의 길이를 알아야할까?”라는 발문에 학생들이 어느 부분인지 알아보고 그에 대한 용어를 살펴본다. 이미 선행학습 되어 있는 학생들에게도 어떤 용어가 적합할지 생각해 보게 하고, 밑변과 높이로 약속하였음을 상기시킨다. **[형식화 과정]** 주어진 평행사변형을 학생들이 오려서 돌려 붙이거나 두 배로 늘리는 등 다양한 방법으로 직사각형으로 변형한 것을 교사가 다시 한 번 정리하는 과정에서 일반화를 해보도록 유도한다. 모든 방법을 (밑변)×(높이)로 간략히 정리하는 것이 학생들에게 오히려 어렵게 느껴진다면 (밑변)×(높이)로 형식화하기 좋은 것들 몇 가지만 함께 살펴보면서 공식을 찾아보게 한다. **[적용 과정]** 평행사변형에서는 교과서 99쪽 활동4번과 같이 밑변과 높이가 같으면 모양이 달라도 넓이가 모두 같음을 인식할 수 있도록 미션을 만든다. “미션: 10분간 넓이가 24㎠인 서로 다른 모양의 평행사변형을 최대한 많이 그려 보아라!” 모둠에서 협력하여 미션을 수행하도록 해보고, 풀이 과정을 발표하게 한다. 그 속에서 수학적 용어에 대한 오개념이나 평행사변형의 넓이를 구하기위한 주요 개념을 다시 짚어보는 기회를 갖는다. 시간적 여유가 된다면 수학책 99쪽 익히기 두 문제를 풀어본다. **[학습 정리]** ‘오늘 무엇을 배운 것인가? 알게 된 것이 무엇인가? 궁금한 점이 있는가?’에 대한 의견을 공유하고, 자신의 배움 공책에 정리한다.		
자료 활용	게임맵 그림 자료, 평행사변형(단위넓이가 나타나있는 도형), 자, 가위, 미션 수행지(단위넓이가 나타나있는 종이), 사인펜, 배움 공책		

았다. 또한 수업 후에는 수업에서 나타난 현상이나 문제점 등을 함께 논의하고, 다음 차시 수업을 계획하는 과정을 반복하였다. 수업을 녹화할 경우에는 8차시 수업을 앞과 뒤에서 녹화하였고, 소집단 활동 시 뒤쪽 카메라로 학생들의 활동을 녹화하였다. 또한 수업에서 나타난 특징을 바로 관찰 기록하였으며, 학생들이 소집단 활동을 통해 찾아낸 해결 방법에 대한 산출물 자료를 모으고, 의문이 가는 것은 바로 학생들에게 질문하여 어떤 의도로 나온 방법인지를 확인하였다. 또한 연구자가 수업을 끝낸 후 함께 협의했던 내용을 녹취하였고, 녹취된 자료를 정리하였다. 따라서 각 주제별로 수집된 수업 분석 자료에는 계획했던 수업안과 교수-학습자료, 학생들이 찾은 해결 방법이 표현된 산출물의 사진, 수업을 녹화한 동영상, 수업 관찰 기록, 연구자들의 협의 자료가 포함되었다.

4. 자료 분석

본 연구는 평면도형의 넓이 학습에 대한 학생들의 다양한 해결 방법에 대한 분석과 형식화 과정에 대한 수업 사례 분석을 중점적으로 하였다. 먼저 해결 방법을 분석하기 위해 <표 Ⅱ-1>에 제시한 평면도형의 넓이 해결 방법 분류 기준에 따라 학생들이 어떤 방법을 주로 사용하는

지, 주어진 도형에 따라 나타난 해결 방법을 비교 분석하였다. 그런 다음 다양한 방법에서 형식화 과정으로 가는 수업 장면을 분석하였다. 수업자가 도형별로 다양한 해결 방법 중 어떤 것을 선택하여 형식화 과정을 도출하였는지, 상호작용과 표현은 어떠한지, 수업 후 연구자 간의 협의를 통해 형식화 과정에 대한 반성과 개선 방향 등에 대해 논의했던 자료를 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 해결 방법 분석

평면도형의 넓이를 구하기 위한 해결 방법을 분석하기 위해 도형별로 넓이 해결 방법을 살펴보고 학생들이 많이 찾은 방법을 조사한 후, 각 평면도형의 넓이 구하기에서 해결 방법의 특성을 분석하였다.

8개의 소집단에서 각각 찾은 해결 방법을 <표 Ⅱ-1>의 해결 방법 분류 기준에 따라 분류하고 정리한 것이 <표 Ⅳ-1>이다. 평행사변형 넓이 구하는 방법을 살펴보면, 등적변형(9개), 반적변형(4개), 단위 넓이(2개), 분할과 제거(각 1개)의 방법이 있었다. 평행사변형은 직사각형의 넓이 구하는 방법만 알고 있는 상황에서 직사각형을 이용하여 넓이를 구해야하기 때문에, 배적변형이나 복합의 방법은 나타나지 않았다. 삼각형 넓이 구하는 방법에서는 배적변형(8개), 등적변형(2개), 단위 넓이(1개), 반적변형(1개), 제거(1개), 복합(1개)의 방법이 있었으며 분할의 방법은 없었다. 사다리꼴의 넓이 구하는 방법에서는 분할(9개), 반적변형(4개), 등적변형(3개), 배적변형(3개), 복합(3개), 단위 넓이(2개), 제거(2개)로 모든 방법이 가장 다양하게 나타났다. 마름모의 넓이 구하는 방법에서는 분할(7개), 배적변형(7개), 반적변형(5개), 등적변형(4개), 단위 넓이(1개), 복합(1개)의 방법이 있었고, 제거로 해결한 경우는 없었다. 기타로 분류한 것은 평행사변형과 삼각형 넓이 구하기에서 공식으로 해결한 경우가 한 가지씩 있었으며, 마름모 넓이 구하기를 할 경우에는 두 대각선의 길이만 명확히 알 수 있도록 하였는데 알고 있는 길이를 고려하지 않고, 마름모를 평행사변형이라 생각하고 등적변형 형태인 직사각형을 만든 경우가 있었다. 이 경우 필요한 부분의 길이를 알 수 없어 넓이를 구하는데 오류를 보였다.

교과서, 익힘책, 교사용지도서에 제시된 방법도 <표 Ⅳ-1>에서 함께 비교하였다. 교과서에서는 평행사변형부터 마름모의 넓이까지 주제별로

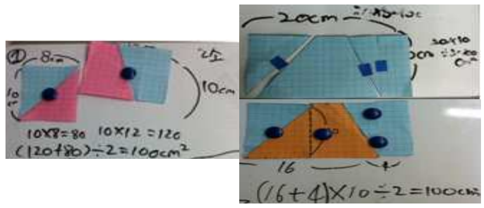
<표 Ⅳ-1> 학생들의 평면도형 넓이 해결 방법 및 교과서(지도서)에 제시된 방법 비교

보존 방법		평행사변형		삼각형		사다리꼴		마름모	
		연구사례	교과서(지도서)	연구사례	교과서(지도서)	연구사례	교과서(지도서)	연구사례	교과서(지도서)
단위 넓이		2	1	1	1	2	1	1	1
분할		1				9	2	7	(1)
변형	등적	9	1	2		3		4	1
	반적	4		1		4		5	
	배적			8	1	3	1	7	(1)
제거		1		1		2			
복합				1		3	(1)	1	
				배적&분할		배적&분할	분할&등적	분할&등적	
기타		1		1				2	
		공식 이용		공식 이용				조건을 무시한 도형변형	

방법 중 3개 이상 나온 경우

단위 넓이를 세는 방법을 기본 개념으로 모두 제시하고 있다. 그런 다음 공식을 이해하기 쉽도록 평행사변형에서는 등적변형, 삼각형에서는 배적변형의 방법을 제시하고 있다. 사다리꼴에서는 분할(삼각형 2개로 분할, 평행사변형과 삼각형으로 분할)과 배적변형의 방법을 제시하고 있으며 지도서에는 복합(분할과 등적변형)의 방법으로 제시되었다. 마름모의 경우 교과서에는 직사각형으로 등적변형한 방법과 지도서에서 배적변형과 분할의 방법을 제시하고 있다. 실제 수업에서 학생들이 찾은 해결 방법과 교과서에 제시된 방법을 살펴보면 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴은 학생들이 가장 많이 찾아낸 해결 방법이 교과서에 제시되어 있다. 마름모의 경우 분할의 방법과 배적의 방법을 학생들이 많은 찾은 반면 교과서에는 등적변형의 방법만 제시되어 있고, 교사용 지도서에는 분할과 배적의 방법이 제시되어 있다 (교육과학기술부, 2011b; 2011c; 2011d).

평행사변형의 넓이를 구하는 방법에서 학생들은 등적변형을 통해 직사각형을 만들고, 가로 길이와 세로 길이의 곱을 이용하는 경우가 가장 많았으며, 주어진 평행사변형을 접어서 평행사변형 넓이의 반이 되는 직사각형을 만들어 해결하는 경우도 4개 소집단에서 있었다. 삼각형의 넓이를 구하는 방법에서는 같은 넓이의 삼각형을 붙여 평행사변형을 만들고 평행사변형 넓이의 반을 생각하는 배적변형 방법이 가장 많았다. 삼각형 수업에서는 예각삼각형과 둔각삼각형 두 가지를 자료로 제시했는데, 두 가지 모두 배적변형을 활용하는 경향이 많았으며, 예각삼각형의 경우 단위 넓이, 등적변형, 반적변형, 제거, 복합 등이 1~2개 나왔으나, 둔각삼각형의 경우에는 배적변형의 방법만 있었다. 사다리꼴의 넓이를 구하는 방법은 다른 평면도형보다 매우 다양한 방법이 나타났으며, 학생들이 특히 선호한 방법은 분할, 등적변형, 반적변형의 방법이었다. 사다리꼴의 특성상 등적·반적변형으로 평행사변형이나 직사각형을 변형하기도 용이하고, 이미 배운 방법을 활용할 수 있는 직사각형, 평행사변형, 삼각형으로 분할하여 넓이를 구할 수도 있으며 각 방법에 대한 형태도 다양하게 나타났다. 특히 사다리꼴의 넓이 구하기에서는 분할 방법으로 해결한 경우가 가장 많았으며, [그림 Ⅳ-1]과 같이 배적변형과 분할이 복합적으로 나타난 방법도 3개 있었다. 마름모의 넓이 구하기에서는 분할, 배적변형, 반적변형, 등적변형의 방법을 선호하였다. 분할의 경우 삼각형으로 분할하여 해결하는 경향이 많았고, 배적변형의 경우 마름모를 외접하는 직사각형을 그리고, 외접하는 직사각형이 마름모 넓이의 2배라는 것을 찾아내어 해결하는 경우가 많았다.



[그림 Ⅳ-1] 사다리꼴 넓이를 배적변형과 분할의 방법으로 해결한 사례

2. 학생들의 다양한 해결 방법으로부터 교사의 형식화 도출 과정 분석

평면도형의 넓이를 구하는 각 주제마다 소집단 논의를 통해 넓이를 구하는 다양한 방법을 찾고 표현해보게 하였다. 그런 다음 형식화 과정에서 학생들이 공식을 찾아가기에는 정규 교육과정 상 시간이 부족하다고 판단하여 형식화 과정의 경우 교사가 제시하는 방법을 선택하였다. 이 때, 중요한 과정은 학생들이 찾아낸 방법 중에서 가장 간결한 식을 도출하고 학생들은 자신이 찾은 해결 방법이 선행학습으로 알고 있던 넓이 공식으로 유도되는 과정을 이해하도록 하

는 것이었다. 칠판에 8개 소집단에서 정리한 결과물(화이트보드)을 모두 세워두고, 모둠에서 해결 방법을 발표하였고, 그 후에 교사는 형식화 과정을 잘 드러낼 것으로 판단되는 사례를 3개 이상 선택하여 공식으로 가는 과정을 제시하였다. 서로 다른 방법 중에서 3개 이상을 선택하여 형식화 과정을 드러낸 이유는, 학생들이 찾은 다양한 방법들이 결국 귀납적 추론 과정의 형태로 형식화될 수 있음을 보여주고자 의도한 것이었다. 이러한 형식화 과정이 자연스럽게 진행되게 하기 위해 먼저 형식화 과정이 왜 필요한지를 학생들이 생각하여야 한다. 이에 2~3차시 평행사변형 수업에서는 수학에서 왜 간결성과 효율성을 고민해야 하는지 학생들이 생각해 보게 하는 데 시간을 소요한 후, 공식을 도출하였다.

학생들이 해결한 방법과 교과서에 제시된 방법을 분석한 <표 Ⅳ-1>을 바탕으로 도형별로 형식화 과정을 위해 선택했던 방법을 나타낸 것이 <표 Ⅳ-2>이다. 우선 수업에서 선택한 방법(색칠된 부분)을 보면 평행사변형의 경우 등적변형의 방법만을 선택하였으며, 삼각형의 경우 등적변형, 반적변형과 배적변형의 방법으로 공식을 유도하였다. 사다리꼴에서는 등적변형, 배적변형과 복합(배적&분할)의 방법으로 공식을 유도하였다. 마름모에서는 등적변형, 배적변형 방법으로 형식화 과정을 도출하였다.

수업 후에는 연구자들이 함께 형식화 과정에 대한 협의를 하였고, 특히 학생들이 제시한 다양한 해결 방법 중에서 형식화가 가능한 데, 수업에서 드러나지 않은 것을 살펴보았다. <표 Ⅳ-2>에서 빗금 친 부분은 공식으로 유도할 수 있는 방법인 것들을 나타낸 것이다. 또한 넓이 구하는 방법 중 많은 학생들이 찾은 방법과 형식화 과정에서 선택된 방법을 비교해보면 평행사변형의 경우 학생들이 가장 많이 찾았던 등적변형 방법으로 형식화하는 것이 적절하고 자연스럽게 연결되었다. 삼각형의 경우에도 가장 많이 찾았던 배적변형과 등적변형 방법으로 형식화 과정이 가능했고, 마름모에서도 학생들이 많이 이용했던 분할, 등적변형, 반적변형, 배적변형의 방법에서 공식을 유도할 수 있었다. 그러나 사다리꼴은 분할의 방법을 가장 많이 활용하였으나 그 방법으로는 형식화 과정이 드러나기 쉽지 않았고, 등적변형. 반적변형, 배적변형 및 복합의 방법으로 공식을 도출할 수 있었다.

각 도형별로 넓이를 구하는 식으로 유도하는

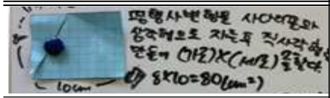
<표 Ⅳ-2> 평면도형 넓이 구하기 형식화 과정에서 선택(가능)한 방법

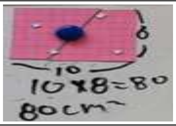
보존 방법		평행사변형		삼각형		사다리꼴		마름모	
		연구사례	교과서(지도서)	연구사례	교과서(지도서)	연구사례	교과서(지도서)	연구사례	교과서(지도서)
단위 넓이		2	1	1	1	2	1	1	1
분할		1		0		9	2	[illegible]	[illegible]
변형	등적	9	1	2		3		4	1
	반적	4		1		[illegible]		[illegible]	
	배적	0		8	1	3	1	7	(1)
제거		1		1		2		0	
복합		0		1		3	[illegible]	1	
				배적&분할		배적&분할		분할&등적	
기타		1		1				2	

사례 수 : 수업에서 형식화 과정을 위해 선택한 방법

수업에서 선택하지 않았지만 형식화가 가능한 방법

<표 Ⅳ-3> 평행사변형의 넓이에 대한 형식화 과정

<table>
<tr><th>형식화 과정에서 선택한 사례</th><th>보존 방법
(* 수업제시)</th><th>의사소통 과정(판서)</th></tr>
<tr><td>


</td><td>등적변형
*</td><td>T: 평행사변형의 넓이는 변형된 직사각형의 넓이와 같습니다. 평행사변형일 때 밑변과 직사각형으로 바뀌었을 때 가로의 길이가 같고, 직사각형의 세로의 길이는 평행사변형의 높이와 같지요. 따라서 평행사변형의 넓이는 (판서하며) 이렇게 되겠지요.
(평행사변형의 넓이)=(직사각형의 넓이)
=(가로)×(세로)
=(밑변)×(높이)</td></tr>
</table>

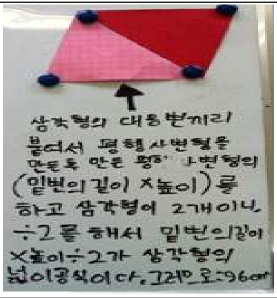
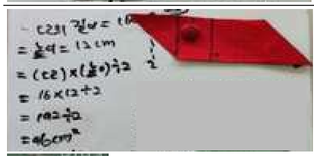
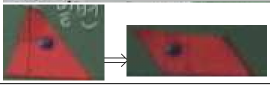
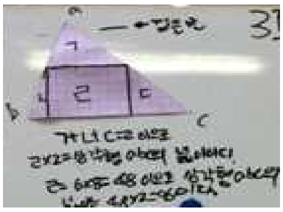
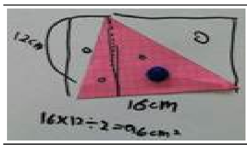
형식화 과정을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 평행사변형의 경우, 학생들은 단위 넓이, 분할, 등적변형, 반적변형, 제거 등의 방법으로 직사각형의 넓이 구하는 방법을 이용하여 넓이를 구하였다. 그런데 이 사례를 모두 공식으로 이끌기에는 초등학교에서 대수적 관계를 명확히 이해하고 표현하는 것이 어렵기 때문에 적합하지 않다. 수업자는 이 중에서 등적변형에 대한 사례만 짚으며 공식으로 유도하였다. 형식화를 위해 선택한 사례와 설명 및 판서 내용은 <표 Ⅳ-3>과 같다. 평행사변형 넓이 구하기 수업에서는 밑변과 높이가 처음 도입된다. 따라서 직사각형의 가로와 세로는 평행사변형의 밑변과 높이와 어떤 차이가 있는지, 밑변과 높이는 무엇이며 밑변에 따라 무엇이 높이가 되는지를 먼저 수업에서 언급하였고, 그 뒤에 공식으로 유도하였다. 또한 넓이를 구하기 위해서는 밑변의 길이가 필요하며 판서를 할 때, '밑변'이라고 쓰더라도 길이를 의미함을 약속하고 최대한 간결하게 판서하려고 노력하였다.

삼각형의 경우, 형식화 과정에서 선택한 사례는 <표 Ⅳ-4>에서 알 수 있듯이 예각삼각형과 둔각삼각형의 배적변형, 예각삼각형의 등적변형과 반적변형이었다. 삼각형의 넓이를 구할 때는 삼각형을 평행사변형이나 직사각형으로 변형하여 해결할 수 있는데, 형식화 과정으로 선택하고 식을 이끌어낸 사례들은 모두 평행사변형으로 변형한 사례였다. 5학년 학생들에게 대수식의 성질을 이해하는 것은 어렵기 때문에 '÷2'는 반의 개념으로, '×2'는 배의 개념으로 설명하였고, 특히 학습 자료로 제시된 격자 모양의 도형종이를 접거나 펴보면서 시각적인 효과에 더욱 쉽게 반응하는 것을 볼 수 있었다. 연구자들의 협의 과정에서 <표 Ⅳ-4>의 가장 아래 사례처럼 직사각형으로 변형한 사례로도 공식을 유도할 수 있으며, 가능하면 보존 방법과 변형된 도형의 형태도 다양하게 제시하여 귀납적 추론이 최대한 자연스럽게 이루어지도록 사례를 선택하는 것이 중요하다는 것을 논의하였다. 또한 반적변형의 방법일 경우 '(삼각형의 넓이)=(밑변)÷2×(높이)'로 정리되는데, 일반적인 식이 '(삼각형의 넓이)=(밑변)×(높이)÷2'라고 해서 반드시 '÷2'를 식의 뒷부분에 제시할 필요 없이, 최대한 간단히 나타낼 수 있는 식이라는 점에 주목하고, '÷2'가 곱셈과 함께 있을 경우, 주어진 길이로 계산된 넓이 값을 보고 순서를 바꾸어 계산하여도 그 결과가 같아짐을 알도록 하였다. 학생들은 삼각형의 넓이 구하기 수업에서 구체적인 도형 자료를 보면서 반과 배의 개념으로 이해하여 사다리꼴의 넓이 구하기와 관련된 형식화 과정에서 더

쉽게 이해하는 경향이 있었다.

사다리꼴의 경우, 이전 수업에서 밑변과 높이에 대한 개념을 강조했던 것을 바탕으로 사다리꼴의 넓이를 구하기 위해 어떤 부분의 길이를 알아야하는지 먼저 살펴보았다. 두 밑변의 길이가 다른 사다리꼴에서는 밑변 대신 윗변과 아랫변으로 구분하여 표현한다는 것을 지도한 후, 형식화 과정을 이끌었다. 사다리꼴의 넓이 구하기에서 선택했던 사례는 <표 Ⅳ-5>에서 알 수 있듯이 배적변형, 복합, 등적변형 사례였다. 사다리꼴의 넓이를 구하는 경우에 삼각형과 유사하게 배적변형을 많이 할 것이라고 예상했으나 실제

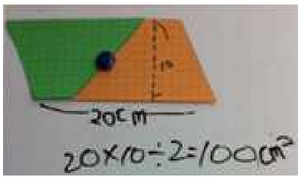
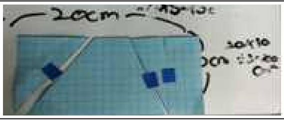
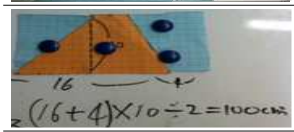
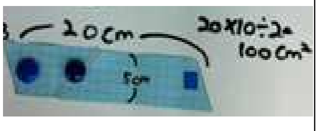
<표 Ⅳ-4> 삼각형 넓이에 대한 형식화 과정

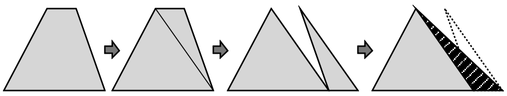
형식화 과정에서 선택한 사례	보존 방법 (* 수업제시)	의사소통 과정(**판서**)
 	배적변형 *	T: (생략) 둔각삼각형은 뭐로 만들 수 있을까요? (평행사변형) T: 평행사변형으로 만들 수 있어요. 그럼 이 파란 삼각형의 넓이는 뭘까요? 하늘색 삼각형의 넓이? 뭐라고 정리하면 좋을까? S: 평행사변형의 넓이 나누기 이 T: 이 부분을 밑변이라 할 수 있죠? 밑변~ 그러면 뭐예요? 밑변의 길이 곱하기 높이? **삼각형의 넓이**=**평행사변형의 넓이**÷2 =**밑변**×**높이**÷2 T: 왜 나누기 이가 된다구요? S: 똑같은 삼각형이 두 개여서. S: 삼각형 두 개를 저 상태로 붙였을 때 평행사변형의 넓이를 구해서 거기에다 나누기 이를 해야 하는데 나누기 이를 왜 하냐하면 평행사변형의 넓이 아니~아니 삼각형 두 개를 붙였을 때 평행사변형이 되니까 그거를 두 개로 나눈 다음에 삼각형의 넓이가 나왔어요. T: 네~. 결국은 우리가 요기(밑변의 길이×높이)까지 구하면 삼각형의 넓이가 아니라 삼각형 두 배의 넓이였어요. 그러니까 결국 나누기 2가 필요했어요.
 	등적변형 *	T: 이 경우에 (높이를 반이 되게 잘라서 평행사변형이 되었던 것을 다시 삼각형으로 바꾸어놓고) 높이를 표시해보고, 다시 평행사변형으로 만들어보면(위의 삼각형부분을 왼쪽으로 돌려 붙여 평행사변형으로 변형) 넓이를 구할 때 어떻게 될까요? 밑변은 삼각형의 밑변과 같고, 평행사변형으로 바꿨을 때 높이는? SS: 반이 되었어요. **삼각형의 넓이**=**밑변**×**높이의 반** =**밑변**×**높이**÷2
	반적변형 *	T: (삼각형을 떼어서 손에 들고 접히는 과정을 보여줌) 직사각형의 길이는 삼각형 밑변의 얼마일까요?(반) 그 다음에 세로의 길이는 삼각형 높이의 얼마일까요?(반) T: 그러면 (밑변의 길이÷2, 높이÷2라고 쓰고 각각에 괄호를 하며) 이것을 곱하면 접은 직사각형의 넓이가 되겠죠. 우리가 구하려던 실제 삼각형은 이 직사각형 넓이의 몇 배인가요?(2배) **삼각형의 넓이**=(**밑변**÷2)×(**높이**÷2)×2 T:밑변의 길이를 반, 높이를 반해서 곱한 것의 두 배가 되어야 되거든요. 괄호를 다 빼고 생각해보면, 반으로 나누었다가 다시 두 배하면 그대로가 되겠죠. (끝부분의 '÷2×2'에 삭제되는 표시를 하며) 이건 둘 다 지워져도 돼요. **삼각형의 넓이**=**밑변**÷2×**높이**÷2×2 =**밑변**÷2×**높이** T: (÷2×2를 가리며) 그래서 이거 없어도 돼요. 그러면 밑변의 길이 나누기 이 곱하기 높이인데 결국은 밑변의 넓이×높이÷2 랑 같아져요.
	배적변형 (수업에서 제시 못함)	**삼각형의 넓이**=**직사각형의 넓이**÷2 =**가로**×**세로**÷2 =**밑변**×**높이**÷2

수업에서는 분할 방법을 많이 사용하였다. 하지만 수업 중에 분할 방법을 공식으로 유도하기는 쉽지 않다는 판단에 배적변형, 등적변형, 복합의 방법을 선택하여 식으로 유도하였다. 수업 후 연구자 간의 협의에서 반적변형의 사례도 형식화할 수 있음을 살펴보았고, 학생들이 많이 찾은 분할의 방법을 공식으로 연결할 수 있을지도 고민하였다. 덧셈에 관한 곱셈의 분배법칙에 대한 개념이 정확하지 않은 상황에서 무리하게 분할의 방법을 공식으로 유도하는 것이 바람직할 것인가와 학생들이 많이 찾은 방법들을 형식화 과정으로 연결해줄 수 있어야 한다는 점을 논의하였다.

학생들의 해결 방법에서는 나오지 않은 방법이지만, 사다리꼴의 넓이 구하는 방법 중에서 [그림 Ⅳ-2]와 같은 방법도 있다. 이 방법은 교사용지도서의 참고자료에 제시되어 있다(교육과학기술부, 2011d). 이 방법은 사다리꼴의 한 대각선을 기준으로 분할하여 두 개의 삼각형을 만들고, 윗변을 밑변으로 하는 삼각형은 높이가 같을 경우 어떤 모양이어도 넓이가 같다는 보존의 개념을 도입하여 하나의 삼각형이 되게 다시 등적변형을 한 것이다. 이렇게 하면 사다리꼴에서 윗변과 아랫변을 합한 길이가 밑변이면서 사다리꼴과 높이가 같은 삼각형의 넓이와 같음을 알 수 있다. 또한 삼각형의 넓이 구하는 방법대로 식을 나열해보면 사다리꼴의 공식으로 쉽게 드러남을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-5> 사다리꼴 넓이에 대한 형식화 과정

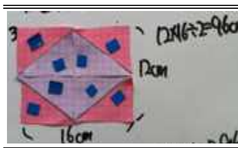
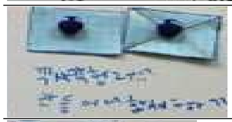
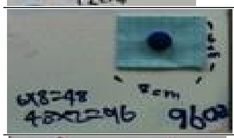
형식화 과정에서 선택한 사례	보존 방법 (* 수업제시)	의사소통 과정(**판서**)
	배적변형 *	T: 이 평행사변형은 우리가 구할 사다리꼴 넓이의 두 배죠? 그럼 평행사변형의 넓이를 구한 다음에 어떻게 하면 될까요? (2로 나누어줍니다.) 그럼 평행사변형은 밑변과 높이의 곱인데 평행사변형의 밑변은 사다리꼴의 어느 부분일까요? SS: 아랫변과 윗변이 합해져야 해요. T: 평행사변형의 높이는 어떤가요? SS: 사다리꼴의 높이랑 같아요. T: 그렇다면 이렇게 표현할 수 있겠죠. **사다리꼴의 넓이＝평행사변형의 넓이**÷2 ＝**(윗변＋아랫변)**×**높이**÷2
 	복합 (배적&분할) *	T: 아이디어가 참 좋은 데, 이것도 생각해봅시다. 직사각형의 넓이의 반이 우리가 구할 사다리꼴의 넓이입니다. 그렇다면 직사각형의 가로의 길이는 아까 보았던 것과 똑같이 사다리꼴에서 윗변과 아랫변 길이의 합이 되겠고, 직사각형의 세로의 길이는 사다리꼴의 높이와 같죠. 그래서 이렇게 표현하면 결국 똑같아 지죠. **사다리꼴의 넓이＝직사각형의 넓이**÷2 ＝**(윗변＋아랫변)**×**높이**÷2
	등적변형 *	T: 이런 경우에 평행사변형 넓이가 바로 사다리꼴의 넓이지요? 그렇다면 이 길쭉한 평행사변형의 넓이를 구하기 위해 무엇이 필요한지 봅시다. 평행사변형의 밑변의 길이는 사다리꼴의 어느 부분이 되나요? (윗변과 아랫변을 합한 길이) 그렇죠. 그리고 이 평행사변형의 높이는 실제 사다리꼴 높이의 반이 되겠죠. 그래서 이렇게 나타날 수 있고, 이 식은 결국 이전에 말했던 식과 같아집니다. **사다리꼴의 넓이＝평행사변형의 넓이** ＝**(윗변＋아랫변)**×**(높이**÷2)
	반적변형 (수업에서 제시 못함)	**사다리꼴의 넓이＝직사각형의 넓이**×2 ＝{**(윗변＋아랫변)**÷2}×{**(높이)**÷2}×2 ＝**(윗변＋아랫변)**÷2×**높이**÷2×2 ＝**(윗변＋아랫변)**÷2×**높이**



[그림 Ⅳ-2] 사다리꼴 넓이 구하기 식을 드러내기 좋은 복합(분할과 등적변형)의 방법

마름모의 넓이 구하는 방법을 학생들이 다양하게 찾아 설명하고 공유한 후에 수업자는 먼저 마름모의 넓이를 알기 위해 어떤 부분의 길이를 이용했는지 물어보고, 마름모에서는 변의 길이가 아닌 대각선의 길이를 이용한다는 것을 함께 확인하였다. 이때 대각선이 무엇인지, 다른 도형에서는 대각선이 어떠한지를 살펴보면서 대각선의 개념을 명확히 하고, 마름모에서 어떤 특징을 갖고 있는지 알아보았다. 또한 이 수업에서 칠판에 공식을 쓰는데 '가로 대각선의 길이', '세로 대각선의 길이'라는 용어가 너무 길어 오히려 형식화 과정을 복잡하게 느낄 수 있기 때문에 학생들과 간단한 용어로 가로 대각선의 길이를 '가대', 세로 대각선의 길이를 '세대'로 줄이기로 약속하고 형식화 과정을 시작하였다. 수업에서는 가대, 세대라는 표현으로 줄여 썼으나, <표 Ⅳ-6>에서는 그 부분을 원래대로 표현하였다. 수업에서는 배적변형과 등적변형 두 가지 총 세 가지 사례를 선택하여 공식이 되는 것을 보여주었다. 그러나 마름모의 경우, 수업에 제시하지 못하였지만 <표 Ⅳ-6>의 아래에 나타낸 것과 같이 반적변형, 분할의 사례로도 형식화가 가능하다. 사다리꼴에서는 덧셈에 관한 곱셈의 분배법칙을 이해하지 못하는 상황에서 형식화로 가기 힘든 경우가 있지만 마름모의 경우에는 평행사변형이나 삼각형의 넓이와 마찬가지로 곱셈과 나눗셈으로만 식이 구성될 수 있기 때문에 분할방법의 사례에서도 형식화가 쉽게 드러날 수 있다.

<표 Ⅳ-6> 마름모 넓이에 대한 형식화 과정

선택 사례	보존 방법 (* 수업제시)	의사소통 과정(**판서**)
	배적변형 *	T: 이 경우에는 마름모의 넓이를 구하기 위해 대각선의 길이를 이용해서 어떻게 해결한 것일까요? S: 가대와 세대를 곱한 것의 반입니다. T: 그렇다면 이렇게 표현하면 되나요? **(마름모의 넓이)=(직사각형의 넓이)÷2** **=(가로 대각선)×(세로 대각선)÷2**
 	등적변형 *	T: 3조와 4조에서 이렇게 직사각형으로 바꾸어 해결했는데, 이 직사각형의 길이가 마름모의 길이가 되겠죠. 이 직사각형의 가로의 길이는 결국 마름모에서 어디일까요?(가로 대각선의 길이) 그럼 세로의 길이는요?(세로 대각선 길이의 반) 그렇다면 마름모의 넓이는 이렇게 표현할 수 있네요. 이것은 결국 조금 전에 정리했던 식과 같다고 할 수 있겠죠. **(마름모의 넓이)=(직사각형의 넓이)** **=(가로 대각선)×(세로 대각선÷2)**
	반적변형 (수업에서 제시 못함)	**(마름모의 넓이)=(직사각형의 넓이)×2** **=(가로의 길이)×(세로의 길이)×2** **=(가로 대각선÷2)×(세로 대각선÷2)×2** **=(가로 대각선)÷2×(세로 대각선)**
	분할 (수업에서 제시 못함)	**(마름모의 넓이)=(삼각형의 넓이)×2** **=(밑변의 길이×높이÷2)×2** **=(가로 대각선)×(세로 대각선÷2)÷2×2** **=(가로 대각선)×(세로 대각선÷2)**
	분할 (수업에서 제시 못함)	**(마름모의 넓이)=(삼각형의 넓이)×4** **=(밑변의 길이×높이÷2)×4** **=(가로 대각선÷2)×(세로 대각선÷2)÷2×4** **=(가로 대각선)÷2×(세로 대각선)**

Ⅴ. 결론 및 시사점

본 연구는 초등학교 5학년 1학기 평면도형의 넓이를 구해보는 수업에서 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 넓이를 구해보는 학습에서 학생들이 찾은 다양한 해결 방법을 토대로 어떤 방법을 주로 이용하였는지를 분석하고, 다양한 해결 방법 중에서 의미 있는 형식화를 위해 선택한 것과 교사가 공식으로 유도한 과정에 대해 사례 연구를 하였다. 이를 통해 형식화 과정 이전에 이루어져야할 다양한 해결 방법에 대한 학생 이해와 귀납적 추론과정을 거쳐 의미 있게 공식으로 유도하는 교수-학습 상의 시사점을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 평면도형의 넓이 학습에 대한 사전-사후 개념 연결이 매우 중요하므로 5학년에서 평면도형의 넓이 학습 시 사전 학습 상태를 진단하고 그에 맞게 재구성할 필요가 있다. 2014년까지 5학년의 경우 2007 개정 수학과 교육과정의 적용 아래 4학년 2학기와 5학년 1학기에 각각 평면도형의 넓이와 관련된 내용이 나누어지게 된다. 5학년 때 평행사변형의 넓이부터 마름모의 넓이까지 학습을 하게 되는데, 4학년 2학기 때 배운 단위 넓이의 개념과 직사각형의 넓이 구하는 원리를 제대로 이해하지 못하면 5학년에서 배우는 넓이 수업은 의미 있는 형식화 과정 없이 공식 암기와 그 식을 이용한 문제 해결 위주로 수업이 진행될 가능성이 높아진다. 기존에 알던 지식에 대해 제대로 알아야 평면도형의 넓이부터 마름모의 넓이까지 다양한 해결 방법이 도출되고 형식화 과정까지 이해할 수 있다(나귀수, 2012). 2009 개정 수학과 교육과정에서는 5~6학년군에서 넓이 개념, 넓이 단위, 직사각형부터 마름모까지의 넓이를 모두 다루게 되어 있는데 한 학년이나 한 단원으로 묶어서 지도하는 것이 더 효과적일 수 있다. 평면도형의 넓이 학습과 같이 연계성이 강한 내용은 교육과정 상 학년이나 학기로 구분되는 경우, 사전-사후 개념 연결을 위해 반드시 이전 학습 수준을 진단하고, 그에 맞는 재구성이 요구된다.

둘째, 수업에서 의미 있는 형식화 과정이 드러나기 위해서는 그 이전에 학생들의 다양한 해결 방법이 반드시 전제되어야 한다. 자신이 찾은 해결 방법을 형식화해볼 수 있다면 가장 의미 있으나, 초등학교 학생들의 수준에서 모든 방법을 형식화하기는 어렵다. 본 연구에서 학생들이 찾은 다양한 해결 방법을 모두 형식화할 수는 없었으나 귀납적 추론을 위해 다양한 방법을 형식화하는 것이 의미 있다는 판단 아래, 해결 방법 중 3가지 이상의 방법을 선정하여 형식화 과정을 보이려고 노력하였다. 초등학생들의 수준에서 공식을 만들고 발견해나가기에 가장 효과적인 것은 귀납적 추론 과정을 통해 점진적으로 형식화해가는 것이다. 귀납적 추론을 위해서는 학생들이 스스로 해결한 방법들을 공유하고, 다양한 방법을 식으로 표현하면서 최대한 간결하게 표현해보기 위한 과정이 드러나야 한다(유연자, 방정숙, 2008). 따라서 형식화 과정 이전에 다양한 해결 방법을 경험하는 것이 매우 중요하며, 다양한 해결 방법은 학생들이 찾아내야 하지만 해결 방법을 충분히 도출하기 위한 교사의 역할이 요구된다.

셋째, 의미 있는 형식화 과정을 위해서는 공식에 제시되는, 필요한 요소들의 개념을 명확히 해야 한다. 다양한 해결 방법을 공유하고 나면 평면도형의 넓이를 구하기 위해서 각 도형에서 어떤 부분의 길이가 필요했는지 최소한 무엇을 알고 있어야하는지 조건을 명확히 파악해야 한다. 평행사변형과 삼각형에서는 밑변·높이, 사다리꼴에서는 윗변·아랫변·높이, 마름모에서는 두 대각선의 길이가 필요하다. 이때, 밑변·높이·윗변·아랫변·대각선의 개념과 각 요소 간의

관계를 정확히 알고 있어야 이미 알고 있는 길이를 활용하면서 넓이를 구할 수 있도록 변형하거나 분할할 수 있다. <표 Ⅳ-5>에서 마름모 넓이를 구하는 방법 중에서 기타로 구분해놓았던 두 가지 방법은 마름모의 대각선 길이만 알고 있다는 조건을 고려하지 않고, 돌려서 평행사변형으로 생각하여 넓이를 구하겠다고 하거나, 마름모를 평행사변형이라 생각하고 등적변형을 이용하여 직사각형으로 만들어 넓이를 구하려 하였다. 이런 사례는 학생들이 주어진 조건을 명확히 이해하지 못하고, 넓이를 구하기 위해 알아야 할 길이 부분을 활용하지 못한 경우이다. 의미 있게 형식화하기 위해서는 주어진 도형의 넓이를 구하기 위해 알아야하는 최소한의 조건을 명확히 이해하고, 각 요소들의 개념과 관계를 이해하고 있어야 한다.

넷째, 형식화 과정에서 다양한 해결 방법 중 어떤 것을 선택하여 공식으로 유도할 것인가에 대한 교사의 역할이 매우 중요하다. 평면도형의 넓이를 구하는 식을 형식화하는 과정에서 학생들이 찾은 다양한 방법을 모두 공식으로 연결하기는 쉽지 않다. 따라서 형식화 과정에서 학생들이 찾은 방법 중 어떤 것을 선택할 것인지가 매우 중요하다(Smith & Stein, 2011). 연구 결과를 보면 평행사변형의 경우 모두 등적변형의 사례로 공식을 유도하였고, 사다리꼴에서는 학생들이 가장 선호했던 분할 방법으로 공식을 끌어내지 못했다. 삼각형에서는 다양한 해결 방법을 고르게 제시하여 공식으로 유도하였다. 수업 사례를 분석해본 결과, 형식화를 위해서 교사는 학생들이 찾은 다양한 해결 방법 중, 어떤 도형으로 변형하여 넓이를 구하였는지 변형된 도형이 최대한 다양하게 선택하고, 어떤 방법으로 넓이를 해결했는지에 대한 방법적인 측면에서도 다양하게 제시하는 것이 형식화 과정에서 도움이 되었다. 따라서 교사는 학생들의 다양한 해결 방법을 이해하고 있어야 할 뿐만 아니라 어떤 것을 공식으로 유도하는 것이 좋을지 미리 파악해둘 필요가 있다. 가능하다면 많은 학생들이 해결한 방법을 공식으로 유도하여 학생들이 어떤 원리로 공식이 나온 것인지를 쉽게 이해할 수 있도록 하는 것이 바람직하다. 또한 [그림 Ⅳ-2]와 같이 학생들이 찾아내기 어려운 방법이지만 형식화하기 좋은 예가 있을 경우 교사가 다양한 방법의 한 가지로 제시하고, 쉽게 공식으로 표현하는 방법도 고려할 필요가 있다.

점진적이고 의미 있게 형식화가 이루어지려면 다양한 해결 방법을 공유하는 것과 수학에서의 합리성 및 간결성을 결합하여 결국 학생들의 수학적 사고와 의사소통 속에서 형식화가 이루어질 수 있도록 해야 한다. 연구 대상이었던 학급의 학생들 대부분이 다양한 해결 방법을 토대로 귀납적 추론 과정을 거쳐 점진적으로 형식화가 이루어지는 수업을 경험하였다. 본 연구의 형식화 과정은 교사가 주도하여 진행되었다. 그러나 학생들의 다양한 해결 방법에 대한 체험과 수학적으로 합리성과 간결성을 추구하고자 하는 방향을 설정하여 형식화 과정을 의미 있게 경험하다보면, 학생들은 점차 교사의 주도나 직접적인 개입이 없어도 식을 간결하게 표현해보려는 사고와 태도를 가질 수 있을 것이다. 앞으로 본 연구 결과와 논의를 바탕으로 알고리즘을 도출하는 형식화 과정 없이 결과만 지나치게 강조하는 경향을 개선하기 위해, 수학 전 영역에서 구체적으로 의미 있는 형식화 과정에 대한 연구가 이루어지기를 기대한다. 또한 학생이 자기주도적으로 형식화 과정을 이끌어 갈 수 있는 방안에 대한 연구도 필요하다. 주어진 시간 내에 학습해야 할 양이 정해져있는데, 학생들의 다양한 해결 방법을 파악하고, 여기에 형식화까지 학생들이 스스로 해보게 하는 것에 대해 교사들은 큰 부담을 갖기 마련이다. 이러한 문제를 해결하면서 주

어진 시간 내에 학생들이 형식화 과정을 주도할 수 있으려면 수학수업문화와 교사 지식 등 다양한 측면에서 연구 및 개선을 위한 실천 의지와 노력이 필요하다. 이러한 부분에 대한 수업 사례 연구가 다양한 수학 영역과 내용에서 이루어진다면 의미 있는 형식화 과정을 중요시하는 수업 개선에 기여할 수 있을 것이다.

참고문헌

강문봉 외(2001). **초등수학교육의 이해**. 서울: 경문사.

교육과학기술부(2011a). **2009년 개정 수학과 교육과정**. 교육과학기술부.

교육과학기술부(2011b). **수학 5-1**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2011c). **수학 익힘책 5-1**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2011d). **수학 지도서 5-1**. 서울: 두산동아.

김정하 · 강문봉(2011). 평면도형의 넓이 측정 지도에 대한 고찰. **한국초등수학교육학회지, 15**(3), 509-531.

나귀수(2012). 평면도형의 넓이 측정지도에 대한 고찰. **한국초등수학교육학회지, 16**(3), 451-469.

박선영 · 강완(2012). 평면도형의 넓이 지도에 대한 교사의 PCK 분석. **수학교육학연구, 22**(4), 495-515.

박선용 · 최지선 · 박교식(2008). 넓이 개념의 SMSG 교수-학습 방식에 대한 비판적 고찰. **학교수학, 10**(1), 123-138.

박성선(2011). 수학적 탐구학습이 넓이공식의 학습에 미치는 효과. **초등수학교육, 14**(1), 43-55.

박은률 · 백석윤(2010). 평면도형의 넓이 학습에서 나타나는 인식론적 장애. **수학교육학연구, 20**(3), 305-322.

박혜경 · 김영희 · 전평국(2006). 초등학교 5학년 학생들의 넓이 측정과 관련된 지식 상태의 분석. **한국수학교육학회 전국수학교육연구대회 프로시딩, 37**, 79-90.

방정숙 · 김상화 · 박금란(2006). **초등교사의 수학과 교수법적 내용 지식 정립을 위한 교수 · 학습 자료 개발**. 2005년도 교과공동연구 결과보고서. (과제번호: KRF-2005-030- B00045).

안선영 · 방정숙(2006). 평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용 지식과 수업 실제 분석. **수학교육학연구, 16**(1), 25-41.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

유미현 · 강흥규(2009). Freudenthal의 수학화 이론에 근거한 제 7차 초등수학 교과서 5-가 단계 넓이단원의 재구성. **한국초등수학교육학회지, 13**(1), 115-140.

유연자 · 방정숙(2008). 초등학교 5학년 평면도형의 넓이 구하기 수업에서 나타난 학생들의 해결 방법 분석. **학교수학, 10**(3), 443-461.

임아름 · 박영희(2011). 개방형법에 따른 평면도형의 넓이 지도에 대한 연구. **한국초등수학교육학회지, 15**(2), 361-383.

정경순 · 임재훈(2011). 직사각형, 평행사변형, 삼각형 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 초등학생들의 이해 조사. **수학교육학연구, 21**(2), 181-199.

정동권(2001). 평면도형의 넓이 지도를 통한 수학적 사고의 신장. **인천교육대학교 과학교육논총, 13**(13), 1-36.

최길남 · 박영식(2010). 산학서에서의 평면도형 넓이에 관한 연구. **East Asian Mathematical Journal, 26**(2), 191-218.

최지선 · 유미경 · 박선용 · 권석일 · 박교식(2008). 수학교육에 관한 드모르간의 관점 조명. **수학교육학연구, 18**(2), 223-237.

Joram, E. (2003a). Benchmarks as tools for developing measurement sense. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (2003 Yearbook, pp. 57-67). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. L. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (2003 Yearbook, pp. 100-122). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). 5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 방정숙 역 (2013). **효과적인 수학적 논의를 위해 교사가 알아야 할 5가지 관행**. 서울: 경문사.

Stephan, M. & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (2003 Yearbook, pp. 3-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

An Analysis of a Teacher's Formalization Procedure Based on Students' Various Solution Methods in Teaching the Area of Plane Figures

Kim, SangHwa (Yongin Sanyang Elementary School)
Pang, JeongSuk (Korea National University of Education)
Jung, YooKyung (Graduate School, Korea National University of Education)

The purpose of this study was to analyze students' various solution methods revealed in the lessons of finding out the area of plane figures, and to explore instructional implications on how to draw meaningful formalization out of such multiple methods. The teacher in this study tended to select a few solution methods that were easy for students to understand and to induce formalization. An analysis of students' solution methods and the process of formalization showed that students need to understand what parts of the length of the given plane figure they should know, and to identify the base, height, and diagonal line of the figure. The analysis also showed that it was effective to choose the solution methods that were used by many students and that could be easily transformed into a concise formula. Based on these results, this paper provides instructional suggestions for a teacher to orchestrate classroom discussion toward formalization based on students' multiple solution methods.

* Key Words : teaching the area of plane figures(평면도형의 넓이 수업), various solution methods(다양한 해결 방법), procedure of meaningful formalization(의미 있는 형식화 과정)

논문접수 : 2013. 11. 10
논문수정 : 2013. 12. 15
심사완료 : 2013. 12. 20