대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 4, 723 ~ 742. Dec 2013

초등수학 비구조화된 문제 해결 과정에서의 비례적 추론1)

홍 지 연* · 김 민 경**

본 연구는 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 수학 학습에 비구조화된 문제의 해결 활동을 적용하여 문제 해결 과정에 나타난 초등학생의 비례적 추론 과정을 분석하여 학생들의 비례적 추론 수준과 형태의 특징을 알아보는 것을 목적으로 하였다. 연구 결과 학생들은 주어진 비구조화된 문제를 해결하면서 모둠별로 다양한 양상으로 비논리적(illogical) 접근, 덧셈적(additive) 접근, 곱셈적(multipicative) 접근, 함수적(functional) 접근의 비례적 추론 수준과 형태를 나타내었다. 또한 학생들은 비구조화된 문제를 [문제 이해하기]-[해 구하기]-[적용하기]의 과정을 통해 해결하면서 [양의 인식]-[비례적 관계 발견]-[비례적 관계 확장]의 흐름으로 비례적 추론의 모습을 나타냈다. 학생들로 하여금 실생활에서의 비, 비례 상황에서 여러 가지 양들을 비례적으로 추론할 기회를 갖도록 하여 비례적 추론을 발전시킬 수 있도록 해야 할 것이다.

I. 서 론

현실 생활에서 접하는 여러 가지 실세계 맥락의 문제들에 대한 수학적 문제해결력이 요구되는 사회적 필요에 부응하는 하나의 방안으로 학교수학교육 현장에 비구조화된(ill-structured) 문제의 적용을 생각해볼 수 있다. 비구조화된 문제는 특정한 현실 맥락이 상황화되어 학습자 스스로가 문제를 정의하고 문제 해결에 요구되는 정보와 기술을 결정하도록 하는 문제이다(Chi & Glaser, 1985). 이러한 비구조화된 문제를 교수·학습에 적용함으로써 학생들로 하여금 정형화되지 않은 문제들을 경험하고, 이를 해결할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

또한 비구조화된 문제는 학생들의 수학적 사고력 향상을 위한 대안으로도 고려될 수 있다. 비구조화된 문제와 같이 정형화되지 않은 문제들은 학생들로 하여금 추상화된 수학적 지식들을 자신의 일상과 연관시킴으로써 현실의 문제 상황을 추상화, 일반화, 형식화하도록 한다(Ge & Land, 2003). 뿐만 아니라, 학생들로 하여금 정보의 재조직 및 명확한 사고를 통해 새로운 이해에 이르게 하고, 문제 해결을 위한 대안들을 평가하도록 함으로써 가장 적합한 해결 방안을 모색하게 한다. 이와 같은 특성을 지닌 비구조화된 문제는 학생들의 추론 및 추상화와 같은 고차원적 수학적 사고 기능의 발달을 위해 적극 활용될 필요가 있다.

더구나 학생들의 수학적 발달 및 상위 수학 학습에 대한 초석이 되는(Lesh, Post & Beghr, 1988) 비례적 추론은 초등 및 중등 수학 학습에서 강조되는 고차원적 수학적 사고 기능으로(NCTM, 1989, 2000), 학생들로 하여금 비구조화

* 서울동구로초등학교, cutty-hjy@hanmail.net
** 이화여자대학교, mkkim@ewha.ac.kr (교신저자)
1) 본 논문은 2013년 홍지연의 박사학위논문의 일부 내용을 보완하고 재수정한 것임.

된 문제와 같이 실세계 맥락의 비와 비례 상황을 통해 실생활에서의 양들을 다루도록 함으로써 발전시킬 수 있다(Lobato, Ellis, Charles & Zbiek, 2010).

이에 본 연구에서는 초등학교 5학년의 수학 교수·학습에 비구조화된 문제를 적용하여 학생들이 비구조화된 문제의 해결 과정에서 나타내는 비례적 추론 과정을 분석하고, 학생들의 비례적 추론의 수준과 형태에 대한 특징을 살펴보고자 하였다. 이에 대한 연구 결과들은 학교수학교육 현장에서의 수학 교수·학습과 학생들의 비례적 추론 발달과 관련하여 비구조화된 문제의 해결 학습이 갖는 시사점을 제시하는데 기여할 것으로 보인다.

II. 이론적 배경

1. 비구조화된(ill-structured) 문제

비구조화된 문제는 특정 맥락으로부터 출현하여 상황화된 것으로 상황의 측면들이 구체화되어 있지 않고, 문제의 기술이 명확하지 않거나 잘 정의되어있지 않은 문제를 말하며(Chi & Glaser, 1985), 보다 현실적이고 실제적인 상황을 바탕으로 하고 개방성을 지니면서 단순하기보다는 복잡한 상황이 제시되는 특징을 가진다. Jonassen(1997) 및 Shin, Jonassen과 McGee(2003), Palm(2008), Torulf(2008) 등은 비구조화된 문제의 속성들에 관하여 언급하였는데, 이들 속성에 관하여 김민경, 이지영, 홍지연, 김은경(2011)은 실제성(authenticity), 복잡성(complexity), 개방성(openness)으로 정리하였다. 실제성(authenticity)은 일상생활과 학교 밖의 현실 상황을 묘사한 수학 과제 및 문제가 일치하는 것을 말하며(Palm, 2008), 문제가 실제성을 가지려면 일상생활의 맥락을 다루면서 현실 상황의 중요한 부분들이 추론될 수 있을 만큼 모방되어야 한다(Fitzpatrick & Morrison, 1971). Jonassen(1997)은 비구조화된 문제에 나타난 복잡성(complexity)의 특성을 ⓐ 문제를 해결하는데 요구되는 개념, 원리, 법칙 혹은 이들이 어떻게 조직되는지에 대하여 불확실성을 나타냄, ⓑ 문제에 포함된 사례들 사이의 개념, 원리, 법칙들이 일관성 없는 관계를 나타냄으로 보았다. 또한 Jonassen(1997)은 다른 한편으로 개방성과 관련한 비구조화된 문제의 속성으로 ⓐ 문제 해결에 관하여 여러 개의 평가 준거가 존재함, ⓑ 적절한 행동을 위한 명확한 수단이 제시되지 않음, ⓒ 문제에 관하여 학습자 스스로가 개인적 의견 및 신념을 표현하도록 함, ⓓ 학습자 스스로 문제에 관하여 판단하고 그에 대해 변호하도록 함을 제시하였으며, Shin, Jonassen과 McGee(2003)는 비구조화된 문제가 지닌 개방성의 특성이 학생들로 하여금 문제 해결에 관한 다양한 해석을 가능하도록 하고 문제해결에 관한 자신의 해석을 정당화하도록 한다고 언급하였다.

이와 같은 비구조화된 문제의 특성에 따라 여러 학자들(Ge & Land, 2003; Jonassen, 1997; Shin, Jonassen & McGee, 2003, Sinnott, 1989)은 구조화된 문제해결의 프로세스와는 다른 비구조화된 문제해결의 프로세스들을 제시하였는데, Sinnott (1989)는 비구조화된 문제해결 모델로 문제공간 구성, 해결방안의 선택과 생성, 모니터/기억/비인지적 요소 및 think-aloud 프로토콜 사용의 프로세스를 제안하였고, Ge와 Land(2003)의 경우, 비구조화된 문제해결 모델을 문제 표상(problem representation)과 해결책 모색(developing solutions), 정당화(developing justification), 그리고 관찰과 평가(monitoring and evaluation)의 네 단계의 과정으로 설명하였다. 또한 Jonassen(1997), Shin, Jonassen과 McGee(2003)도 이와 유사한 흐름으로 비구조화

된 문제에 관한 해결 프로세스를 제시하였는데 이들 비구조화된 문제에 대한 문제해결 모델들은 모두 문제 표상, 해결책 생성, 정당화, 검토 및 평가의 프로세스를 포함하고 있으며, ⓐ 문제가 있음에 대한 인식, ⓑ 문제에 대한 명확한 이해, ⓒ 관련된 정보의 검색 및 선택, ⓓ 대안적 관점의 확인 및 정당화, ⓔ 새로운 문제상황에 맞도록 정보 조직, ⓕ 문제의 조건에 적절한 가장 좋은 해 결정, ⓖ 논쟁의 발전 및 개인적 신념과 가치에 대한 명확한 표현의 프로세스와 관련되어 있다(Hong, 1999)는 공통점을 가진다.

Palm(2008), Shin, Jonassen과 McGee(2003), Ge와 Land(2003) 등의 연구에 따르면, 학생들에게 비구조화된 문제 상황을 제시하고 이를 비구조화된 문제 해결 프로세스를 통해 해결하도록 하였을 때, 학생들은 '실세계'의 상황을 고려하여 보다 실제적인 해결 전략을 제시하고, 정보를 재조직하고 사고를 명확히 함으로써 새로운 이해에 이르게 되었을 뿐만 아니라, 문제 해결에 대한 대안적인 관점을 가지고 문제를 해결하기 위한 여러 가지 대안들을 평가하고 검토하며 가장 적합한 해결방안을 모색하였다.

이상에 언급된 바에 따르면, 실제성, 복잡성, 개방성과 같은 특성을 지니는 비구조화된 문제는 학생들로 하여금 현실적인 상황을 포함한 복잡한 문제에 대해 스스로 탐구하고 해결하도록 함으로써 고차원적인 수학적 사고력 및 실생활 문제 해결 능력을 신장시키는데 중요한 역할을 한다.

2. 비례적 추론

추론은 수학의 이해에 있어 핵심적 사고 방법으로, 학생들로 하여금 여러 가지 현상에 대해 통찰하고 표현하도록 함으로써(NCTM, 2000) 학교수학에서 강조되고 있다. 이와 관련하여 NCTM(2000)은 학생들이 이용할 수 있는 추론의 형태로 대수적 추론, 기하 추론, 비례적 추론, 확률 추론, 통계 추론을 제시하고, 학교교육과정이 진행됨에 따라 학생들이 이들 추론 형태에서 능숙해져야 한다고 주장하고 있다.

수학적 추론의 한 유형인 비례적 추론은 "비례적인 관계에 대한 주장을 뒷받침하는 근거를 찾아내고, 표현하고, 분석하고, 설명하고, 제공하는 것"(Lamon, 2007, p. 647)으로, 똑같은 관계를 다른 쌍의 양들로 확장시키는 능력뿐만 아니라, 두 양들 사이의 곱셈적 관계를 식별하는 능력으로 구성된다(Lamon, 2007).

이러한 비례적 추론은 지금까지 대부분의 학생들이 어려워하는 수학적 추론의 한 영역으로 학생들의 수학적 발달에 중요한 역할을 하고, 상위 수학 학습에 대한 초석의 역할을 하며, 기본 개념들에 대한 절정으로 언급된다(Lesh, Post & Beghr, 1988). 특히 비례는 다른 학습 요소들(예를 들어, 기하, 대수, 확률과 통계 등)과 깊은 관련성을 가지고 있어(김성준, 2004; Freudenthal, 1978; Lesh, Post & Behr, 1988; Watson, 2006) 중요한 수학 학습의 요소로 알려져 있다(고은성, 이경화, 2007). 또한 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]에 따르면, 비례적으로 추론하는 능력이 5~8학년의 학생들에게서 발달될 뿐만 아니라 아무리 시간과 노력이 요구되더라도 발달시켜야 할 만큼 중요하며(NCTM, 1989, p. 82), 비례는 6~8학년에서 학습되는 많은 수학 주제들을 연결시켜주는 중요한 통합적 연결고리임을 강조하고 있다(NCTM, 2000, p. 217).

이와 같은 비례적 추론에 관하여 Lobato 외 (2010)는 비례 및 비례적 추론에 대한 big idea와 핵심 이해(essential understandings) 및 비례적 추론 발달에서의 전환(shift)을 제시함으로써 학생들의 비례적 추론 관련 이해와 전환의 수준을 발전시켜야 한다고 제안하였다. Baxter와

<표 II-1> 선행연구에 제시된 비례적 추론 과정(수준/단계)

학자	비례적 추론 과정(수준/단계) ⟷				
Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel (2008)	어린 나이 -선형적 추론 (linear reasoning)	6~7세 -building-up 전략 혹은 쉬운 곱셈적 스칼라 추론	2, 3학년 -곱셈과 나눗셈 적용 상황 인식	4, 5학년 -비례적 개념의 형식적 발전	이후 학생들 -심화된 비례적 추론 기능 연습
Kaput & West (1994)	통합적 구성 접근 (coordinated build-up/ build-down approach)	축약적 구성 접근 (abbreviated build-up/ build-down approach)	단위 인수 접근 (unit factor approach)	형식적 방정식 접근 (formal equation approach)	
Baxter & Junker (2001)	질적 추론 단계 -수치가 아닌 질적으로 비교	양에 대한 초기 시도 단계 -덧셈적 차이 사용	곱셈적 관계 인식 단계 -곱셈적 추론	공변과 불변의 조화 단계 -변화하는 양들 사이 불변하는 양의 존재함 인식	양들 사이의 함수 관계 및 스칼라 연산 관계 이해 단계
Karen & Lesh (2003)	문제에 대한 해석에 기반을 둔 단계 -부정확한 개념을 통한 문제 이해	질적 관계에 기반을 둔 단계 -질적 추론 사용	덧셈적 관계에 근거하여 추론하는 단계	패턴의 인식, 복제 및 buildup strategy 사용 단계	비율관계를 존속시키는 관계 이해에 기초를 둔 단계 -곱셈적 비례 추론을 개념화
Karplus et al. (1970, 1974, 1980)	수준 I (illogical) -기술적인 관찰에 근거한 비논리적인 계산, 추측, 혹은 일반적인 어림	수준 A (additive) -두 수 사이의 차이에 초점	수준 TR (transitional) -덧셈적 접근 사용	수준 R (ratio) -일정한 비의 관계 사용 혹은 곱셈적 비교	
Olof (2003)	질적추론 전략 수준 -비형식적, 직관적 지식에 근거, 질적으로 비교	덧셈 전략 수준 - building-up 전략 사용	곱셈 전략 수준 -비와 비 사이의 공변량과 불변량을 이해		

Junker(2001)의 경우, 비례적 추론의 발달 단계를 5단계로 제시하였는데 이에 따르면, 첫 번째 질적 추론 단계에서 학생들은 주어진 양들을 정확한 수치가 아닌 질적으로 비교하고, 두 번째 양에 대한 초기 시도 단계에서 학생들은 덧셈적 차이를 사용하여 주어진 양들의 관계를 비교하며, 세 번째 곱셈적 관계를 인식하는 단계에서는 변화하는 두 수의 관계를 비로 나타내기 시작함으로써 수를 세거나 building-up 전략을 사용하여 곱셈적 추론을 하게 된다. 또 네 번째 공변과 불변의 조화 단계에서 학생들은 변화하는 양들 사이에 불변하는 양이 존재함을 인식하며, 다섯 번째 단계에서 학생들은 양들 사이에 존재하는 함수 관계 및 스칼라 연산 관계를 이해하게 된다.

이러한 수학 학습에서의 비례적 추론에 대하여 연구자들(<표 II-1> 참조)은 비례적 추론의 과정을 몇 가지 수준 혹은 단계로 구분하였는데, 여러 연구들을 정리하여 보면, 학생들에게서 나타나는 비례적 추론의 발달 수준은 두 양 사이의 비례적 관계를 인식하지 못하고 질적으로 추론하는 비논리적(illogical) 접근 수준과 두 양 사이의 관계를 덧셈적 관계로 인식하고 추론하는 덧셈적(additive) 접근 수준, 두 양 사이의 관계를 곱셈적 관계로 인식하고 추론하는 곱셈적(multiplicative) 접근 수준, 그리고 두 양 사이의 관계를 함수 관계로 인식하고 추론하는 함수적(functional) 접근 수준으로 구분할 수 있다.

III. 연구 방법

본 연구는 초등학생의 비구조화된 문제의 해결 과정에서 나타내는 비례적 추론 과정 분석을 통해 비례적 추론 수준과 형태의 특징을 알아보는 것을 목적으로 하였다. 이를 위하여 본 연구에서는 맥락 속에서 풍부한 자료 수집을 통해 하나 혹은 복합적인 사례를 심층분석하는 (Creswell, 2005) 사례연구 방법을 택하여 학생들의 수업 활동 자료를 주의 깊게 분석함으로써 학생들의 비례적 추론 과정을 살펴보았다.

1. 연구 대상

본 연구는 서울특별시 소재의 초등학교 5학년 한 학급을 선정하여 연구를 진행하였다. 본 연구의 연구 대상 학급은 전체 20명으로 남학생 9명(45%), 여학생 11명(55%)로 구성되었으며, 이들 학생들은 임의로 모둠당 3명 혹은 4명씩 총 6개 모둠으로 구분되어 비구조화된 문제의 해결 활동에 참여하였다.

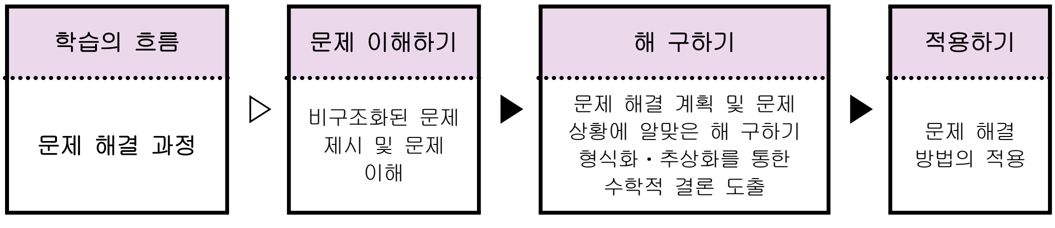
2. 연구 설계

가. 비구조화된 문제의 해결 학습 설계

비구조화된 문제는 실제성과 복잡성 및 개방성을 바탕으로 특정한 실세계의 맥락이 구체화되지 않은 문제 상황으로 만들어져 학습자로 하여금 스스로 문제를 해석하고 해결 방법을 모색하여 적절한 해를 찾도록 한다. 또한 비구조화된 문제는 학습자로 하여금 문제를 해결하는 동안 문제를 표현하고, 해결책을 만들어내며, 자신들의 생각을 정당화하고, 여러 가지 방안들을 검토 및 평가하도록 하는 프로세스를 포함함으로써 (Hong, 1999) 고차원적인 수학적 사고력 및 실생활 문제 해결 능력을 신장시키는데 중요한 역할을 한다. 이러한 비구조화된 문제는 초등 수학 교육 현장에 적용됨으로써 학생들에게 실생활 맥락의 문제에 대한 해결 기회 및 경험을 제공하고 학생들의 문제 해결 능력을 향상에 중요한 역할을 할 수 있다. 본 연구에서는 Jonassen (1997)과 Ge와 Land(2003), Shin, Jonassen과 McGee(2003), Hong(1999)이 제시한 비구조화된 문제의 해결 프로세스를 참고하여 이를 우리나라 초등학교의 수학교육 현장 상황에 적용 가능하도록 초등학교 5학년 2학기의 문제 해결 학습을 설계하였으며, 본 연구에 적용된 비구조화된 문제의 해결 학습 절차는 [그림 III-1]과 같다.

본 연구에서는 이와 같은 절차를 문제 해결 방법 찾기 단원의 학습에 적용함으로써 학습자들이 비구조화된 문제의 해결 과정에서 나타내는 비례적 추론 분석에 중점을 두었다.

연구 대상에 적용될 문제 해결 학습의 설계를 위해서 먼저 규칙성과 문제 해결 영역 중 문제 해결 방법 찾기와 관련된 교육목표 설정을 통해 학습자가 성취해야 할 학습목표를 확인하고, 설



[그림 III-1] 본 연구에 적용된 비구조화된 문제의 해결 학습 절차

정된 교육목표에 학습자의 실세계 맥락이 반영된 학습 경험을 선정하였다. 이렇게 선정된 학습 경험들은 [그림 III-1]의 비구조화된 문제의 해결 학습 절차에 맞게 조직함으로써 비구조화된 문제의 해결 학습 교수・학습 과정안을 설계하였다.

본 연구에 적용된 문제 상황은 비구조화된 문제 관련 참고문헌과 우리나라의 2007 개정 수학과 교육과정, NCTM, 국내・외 교과서 분석을 바탕으로 하여 우리나라 초등학교 5학년에 적용 가능하며 학생들이 실세계 맥락 상황과 관련지어 문제를 해결하고 학습내용을 활용할 수 있는지를 알아볼 수 있는 비구조화된 문제 상황을 개발하였다. 개발된 문제 상황은 수학교육학자 1인과 초등수학교육전공 석・박사 과정의 초등교사 3인 및 초등학교 현장에서 수학을 가르치고 있는 21년 경력의 현직 초등교사 등 전문가의 자문 및 검토를 통해 내용타당도를 검증받고, 초등학교 현장 6학년 1개 학급2)에서 예비 연구로 적용한 후 최종적으로 수정・보완하여 완성하였다([그림 III-2] 참조).

나. 비례적 추론 과정 분석을 위한 설계

본 연구에서는 비구조화된 문제의 해결 학습에서 연구 대상이 나타내는 비례적 추론 과정을 분석하고자 하였으며, 이 연구 문제를 위해서 연구 대상의 학습 활동 내용과 연구자의 관찰 내용을 분석하였다. 연구 대상의 학습 활동 내용의 분석은 연구가 이루어지는 동안 산출된 모둠별 활동지 및 활동 결과물을 분석하고, 관찰은 학습이 진행되는 동안 나타나는 연구 대상의 학습 활동 과정의 파악을 위하여 연구자가 학습자의 활동을 관찰하여 기록한 후 이를 분석하였으며, 모둠별 활동 결과물과 학습 활동에 대한 관찰내용은 비례적 추론 수준 및 형태 분석 기준에 따라 연구자를 포함한 초등수학교육전공 석・박사 과정의 초등교사 3인이 독립적으로 검토한 후, 검토 내용에 대한 협의를 거쳐 협의 결과를 바

★★건설회사는 한 고객으로부터 다음과 같은 집을 지어달라는 주문을 받았습니다.

안녕하세요? 새로운 집 건설을 의뢰한 000입니다.
제가 원하는 집에 대한 구체적인 모습을 설명드립니다.

- 우선, 집 전체는 넓이는 가로 $20m$, 세로 $10m$, 넓이 $200m^2$의 직사각형 모양이 되어야 합니다.
- 침실은 5개, 드레스룸, 욕실 2개, 거실, 주방&식당, 다용도실, 발코니의 공간이 확보되어야 합니다.
- 가장 큰 침실은 $20m^2$로 해주시고, 욕실 및 드레스룸과 연결되어 직접 통할 수 있도록 해주세요.
- 나머지 침실들은 $12m^2$~$16m^2$가 되도록 해주세요.
- 거실과 주방&식당은 집의 가운데 위치해야 하며, 거실(복도 포함)의 넓이는 $44m^2$, 주방&식당은 $24m^2$가 되어야 합니다.
- 발코니는 거실과 연결되고, 다용도실은 주방과 연결되어야 합니다.
- 가장 큰 침실은 현관문과 되도록 멀리 떨어진 곳에 배치해주세요.

※ 이 조건들을 만족하는 설계도 몇 가지를 4절 도화지 크기로 만들어서 보내주시면, 검토 후 한 가지를 선택하도록 하겠습니다.

★★건설회사는 회사의 여러 팀에게 주문서 내용을 공지하여 조건에 맞는 설계도를 만들어 제출하도록 하고, 제출된 설계도 중 고객의 주문 조건에 가장 적합한 설계도를 뽑으려고 합니다. 모둠별로 ★★건설회사의 소속팀이 되어 최고의 설계도를 만들어 봅시다.

[그림 III-2] 본 연구에 적용된 비구조화된 문제[건축설계도]의 문제 상황

2) 본 연구가 실시된 해는 2007 개정 수학과 교육과정이 초등학교 5학년과 6학년에 처음 실시된 해로, 비와 비율 단원이 처음으로 5학년에 편성되었기 때문에 비와 비율 단원의 학습을 끝낸 예비 연구 대상으로 6학년 학생들을 선정함.

탕으로 분석되었다. 또 비구조화된 문제의 해결 학습 과정에서 산출된 모둠별 활동지 및 활동 결과물과 관찰내용에 대한 분석 결과 비례적 추론이 가장 높은 수준으로 이루어진 1개 모둠을 선정하여 분석하였다.

3. 연구 도구

본 연구에서는 앞서 언급된 비례적 추론 관련 연구(Baxter & Junker, 2001; Kaput & West, 1994; Karen & Lesh, 2003; Nabors, 2003; Tourniaire & Pulos, 1985)들에 제시된 비례적 추론의 수준과 단계 및 관련 내용을 바탕으로 비구조화된 문제의 해결 학습에 맞게 수정・보완하여 <표 III-1>과 같이 재구성하여 분석기준으로 사용하였다.

비례적 추론의 1수준인 비논리적(illogical) 접근 수준은 두 양 사이의 비례적 관계를 인식하지 못한 채 두 양을 비교하는 수준으로, 학생들은 문제 상황에 포함된 두 가지 양을 인식하여 두 양 및 이들 사이의 관계를 수치가 아닌 질적으로 비교하고 추론할 수 있으나 두 양 사이의 비례적 관계는 인식하지 못한다. 이 수준에서는 두 양의 인식 및 질적 비교, 질적 추론, 비례적 관계 인식 불가의 비례적 추론 형태가 나타나게 된다.

두 번째 덧셈적(additive) 접근 수준은 두 가지 양의 관계를 덧셈 관계로 인식하여 비교하고 추론하는 수준으로, 학생들은 문제 상황에 나타난 두 양을 덧셈적 차이를 사용하여 비교하고, 이들 사이의 관계를 덧셈 관계로 인식하여 추론하게 된다. 또한 비가 보존되는 두 대상 및 이들의 대응을 찾을 수 있으며, 두 대상의 단위를 반복적으로 더하는 방식으로 두 단위를 함께 조절하고 추론한다. 이 수준에서 학생들은 두 양 사이의 덧셈적 차이 인식과 덧셈 관계 추론, 비의 보존 및 대응 인식, 반복적 덧셈을 통한 단위 조절의 비례적 추론 형태를 보이게 된다.

3수준인 곱셈적(multiplicative) 접근 수준은 두

<표 III-1> 본 연구에 사용된 비례적 추론의 수준, 분석내용 및 형태

수준	분석내용	형태
[1] 비논리적 (illogical) 접근	・문제 상황을 이해하고 문제 상황에 나타난 두 가지 양을 인식하는가? ・문제 상황의 두 양을 수치가 아닌 질적으로 비교하는가? ・두 양 사이의 관계를 수를 사용하지 않고 질적으로 추론하는가? ・두 양 사이의 비례적 관계를 인식하지 못하는가?	-두 양의 인식 및 질적비교 -질적추론 -비례적 관계 인식 불가
[2] 덧셈적 (additive) 접근	・문제 상황의 두 양을 덧셈적 차이를 사용하여 비교하는가? ・두 양 사이의 관계를 덧셈 관계로 인식하고 추론하는가? ・비가 보존되는 두 대상을 인식하고 대응을 찾아내는가? ・두 대상의 단위를 반복적으로 더함으로써 추론하는가? ・반복적으로 더하는 방식으로 두 가지 단위를 함께 조절할 수 있는가?	-두 양 사이의 덧셈적 차이 인식 -덧셈 관계 추론 -비의 보존 및 대응 인식 -반복적 덧셈을 통한 단위 조절
[3] 곱셈적 (multiplicative) 접근	・두 양 사이의 패턴을 인식하고 반복을 통해 추론하는가? ・두 양 사이의 관계를 곱셈 관계로 인식하고 추론하는가? ・곱셈적 사고를 통해 두 가지 단위를 함께 조절할 수 있는가? ・변하는 두 양 사이의 관계를 비로 표현할 수 있는가?	-두 양 사이의 패턴 인식 및 곱셈 관계 추론 -곱셈적 사고를 통한 단위 조절 -비 표현
[4] 함수적 (functional) 접근	・둘 이상의 양 사이의 비례적 관계를 인식하고 복잡한 비례 추론을 개념화 할 수 있는가? ・양이 변화하는 동안에 양 사이의 불변하는 양이 존재함을 인식하는가? ・내적비 또는 외적비를 이용하여 비례식을 세울 수 있는가? ・동치분수에 대한 이해를 비의 개념과 통합하여 비례식의 원리를 이해하는가? ・두 양 사이의 함수 관계를 인식하는가?	-비례적 관계 인식 -변량과 상수의 존재 인식 -비례식 표현 -비례식의 원리 인식 -함수 관계 추론

양 사이의 관계를 곱셈 관계로 인식하고 추론하는 수준으로, 이 수준에서 학생들은 두 양 사이의 패턴을 인식하고, 두 가지 양을 곱셈 관계로 인식하여 곱셈적 사고를 통해 두 가지 단위를 함께 조절하며, 변화하는 두 양 사이의 관계를 비로 표현할 수 있다. 이 때에는 두 양 사이의 패턴 인식 및 곱셈 관계 추론, 곱셈적 사고를 통한 단위 조절, 비 표현의 비례적 추론 형태가 나타난다.

마지막 수준인 함수적(functional) 접근 수준은 둘 이상의 양 사이의 비례적 관계를 인식하고 복잡한 비례 추론을 개념화하며 함수 관계를 추론하게 되는 수준으로, 학생들은 양이 변화하는 동안에 양 사이에 불변하는 양이 존재함을 인식하고 동치분수에 대한 이해를 비의 개념과 통합함으로써 비례식의 원리를 이해하게 된다. 또한 내적비 혹은 외적비를 이용하여 비례식을 세우고 두 양 사이의 함수 관계를 인식하게 된다. 이 수준에서는 비례적 관계 인식, 변량과 상수의 존재 인식, 비례식 표현, 비례식의 원리 인식, 그리고 함수 관계 추론의 비례적 추론 형태가 나타나게 된다. 본 연구에서는 이 분석기준을 바탕으로 비구조화된 문제의 해결 과정에서 나타나는 학생들의 비례적 추론 사례를 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

비구조화된 문제 <건축설계도>에 대한 문제 해결 학습이 이루어지는 동안 학습자들은 제시된 실생활의 문제를 해결하면서 문제 상황에 포함된 두 가지 양을 인식하고 비교함으로써 두 양 사이의 비례적 관계를 추론해내고 비례식의 원리를 이해하며 나아가 두 양 사이의 함수적 관계를 인식하게 되었는데, 이러한 비례적 추론 과정을 통하여 학습자들은 현실 생활에서의 여러 가지 비례 관계의 문제 상황들을 해결하게 되었다. 다음은 연구 대상인 실험 집단의 학습자들이 5학년 2학기 8. 문제 해결 방법 찾기 단원에 관한 비구조화된 문제의 해결 학습을 하면서 나타낸 비례적 추론의 모습을 분석한 것이다.

1. 비구조화된 문제의 해결 과정에 나타난 비례적 추론 수준과 형태

본 연구에서는 앞서 제시된 <표 III-1>의 비례적 추론 수준과 형태 분석 기준에 따라 학생들이 나타낸 비례적 추론 모습을 분석하였다. 본 연구에서 비구조화된 <건축설계도> 문제를 해결하는 동안 6개 모둠의 연구 대상 학생들은 제시된 비구조화된 문제를 이해하고, 이를 바탕으로 문제 해결 계획은 세워 문제 상황에 적합한 해를 구하였다. 또한 학생들은 자신들의 문제 해결 과정 및 문제 해결 과정에서 형식화・추상화를 통해 도출된 수학적 결론을 공유하고, 이러한 문제 해결 방법들을 활용할 수 있는 또 다른 실생활 사례들을 찾는 활동을 하였다.

우선 학생들은 제시된 <건축설계도> 과제를 보고 해결해야 할 문제가 제시된 조건을 만족시키는 4절 도화지 크기의 설계도를 만드는 것임을 파악하였으며, 이를 위해 과제에 제시된 집 내부 공간들의 넓이, 위치, 모양 등의 정보들을 수집하였다. 학생들은 이를 바탕으로 4절 도화지 크기의 설계도를 그리기에 적절한 축소 비율을 결정하고, 집 내부 각 공간의 설계도상의 길이를 구하여 설계도를 완성하였다. 그런 후 자신들의 과제 수행 과정을 프레젠테이션을 통해 공유하고, 자신들의 과제 수행 방법을 적용할 수 있는 또 다른 실생활 사례를 찾아보았다.

이와 같은 과정을 통해 비구조화된 <건축설계도> 문제를 해결하는 동안 6개 모둠의 학생들은 <표 IV-1>과 같이 비례적 추론의 수준과 형태를

나타내었다.

비구조화된 문제를 해결하는 동안 각 모둠의 학생들이 나타낸 비례적 추론 수준과 형태의 모습을 살펴보면, <모둠 1, 3>의 경우 학생들은 <건축설계도> 과제를 해결하는 과정에서 비례적 추론의 첫 번째 수준인 [비논리적 접근]의 모습만을 나타내었다. 그리고 <모둠 2, 6>은 비례적 추론의 3수준인 [곱셈적 접근]의 모습을 나타내었으며, <모둠 4>와 <모둠 5>의 학생들은 비례적 추론의 네 번째 수준인 [함수적 접근]으로 비례적 추론 모습을 보이며 활동을 하였다.

비구조화된 문제의 해결 과정에서 비례적 추론의 1수준[비논리적 접근]을 나타내었던 <모둠 1, 3>의 학생들은 제시된 <건축설계도> 과제의 문제 상황을 정리하고 문제 해결을 위한 계획을 세우는 과정에서 실제 길이와 설계도상의 길이 두 가지 양을 인식하였다. 이들은 고객이 원하는 조건을 만족시키는 집에 대한 설계도를 그리는 데에 집의 실제 가로, 세로 길이와 4절 도화지에 그려지는 설계도상의 가로, 세로의 길이에 대한 정보가 필요함을 인식하고, 비와 비율 혹은 축소 비율을 이용하여 설계도상의 길이를 구해야한다고 활동지에 기록하였다. 그러나 <모둠 1, 3> 두 모둠 학생들은 문제 해결을 위한 정보를 수집하고 문제에 알맞은 해를 구하는 과정에서는 설계도를 그릴 때에 일정한 비율로 가로의 길이와 세로의 길이를 동시에 축소해야 함을 인식하지 못하고, 축소 비율과 관계없이 도화지 크기에 맞추어 집 전체 직사각형의 가로, 세로 길이를 임의로 결정하여 그렸다. 또한 이들은 집 내부의 여러 공간들을 설계도에 나타내는 데에 있어서도 일정한 비율로 축소하지 못하고, 집 내부 공간들의 가로, 세로의 길이를 집 전체의 가로, 세로의 길이와 질적으로 비교하여 임의의 길이로 설계도를 그린 후, 그려진 부분의 길이를 자로 직접 재어 측정된 수치를 설계도상의 길이로 기록하였다.

이들 두 모둠의 학생들은 공통적으로 문제 해결에 비와 비율(축소 비율)이 사용되어야 한다고 활동지에 기록은 하고 있으나, 집 전체 및 내부 공간들의 가로, 세로의 길이를 일정한 비율로 축소하지 못하고 각 길이들을 도화지의 크기와 질적으로 비교함으로써 임의의 길이로 구하였다. <모둠 1>의 경우, 설계도를 가로 40cm, 세로

<표 IV-1> 비구조화된 문제의 해결 과정에 나타난 비례적 추론 수준과 형태

비례적 추론 수준 및 형태		모둠					
수준	형태	1	2	3	4	5	6
[1] 비논리적 (illogical) 접근	두 양의 인식 및 질적비교	○	○	○			○
	질적추론			○			
	비례적 관계 인식 불가	○		○			○
[2] 덧셈적 (additive) 접근	두 양 사이의 덧셈적 차이 인식						
	덧셈 관계 추론						
	비의 보존 및 대응 인식						
	반복적 덧셈을 통한 단위 조절						
[3] 곱셈적 (multiplicative) 접근	두 양 사이의 패턴 인식 및 곱셈 관계 추론		○			○	○
	곱셈적 사고를 통한 단위 조절		○			○	○
	비 표현						
[4] 함수적 (functional) 접근	비례적 관계 인식				○	○	
	변량과 상수의 존재 인식				○	○	
	비례식 표현						
	비례식의 원리 인식						
	함수 관계 추론						

30cm로 그린 이유에 대한 교사의 질문에 '처음에는 20cm×10cm로 했었으나, 도화지에 잘 안 맞아서 그냥 도화지에 잘 맞게 40cm×30cm로 그렸다'고 답하고, 이에 대하여 활동지에 '축소비율 계산 과정은 20m, 10m를 40cm, 30cm로 축소 비율을 줄였다(축소하였다). 즉, 1m당 3cm로 축소 비율을 줄여서(축소 비율로 줄여서) 만들었다'고 기록하였다. 또한 이들은 4절 도화지에 설계도를 그리기 전에 활동지의 빈 공간에 실제 넓이와 길이를 기초로 각 공간들의 위치와 크고 작음을 나타낸 후, 이를 바탕으로 4절 도화지에 그림으로써 설계도를 완성하고, 여기에 그려진 집 내부 각 공간들의 가로, 세로의 길이를 자로 재어 설계도상의 길이로 기록하였다. <모둠 3>의 경우, 집 전체의 설계도상 가로, 세로의 길이를 정하지 않은 채, 먼저 집 내부 공간들의 실제 넓이와 길이를 고려하여 설계도에 나타나는 길이를 질적으로 조정함으로써 A4 종이에 각 공간들의 위치와 크고 작음을 표현하였다. 그 후 학생들은 이와 유사한 모습으로 각 공간들의 크기와 위치가 나타나도록 4절 도화지에 그림으로써 설계도를 완성하고, 도화지에 그려진 각 공간들의 길이들을 자로 재어 설계도상의 길이로 기록하였다.

<모둠 1, 3>의 이러한 활동 모습은 학생들이 문제 상황에 포함된 실제 길이와 설계도상의 길이에 대한 두 가지 양에 대한 비례적 관계를 인식하지 못하고 이를 질적으로 비교하였음을 나타낸다. 이는 비례적 추론의 수준과 형태에 비추어 볼 때, 첫 번째 수준인 [비논리적 접근] 수준에 속하며, ⓐ 두 양의 인식 및 질적 비교와 ⓒ 비례적 관계 인식 불가의 형태에 해당한다.

한편 <모둠 2, 6>의 학생들은 <건축설계도>의 문제 해결 과정에서 집 내부 공간들의 설계도상 길이를 구하기 위한 축소 비율을 정하고, 정해진 축소 비율에 따라 계산된 설계도상의 길이를 4절 도화지에 표현함으로써 [곱셈적 접근] 수준과 이 수준에 속하는 ⓐ 두 양 사이의 패턴 인식 및 곱셈 관계 추론과 ⓑ 곱셈적 사고를 통한 단위 조절의 비례적 추론 형태를 나타내었다.

두 모둠의 학생들은 제시된 문제 상황을 정리하고 문제 해결에 대한 계획을 세우는 동안 문제에 포함된 실제 길이 및 설계도상의 길이라는 두 가지 양을 인식함으로써 문제 해결을 시작하였다. 다만 제시된 문제에 대한 해를 구하는 과정에서 두 모둠의 학생들은 비례적 추론의 모습을 다르게 나타내었다. <모둠 2>의 경우, 정보를 수집하고 문제 상황에 알맞은 해를 구하는 과정에서 실제 길이 숫자에 2, 3, 2.5를 곱하여 설계도상의 길이를 가로 40cm, 세로 20cm, 가로 60cm, 세로 30cm, 가로 50cm, 세로 25cm로 그려본 후 '1m를 2.5cm'로 나타내기로 결정하였다(ⓑ 곱셈적 사고를 통한 단위 조절). 그리고 집 내부 공간들에 대한 설계도상의 길이를 구함에 있어 실제 가로, 세로 길이의 숫자 부분 각각에 2.5배를 해주어 각각의 공간들에 대한 설계도상의 가로 길이와 세로 길이를 구하여 4절 도화지에 표현하였다(ⓐ 두 양 사이의 패턴 인식 및 곱셈 관계 추론). 하지만 이들은 프레젠테이션에서 발표된 각 모둠들의 문제 해결 방법을 평가하고 가장 적절한 방법을 선정하는 과정에서 문제를 올바르게 해결하지 못한 <모둠 1>의 방법을 가장 적절한 방법으로 선택함으로써, 문제 상황에 포함된 비례적 관계들을 완전하게 이해하지 못하여 비와 비율 및 비례적 관계에 대한 수학적 구조를 관련된 다른 상황으로 확장시키거나 일반화시키지 못하는 상태임을 드러내었다.

반면 <모둠 6>의 학생들은 집 전체 직사각형에 대한 설계도상의 길이를 구하는 과정에서는 집 전체의 가로, 세로의 길이(20m, 10m) 사이의 비례적 관계를 인식하지 못하고, 일정한 비율에 따라 축소하지 못함으로써(4절 도화지에 가로 50cm, 세로 30cm인 직사각형을 그림), 비례적 추

론의 1수준[비논리적 접근]의 ⓒ 비례적 관계 인식 불가의 형태를 나타냈다. 하지만, 이들은 이후 실제 길이 숫자 부분에 1, 2, 5, 3을 곱하여 1m를 1cm, 2cm, 5cm, 3cm로 나타내어 본 후, 집 내부 공간들에 대한 축소 비율을 '1m를 3cm로 정함'(ⓐ 두 양 사이의 패턴 인식 및 곱셈 관계 추론)과 동시에, 집 내부 공간들에 대한 실제 가로, 세로 길이에 각각 3을 곱하여 설계도상의 가로, 세로 길이를 구함(ⓑ 곱셈적 사고를 통한 단위 조절)으로써 [곱셈적 접근]의 모습을 나타냈다. 결국 <모둠 6>의 학생들은 집 전체의 윤곽을 표현하는 직사각형은 축소 비율과 관계없이 임의의 길이로 그리고, 집 내부의 여러 공간들은 1m 3cm로 축소한 길이로 그림으로써 문제 상황에 포함된 비례적 관계들을 완전하게 이해하지 못한 상태임을 나타내었다.

한편 앞의 <모둠 1, 2, 3, 6>과 달리, <모둠 4, 5>는 비구조화된 <건축설계도>의 문제의 해결 과정에서 실제 길이와 설계도상의 길이 사이의 비례 관계를 올바르게 인식하고(ⓐ 비례적 관계 인식), 이들 관계 사이에 변하는 양과 변하지 않는 양이 있음을 인식함으로써(ⓑ 변량과 상수의 존재 인식) 비례적 추론의 네 번째 수준인 [함수적 접근]의 모습을 나타내었다.

<모둠 4>의 경우, 학생들은 집의 각 공간들에 대한 실제 가로, 세로 길이와 설계도상의 가로, 세로 길이 사이의 비례적 관계를 인식하고, 이를 바탕으로 문제 상황에 알맞은 해를 구하는 과정에서 축소 비율을 $\frac{1}{100}$로 정한 후, 이에 따라 집 전체 및 집 내부 공간들에 대한 설계도상의 가로, 세로 길이를 구하여 4절 도화지에 표현하였다(ⓐ 비례적 관계 인식). 뿐만 아니라, 이들은 집 내부 각 공간들의 실제 가로 및 세로의 길이가 4m(400cm), 5m(500cm), 3m(300cm), 6m(600cm)로 변화하고 설계도상의 길이가 4cm, 5cm, 3cm, 6cm로 변화하여도 실제 길이에 대한 설계도상의 길이의 비와 비의 값이 $\frac{1}{100}$로 변하지 않음을 알고, 이를 활용하여 설계도상의 길이를 구하였다(ⓑ 변량과 상수의 존재 인식). 다만 <모둠 4>의 학생들은 올바른 비례적 추론 과정을 통해 일정한 비율에 따라 실제 길이를 축소하여 설계도상의 길이를 구함으로써 설계도를 만들었으나, 주어진 4절 도화지의 극히 일부분의 공간에 너무 작은 크기로 설계도를 그림으로써 실제성이 결여된 설계도를 산출하였다고 볼 수 있다. 이는 실생활 맥락을 담은 비구조화된 <건축설계도> 문제에 대한 적절한 해결로 평가되기에는 미흡한 측면을 나타내는 것이라 할 수 있으며, 학생들이 좀 더 현실 세계의 맥락에서 문제를 이해한 후 비례적 추론 과정을 거쳤더라면, 가능한 4절 도화지를 꽉 채울 수 있는 크기로 설계도가 그려졌을 것으로 해석된다.

<모둠 5>의 학생들 역시 <모둠 4>의 경우와 마찬가지로 집의 각 공간들에 대한 실제 가로, 세로 길이와 설계도상의 가로, 세로 길이 사이의 비례적 관계를 인식하고, 4절 도화지에 그려질 설계도에 적절하게 축소하는 방법으로 '1m를 2.5cm로 하여 원래 길이(실제 길이)에 2.5를 곱하는' 방법을 사용하여 집 내부 공간들의 설계도상의 길이를 구하여 4절 도화지에 표현하였다(ⓐ 비례적 관계 인식). 또한 변화되는 원래 길이(실제 길이)와 축소 길이(설계도상의 길이) 사이에 변하지 않는 수 2.5가 있음을 인식하고 이를 활용하여 설계도상의 길이를 구하였다(ⓑ 변량과 상수의 존재 인식). 단, <모둠 5>의 학생들은 <모둠 4>의 경우와 달리 4절 도화지의 여백이 최소가 되도록 설계도를 크게 그렸는데, 이는 <모둠 5>의 학생들이 현실적인 맥락에서 <건축설계도>의 문제를 해석하고 비례적으로 추론하여 문제를 해결한 결과로 볼 수 있으며, <모둠

4>의 문제 해결 방법에 비하여 <건축설계도> 문제에 보다 적절한 해결 방법이라 할 수 있다.

위와 같이 나타난 학생들의 비례적 추론 모습을 종합해 보면, 학생들은 [그림 IV-1]과 같은 흐름으로 비례적 추론의 모습을 나타내며 비구조화된 <건축설계도> 문제를 해결하였다.

먼저 학생들은 [문제 이해하기] 과정에서 문제에 제시된 여러 가지 정보들에서 실제 길이와 설계도상의 길이와 같은 양들에 대하여 인식함으로써 문제 해결을 시작하였다. 이어진 [해 구하기] 과정에서 실제 길이와 설계도상의 길이 사이의 관계에서 비례적 관계를 찾아내고, 이를 활용하여 4절 도화지에 그려질 설계도상의 길이를 구함으로써 문제 상황에 적절한 해를 구하였다. 그리고 학생들은 [적용하기] 과정에서 자신들이 문제 해결에 사용했던 비례적 관계 구조를 각 모둠의 상황으로 확장시킴으로써 다른 모둠의 해결 방법을 평가하고 가장 좋은 방안을 선정하였다.

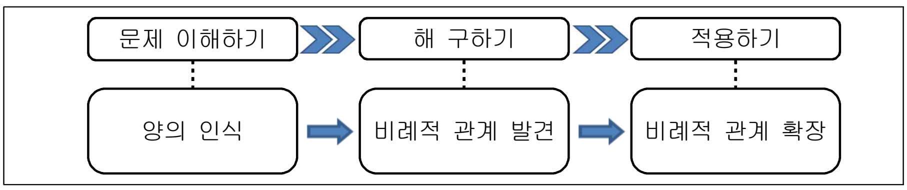
본 연구에 따르면, 비구조화된 <건축설계도> 문제를 해결하는 과정에서 연구 대상 학생들은 모둠별로 다양한 모습으로 비례적 추론 수준과 형태를 나타내었다. 그러나 연구 대상 학생들은 비구조화된 문제를 해결하는 과정에서 6개 모둠 중에서 2개의 모둠(<모둠 4, 5>)만이 비례적 추론의 네 번째 수준인 [함수적 접근]의 수준과 형태를 나타내며 활동을 마무리하였고, 나머지 4개 모둠들(<모둠 1, 2, 3, 6>)은 첫 번째 수준인 [비논리적 접근]과 [곱셈적 접근] 수준인 세 번째 수준의 비례적 추론 수준과 형태를 주로 나타내며 활동을 마쳤다. 이는 연구 대상 학생들이 비구조화된 문제를 해결함에 있어 비례적 추론 수준들 중 가장 높은 수준인 [함수적 접근]의 수준과 형태로 비례적 추론을 하는 것이 쉽지 않았음을 보여준다. 이는 또한 교육과정상 5학년에는 비례적 추론과 관련된 단원이 5학년 2학기 7. 비와 비율 1개 단원만이 편성되어 있어 6학년 과정에 편성된 3개 단원(6학년 1학기 7. 비례식, 8. 연비와 비례배분, 6학년 2학기 7. 정비례와 반비례)의 내용들(비례식이나 연비, 비례배분, 정비례 등)을 접해보지 못했기 때문에 대다수의 학생들이 비례적 추론의 4수준인 [함수적 접근] 수준을 나타내기 어려웠던 것으로 해석된다.

2. 비례적 추론 사례: <모둠 5>의 활동 사례

<모둠 5>의 학생들은 비구조화된 <건축설계도> 문제를 해결하면서 비례적 추론의 3수준[곱셈적 접근]과 4수준[함수적 접근]에 해당하는 비례적 추론 수준과 형태를 나타내었다.

가. 3수준 : 곱셈적 접근

<표 III-1>의 비례적 추론 수준과 형태 분석 기준에서 비례적 추론의 3수준 [곱셈적 접근]은 문제 상황에 포함된 두 양 사이의 패턴을 인식하고, 곱셈적 사고를 통하여 두 가지 단위를 함께 조절하며, 변하는 두 양 사이의 관계를 비로 표현하는 수준으로, 이는 ⓐ 두 양 사이의 패턴



[그림 IV-1] 비구조화된 문제의 해결 과정에서의 비례적 추론

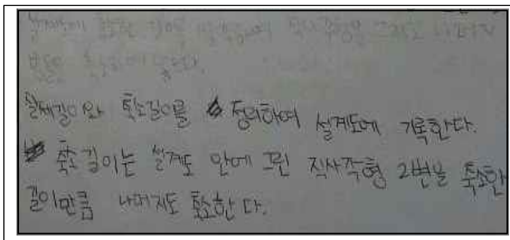
인식 및 곱셈 관계 추론, ⓑ 곱셈적 사고를 통한 단위 조절, ⓒ 비 표현의 비례적 추론의 형태를 나타낸다.

[그림 IV-2-(a), (b), (c)]에 나타난 <모둠 5>의 활동 기록을 보면, 학생들은 우선 집 전체 직사각형을 축소하여 그린 후, 이렇게 집 전체 직사각형의 가로, 세로 길이를 축소한 비율에 따라 집 내부 각 공간의 가로, 세로 길이를 구하기로 계획하였다. 이에 관하여 <모둠 5>의 학생들은 '설계도 안에 그린 직사각형 2변을 축소한 길이만큼 나머지도 축소한다'라고 기록함으로써 설계도에 그려지게 되는 집 전체 직사각형의 가로 및 세로 길이에 대한 축소 비율을 적용하여 나머지 집 내부의 각 공간들의 가로, 세로 길이를 축소하여 그리고자 하였다.

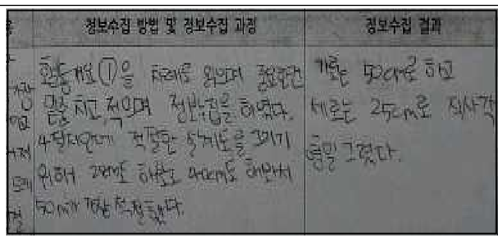
또한 이들은 설계도에 적절한 집 전체 직사각형의 가로와 세로의 길이를 구하기 위해 50cm 자를 4절 도화지의 가로와 세로에 직접 대어보면서 집 전체 직사각형의 가로의 길이(20m) 및 세로의 길이(10m)에 가장 적절한 설계도상의 길이를 찾고자 하였는데([그림 IV-2-(a), (b), (c)] 참조), 이 때 학생들은 설계도상의 가로의 길이 및 세로의 길이로 임의의 수들[(가로, 세로)-(20cm, 10cm), (40cm, 20cm), (50cm, 25cm)]을 반복적으로 시도한 끝에 가로 길이 50cm, 세로 길이 25cm로 축소하여 4절 도화지에 집 전체 직사각형을 그리기로 결정하였다.

이는 <모둠 5>의 학생들이 집 전체의 실제 가로 및 세로의 길이와 설계도상의 가로 및 세로의 길이의 두 가지 양 사이의 패턴을 인식하고, 두 양 사이의 관계를 곱셈 관계로 추론하여 4절 도화지에 적합한 축소 비율을 결정한 모습을 보여주는 것으로서, 비례적 추론의 세 번째 수준인 [곱셈적 접근]에 속하는 비례적 추론의 형태들 중 ⓐ 두 양 사이의 패턴 인식 및 곱셈 관계 추론의 형태를 나타낸다.

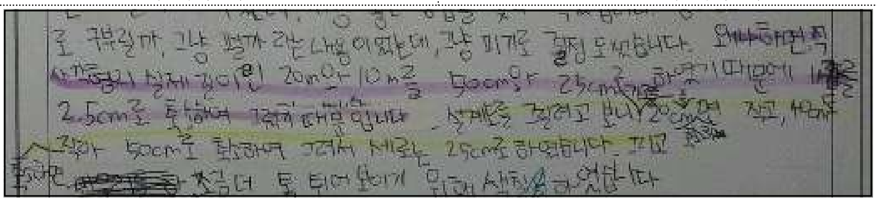
한편 <모둠 5>의 학생들은 [그림 IV-3-(a), (b)]의 활동 기록 및 [그림 IV-3-(c)]의 활동 결과물에 나타난 바와 같이 곱셈적 사고를 바탕으로 하여 집 내부 여러 공간들의 실제 길이 단위(m)와 설계도상의 길이 단위(cm), 두 가지를 함께 조절하였다. <모둠 5>의 학생들은 집 내부 각 공간들의 실제 길이로 정해진 숫자에 2.5를 곱함으로써 설계도상의 길이를 추론하고, 집 내부 공간들에 대한 각기 다른(변화하는) 실제 길이의 숫자부분에 2.5를 곱하고 단위를 m에서 cm로 바



(a) 활동지 기록 내용 1



(b) 활동지 기록 내용 2


(c) 활동지 기록 내용 3

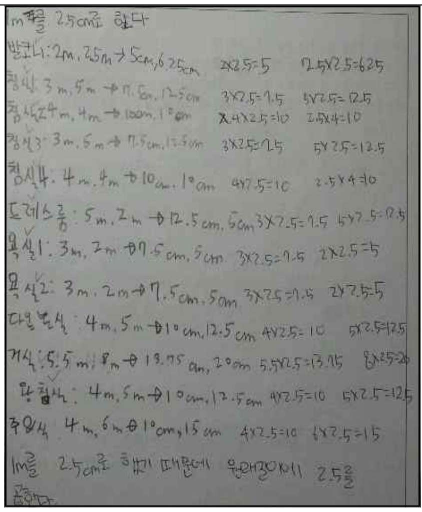
[그림 IV-2] <모둠 5>의 두 양 사이의 패턴 인식 및 곱셈 관계 추론 사례

꾸어주는 사고를 통해 설계도상의 길이를 구함으로써 실제 길이의 단위와 설계도상 길이의 단위 두 가지를 함께 조절하는 모습을 나타내었으며, 이는 비례적 추론의 세 번째 수준인 [곱셈적 접근]에 속하는 비례적 추론 형태들 중 곱셈적 사고를 통한 단위조절의 형태로 해석된다.

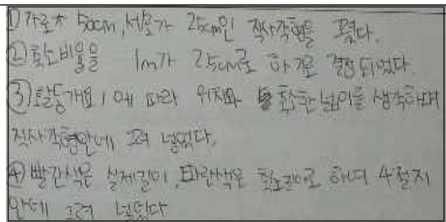
이와 같은 활동 모습은 Lobato 외(2010)가 제시한 비례적 추론 관련 핵심 이해(essential understandings)의 측면에서 볼 때, [핵심 이해 7]과 관련된 것으로 볼 수 있는데, 학생들이 여러 가지 실제 길이의 숫자 부분에 2.5를 곱하여 줌으로써 실제 길이 1m를 설계도상의 길이 2.5cm로 나타내는 관계를 유지시키는 가운데 설계도상의 길이를 구한 것은 '비례적 관계를 유지하기 위해서는 한 가지 양이 특별한 인수에 의해 곱해지거나 나누어지면, 또 다른 양도 똑같은 인수에 의해 곱해지거나 나누어져야 한다'는 [핵심 이해 7]에 대한 이해를 바탕으로 이루어진 것이라 해석된다. 여기에서 학생들은 또한 Lobato 외(2010)가 제시한 비례적 추론 발달에서의 전환(shift) 중에서도 전환 3[구성된 단위 전략에서 곱셈적 비교로]를 나타내었는데, [그림 IV-3]에 따르면 학생들은 곱셈적 사고를 통하여 집 내부 공간들의 설계도상의 길이를 구함으로써 '곱셈적 비교를 잘 하고 잘 사용하는 것으로의 전환'을 보여주었다.

이와 더불어 [그림 IV-3-(a)]의 활동 모습은 [핵심 이해 8]과 전환 4[구성된 단위 반복에서 많은 등가의 비 창조로]를 나타내는 것으로 볼 수 있다. [그림 IV-3-(a)]의 마지막 부분에서 학생들은 '1m를 2.5cm로 했기 때문에 원래 길이에 2.5를 곱한다'고 기록하였는데, 이는 학생들이 실제 길이와 설계도상의 길이 사이의 비례 관계를 일반화함으로써 실제 길이로 어떤 수가 주어지더라도 그 수에 2.5를 곱하면 설계도상의 길이를 구할 수 있음을 인식한 것이며, 또한 이것은 학생들이 '비율은 무한히 많은 등가의 비에 대한 세트이다'라는 [핵심 이해 8]을 바탕으로 '적은 수의 쉬운 등가의 비를 만드는 것에서 무한히 많은 등가비의 세트를 창조하는 것으로의 전환'인 전환 4[구성된 단위 반복에서 많은 등가의 비 창조로]의 모습을 나타낸 것이라 해석된다.

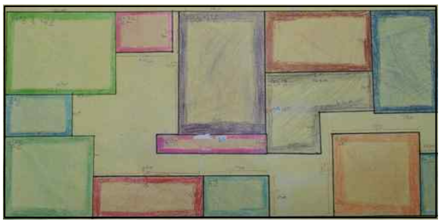
<모둠 5>의 활동 모습 중 [그림 IV-3-(a)]와 관련하여 또 한 가지 눈여겨볼 사항은 학생들이



(a) 활동지 기록 내용 1



(b) 활동지 기록 내용 2



(c) 활동 결과물

[그림 IV-3] <모둠 5>의 곱셈적 사고를 통한 단위 조절 사례

집 내부의 여러 공간들의 실제 가로, 세로의 길이와 설계도상의 가로, 세로의 길이를 비 혹은 비례식과 유사한 형태로 목록화하여 나타냄으로써 변화하는 두 양, 즉 실제 길이와 설계도상의 길이의 관계를 표현한 부분이다. [그림 IV-3-ⓐ]에 목록화되어 기록된 집 내부 공간들의 실제 가로, 세로의 길이 및 설계도상의 가로, 세로의 길이에 대한 표현은 수학적 기호를 사용한 비의 표현이나 비례식의 표현이라 할 수는 없으나, 교육과정상 비례식 단원이 6학년에 속해 있어 비례식을 한 번도 접해보지 못한 연구 대상 학생들이 자신들 나름의 방법으로 변하는 양들의 비례적 관계를 표현한 결과라 해석된다. 뿐만 아니라, 이는 또한 비례식을 표현하고 비례식의 원리를 인식하며 두 양 사이의 함수 관계를 추론하게 되는 비례적 추론의 4수준인 [함수적) 접근] 수준으로 발전해가는 모습을 나타내는 것이라 볼 수 있다.

나. 4수준 : 함수적 접근

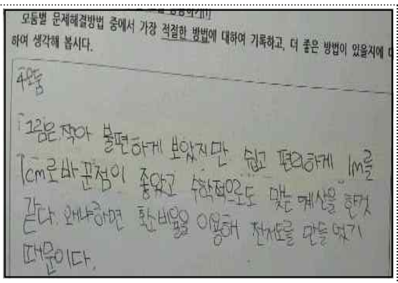
비례적 추론의 4수준인 [함수적 접근]은 둘 이상의 양 사이의 관계를 인식하여 복잡한 비례추론을 개념화 하고, 비례식의 원리를 이해하며, 두 양 사이의 함수 관계를 인식하는 수준으로, 이는 함수 관계 추론의 형태를 나타낸다. 이와 같은 함수적 접근 수준에 해당하는 비례적 추론 형태에는 ⓐ 비례적 관계 인식, ⓑ 변량과 상수의 존재 인식, ⓒ 비례식 표현, ⓓ 비례식의 원리 인식, ⓔ 함수 관계 추론이 있다.

<모둠 5>의 [그림 IV-4-ⓐ, ⓑ, ⓒ]의 사례는 비례적 추론의 네 번째 수준인 함수적 접근에 관한 사례라 할 수 있다. <모둠 5>의 경우, 모둠별 프레젠테이션이 이루어질 때, <모둠 3>이 문제 해결 과정 설명에서 축소 비율 없이 설계도를 그린 부분에 대하여 질문을 하였다. 또, 축소 비율 없이 4절 도화지에 그려진 각 공간들의 가로 및 세로의 길이를 자로 재어 설계도상의 길이와 넓이를 구했다는 <모둠 3>의 답에 <모둠 5>의 현선이는 이해할 수 없다고 반응하였다([그림 IV-4-ⓐ] 참조). 이 사례에서 <모둠 5>는 다른 모둠의 문제 해결 과정에 포함된 실제 길이와 설계도상의 길이 사이의 비례적 관계를 인식하고, <모둠 3>의 과제 수행 과정에 대한 오류를 지적함으로써 비례추론을 개념화하였다. 또한 <모둠 5>의 학생들은 각 모둠별 문제 해결 방법 중 가장 적절한 방법을 선택하고, 더 좋은 방법에 대한 의견을 제시하는 과정에서 <모둠 4>의 방법을 가장 적절한 방법으로 선택했다. 선택의 이유로 <모둠 5>의 학생들은 '설계도가 작아 불편하지만, (설계도를 그릴 때) 쉽고 편리하게 1m를 1cm로 바꾼 점이 좋았다'고 기록하고([그림 IV-4-ⓑ] 참조), '(사실 <모둠 5>에서는) 자신들의 방법이 가장 합리적이고 좋다는 의견이 나왔었으나, 주변 친구들의 눈총을 받을 것 같아 다른 모둠을 선택했다'고 이야기했다. 이와 같은 <모둠 5>의 활동 모습은 각 모둠이 제시한 다양한 문제 해결 과정에서 실제 길이와 설계도상의 길이 사이의 비례적 관계를 인식하고, 비례추론을 개념화한 것이며, 이는 비례적 추론의 네 번째 수준인 [함수적 접근]의 비례적 추론 형태 중 하나인 ⓐ 비례적 관계 인식의 형태에 해당된다.

또한 <모둠 5>의 학생들은 4절 도화지에 알맞은 축소 비율을 구하고 정해진 축소 비율에 따라 집 내부 공간들에 대한 설계도상의 가로 및 세로 길이를 계산하는 과정에서 변화되는 집 내부 공간들의 실제 길이와 설계도상의 길이 사이의 관계에는 변화되지 않는 수 2.5가 있음을 발견하였다. [그림 IV-5]에 따르면, 4절 도화지에 설계도를 그린 방법에 대한 질문에 학생들은 '어떤 길이든지 원래 길이에 2.5를 곱하면 축소된 길이가 나온다'고 답하였다. 이는 학생들이

<모둠 3>의 한빈 발표 후 질문(<모둠 5>의 현선 & <모둠 4>의 준영)
현선: 축소비율 없이 설계도를 어떻게 그렸는지 궁금합니다.
한빈: 실제길이와 넓이를 구한 후, 4절 도화지에 적절히 들어가게 그렸습니다.
현선: 이해가 안 되는데요....
교사: (교사가 이해한 바를 이야기 해주고 3모둠에 맞는지 확인함.)
(문제상황에 제시된 바를 가지고 각 공간의 실제길이와 넓이를 정한 후, 4절 도화지 안에 크기에 따라 일정한 비율에 따라 그린 것은 아니고 넓은 곳은 크게 좁은 곳은 작게 그림.)
-중략-
준영, 현선: 그런데요, 축소비율 없이 그렸으면, (각 공간의) 설계도상의 넓이를 어떻게 구했나요?
한빈: 그냥 도화지에 그려진 걸 자로 재서 계산기로 계산했습니다.
준영, 현선: 이해가 안 되는데요....
교사: (교사가 이해한 바를 이야기 해주고 3모둠에 맞는지 확인함.) (축소비율 없이 그린 설계도의 각 공간의 길이를 자로 직접 잰 후, 그 길이를 계산해서 설계도상의 넓이를 구함.)
-중략-
-아이들이 3모둠이 축소비율 없이 설계도를 그린 것에 대해 의아해함.

(a) 관찰 내용



(b) 활동지 기록 내용

현선: 모둠에서 자신의 모둠이 제일 잘 했다는 의견이 나왔었으나 다른 모둠을 선택했다고 발표함.
교사: 왜 자신의 모둠을 선택하지 않고 다른 모둠을 선택했나요?
(학생들: 자신들은 자신의 모둠의 방법이 제일 합리적이며 좋다고 생각하지만, 자신의 모둠이 제일 잘 했다고 하면 주변의 눈총을 받을 것이라 생각했기 때문이라 답함.)

(c) 관찰 및 인터뷰 내용

[그림 IV-4] <모둠 5>의 비례적 관계 인식 사례

실제 길이와 설계도상의 길이 사이의 관계에 포함된 변량과 상수의 존재를 인식하고 있음을 의미하며, 비례적 추론 수준의 4수준[함수적 접근]의 ⓑ 변량과 상수의 존재 인식의 형태를 나타낸다.

교사: 설계도를 어떻게 그렸니?
현선: (집 전체를) 가로 50cm, 세로 25cm로 해서 1m를 2.5cm로 그렸어요.
어떤 길이든지 원래 길이에 2.5를 곱하면 축소된 길이가 나와요.
-실제 길이와 설계도상의 길이가 변하는 가운데 변하지 않는 수(2.5)가 있음을 인식함.
-4절 도화지에 적절한 축소 비율을 찾아 그림.

[그림 IV-5] <모둠 5>의 변량과 상수의 존재 인식 사례

이상의 내용으로 볼 때, <모둠 5>의 학생들은 비구조화된 문제인 <건축설계도> 과제를 해결하는 동안 비례적 추론의 수준과 형태가 3수준[곱셈적 접근]에서 4수준[함수적 접근]으로 변화하는 모습을 나타내었다. 이는 비구조화된 문제 <건축설계도>의 해결 학습이 학생들의 비례적 추론 경험의 기회를 제공함으로써 학생들의 비례적 추론 능력 향상에 도움을 줄 수 있음을 의미한다. 뿐만 아니라, 학생들은 문제 해결 과정이 진행될수록 Lobato 외(2010)가 제시한 비례적 추론 관련 핵심 이해와 비례적 추론 발달에서의 전환의 측면에서 점차 높은 수준으로 향상되는 모습을 나타내었다. 이러한 결과는 비례적 추론 수준과 비례적 추론 관련 핵심 이해), 비례적 추론 발달에서의 전환이 서로 연관되어 있음을 나

타내며, 이는 학생들이 비구조화된 문제를 해결하는 경험을 통해 비례적 추론 수준과 형태, 비례적 추론 관련 핵심 이해, 비례적 추론 발달에서의 전환을 함께 향상시킬 수 있음을 시사한다.

V. 결론

본 연구는 초등학교 5학년의 문제 해결 학습에 비구조화된 문제의 해결 활동을 적용함으로써 비구조화된 문제의 해결 과정에서 나타나는 초등학생의 비례적 추론 과정을 분석하고 학생들의 비례적 추론 수준과 형태의 특징을 알아보는 것을 목적으로 하였다.

연구 결과 학생들은 6개의 모둠 중 2개 모둠만이 비례적 추론의 마지막 수준인 4수준[함수적 접근]으로 활동을 마무리하였다. 이는 교육과정상 5학년 2학기 7.비와 비율 1개 단원만을 학습하여 6학년 과정에 편성된 내용들(비례식이나 연비, 비례배분, 정비례 등)을 접해보지 못한 5학년 학생들이 가장 높은 수준인 4수준으로 비례적 추론을 하는 것이 쉽지 않았음을 나타낸다.

연구 결과로 나타난 학생들의 비례적 추론 모습을 종합해 보면, 학생들은 다음과 같은 흐름으로 비례적 추론을 나타내며 비구조화된 <건축설계도> 문제를 해결하였다. 먼저 학생들은 [문제 이해하기] 과정에서 문제에 제시된 여러 가지 정보들에서 실제 길이와 설계도상의 길이와 같은 양들에 대하여 인식함으로써 문제 해결을 시작하였다. 이어진 [해 구하기] 과정에서 실제 길이와 설계도상의 길이 사이의 관계에서 비례적 관계를 찾아내고, 이를 활용하여 4절 도화지에 그려질 설계도상의 길이를 구함으로써 문제 상황에 적절한 해를 구하였다. 그리고 학생들은 [적용하기] 과정에서 자신들이 문제 해결에 사용했던 비례적 관계 구조를 각 모둠의 상황으로 확장시킴으로써 다른 모둠의 해결 방법을 평가하고 가장 좋은 방안을 선정하였다.

이러한 결과는 본 연구에서 실시된 비구조화된 문제의 해결 학습이 학생들에게 비례적 추론의 경험을 제공함으로써 학생들의 비례적 추론 수준과 형태, 그리고 비례적 추론 관련 핵심 이해(essential understanding), 비례적 추론 발달에서의 전환(shift)이 발전되도록 하였음을 의미한다. 이는 학생들에게 실세계 맥락의 비, 비례 상황을 제공함으로써 실생활에서의 양들을 비례적으로 추론할 수 있도록 해야 한다는 Lobato 외(2010)의 연구와 같은 맥락이라 할 수 있다. 또한 이는 수학 학습에서 학생들 스스로 문제 해결 방법을 모색하여 해결하도록 하는 문제 해결 활동들을 활용하여 학생들로 하여금 비례성과 같이 수학 교육과정 전체에 나오는 여러 가지 중요한 수학적 아이디어들을 창조하고, 확장하고 수정하고 정련하도록 해야 한다는 Lesh와 Doerr(2003)의 연구와 같은 맥락으로 볼 수 있다. 뿐만 아니라, 이는 또 학생들의 비례 문제 해결 능력 계발을 위해서는 수학 수업에서 비구조화된 문제를 적극 활용해야한다고 주장한 성창근, 이광호(2012)의 연구와도 맥을 같이 한다.

이와 같은 본 연구의 결과는 앞으로의 수학 학습이 학생들로 하여금 비례적 추론과 관련된 수학적 개념과 원리에 대한 학습을 충실히 하도록 하여 보다 높은 수준의 비례적 추론 관련 핵심 이해가 학습되도록 하고, 이를 통하여 비례적 추론 수준과 형태 및 전환의 수준을 향상시키도록 해야 함을 함의한다. 따라서 앞으로의 초등학교 수학교육현장에서는 비례적 추론과 관련된 비구조화된 문제들을 적용함으로써 학생들로 하여금 현실 맥락의 문제들을 기계적으로 해결하는 대신, 비례적 추론을 비롯한 다양한 수학적 사고 과정을 통해 해결할 수 있는 경험과 기회를 갖도록 해야 할 것이다.

위의 내용에 따르면, 비례적 추론은 학교수학 교육 및 학생들의 수학적 사고의 발달에 매우 중요한 역할을 하고 있으며, 학생들은 비, 비율, 비례 등에 대한 이해 정도에 따라 비례적 추론의 발달 수준 및 발달 단계를 달리 나타낸다. 또한 학생들은 비례적 추론 과정에서 다양한 사고의 전환을 통해 비례적 추론을 발전시키게 되는데, 학생들에게 실세계 맥락의 비, 비례 상황을 제공함으로써 실생활에서의 양들을 비례적으로 추론할 수 있도록 해야 할 필요성이 강조된다 (Lobato 외, 2010).

참고문헌

고은성・이경화(2007). 초등학교 6학년 학생의 비례 추론 능력 분석: 2명의 사례 연구. **수학교육학연구, 17**(4), 359-380.

김민경・이지영・홍지연・김은경(2011). 초등학교 수학 교과서에서 나타난 “문제”의 비구조성(ill-structured)에 관한 연구. **학습자중심교과교육연구, 11**(2), 1-21.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

성창근・이광호(2012). 비례 문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인 분석. **수학교육학연구, 22**(3), 331-352.

Baxter, G., & Junker, G. (2001). Designing developments: *A case study in proportional reasoning.* Paper presented in the annual meeting of the national council of measurement in education. Seattle, WA.

Chi, M. T. H., & Glaser, R. (1985). Problem solving ability. In R. J. Sternberg (Ed.), *Human abilities: An information processing approach.* NY: W. H. Freeman.

Creswell, W. J. (1998). *Qualitative inquiry and research design.* London: Sage.

Fitzpatrick, R., & Morrison, E. J. (1971). Performance and product evaluation. In R. L. Thorndike (Ed.), *Educational measurement (2nd ed.)* (pp. 237–270). Washington, DC: American Council on Education.

Freudenthal, H. (1978). Weeding and sowing: *A preface to a science of mathematical education.* D. Reidel, Dordrecht.

Ge, X., & Land, S. M. (2003). Scaffolding students’ problem-solving processes in an ill-structured task using question prompts and peer interactions. *Educational Technology Research and Development, 51*(1), 21-38.

Hong, N. S. (1999). *The relationship between well-structured and ill-structured problem solving in multimedia simulation.* The Pennsylvania State University.

Jonassen, D. H. (1997). Instructional design models for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development, 45*(1), 65-94.

Kaput, J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235-287). Albany, NY: State University of New York Press.

Karen, K. C., & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics, 10*(2), 92-98.

Karplus, R., Adi, H., & Lawson, A. (1980). Intellectual development beyond elementary school VIII: Proportional, probablistic, and correlational reasoning. *School Science and Mathematics, 80*(8), 673-683.

Karplus, R., Karplus, E., & Wollman, W. (1974). Intellectual development beyond elementary school IV: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics, 74*(6), 476-482.

Karplus, R., & Peterson, R. (1970). Intellectual development beyond elementary school II: Ratio, a survey. *School Science and Mathematics, 70*(9), 813-820.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.) (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematical problem solving, learning and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hilbert (Eds.), *Number concepts & operations for the middle grades* (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I., & Zbiek, R. M. (2010). Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nabors, W. K. (2003). From fractions to proportional reasoning: A cognitive schemes of operation approach. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 133-179.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Olof, B. S. (2003). *Making meaning of proportion: A study of grids in two icelandic classrooms*. Unpublished Doctoral Dissertation, The University of Wisconsin, Madison.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational studies in Mathematics, 67*(1), 37-58.

Shin, N., Jonassen, D. H., & McGee, S. (2003). Predictors of well-structured and ill-structured problem solving in an astronomy simulation. *Journal of Research in Science Teaching, 40*(1), 6-33.

Sinnott, J. D. (1989). A model for solution of ill-structured problems: Implications for everyday and abstract problem solving. In J. D. Sinnott (Ed.), *Everyday problem solving: Theory and applications* (pp. 72-99). NY: Praeger.

Torulf, P. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37-58.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

A Study on Children's Proportional Reasoning Based on An Ill-Structured Problem

Hong, Jee Yun (Dongguro Elementary School)
Kim, Min Kyeong (Ewha Womans University)[3]

The purpose of this study was to analyze children's proportional reasoning process on an ill-structured "architectural drawing" problem solving and to investigate their level and characteristics of proportional reasoning. As results, they showed various perspective and several level of proportional reasoning such as illogical, additive, multiplicative, and functional approach. Furthermore, they showed their expanded proportional reasoning from the early stage of perception of various types of quantities and their proportional relation in the problem to application stage of their expanded and generalized relation. Students should be encouraged to develop proportional reasoning by experiencing various quantity in ration and proportion situations.

* key Words : 비구조화된 문제(ill-structured problems), 비례적 추론(proportional reasoning), 문제 해결 (problem solving), 초등수학(elementary mathematics education)

논문접수 : 2013. 10. 28
논문수정 : 2013. 11. 15
심사완료 : 2013. 11. 20

3) Corresponding author