대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 4, 667 ~ 682. Dec 2013

‘정의’의 재발명을 상상하다 : Lesson Play의 분석[1)]

이 지 현*

이 연구에서는 도형 정의의 재발명에 대해 세 교사가 쓴 lesson play를 통하여, 교사들이 가지고 있었던 정의 개념과 연역적 조직화로서의 정의하기를 가르치고자 할 때 봉착했던 교수학적 문제들을 살펴보았다. 교사들은 lesson play에서 도형의 정의를 주입식으로 전달하지 않았으며 여러 다른 정의의 가능성을 제시하였으나, 연역적 조직화로서의 정의하기를 적극적으로 구현할 수는 없었다. 교사들은 정의를 어떤 용어에 대한 언어적 약속으로 생각하여, 정의를 가르치는 데 있어 연역적 조직화와 같은 과정이 왜 필요한지를 이해하지 못하였다. 또 수학적 정의의 임의성 및 정의와 정리의 지위가 절대적이지 않다는 사실을 수용하는 데에도 어려움을 겪고 있었다. 이와 같은 결과는 교사들이 도형의 수학적 정의를 자신이 배웠던 방식과 다르게 가르치도록 하기 위해서는, 교사교육에서 단순히 Freudenthal의 이론과 같은 이상적인 교수 방향 및 철학을 소개하는 것만으로는 부족하며, 상식적인 정의 개념과 수학적 정의 개념의 차이를 인식하고 반성해보는 것이 필요함을 보여주고 있다.

Ⅰ. 서론

유클리드는 원론에서 기하학적 대상들의 정의와 공리들을 먼저 진술하고, 그로부터 유도되는 정리와 증명을 제시하였다. 그 이후 정의와 공리로부터 시작한다는 원칙은, 전문적인 수학 텍스트의 진술뿐만이 아닌 수학적 담화와 교육 내용의 전개 순서도 따라야 할 보편적 규범으로 자리 잡게 되었다. 하지만 이렇게 논리적으로 완벽한 ‘연역주의자의 양식(Lakatos, 1976)’은 그 내용을 처음 배우는 학생들이 생각할 수 있는 “왜 이렇게 정의해야만 하는가?” 와 같은 질문에 대답하지 않는다. 따라서 많은 학생들은 정의나 공리가 왜 어떻게 나왔는지는 전혀 이해하지 못한 채 수동적으로 수용할 수밖에 없으며, 수학을 이해할 수 없는 규칙을 강요하는 권위주의적인 학문이라고 생각하게 된다.

Klein, Wittmann, Polya, Freudenthal 등은 완성된 공리 연역적 체계를 학생들에게 그대로 부과하는 전통적인 수학교육의 문제를 지적하면서, 교수 학습 과정에서 이러한 연역 체계의 발명과정을 재현하자는 발생적 접근을 주장하였다(de Villiers, 1998). 특히 Freudenthal(1971)은 “이 도형을 왜 이렇게 정의하는가?” 와 같은 질문에 대한 탐구 없이 도형의 정의를 가르친다는 것은 무의미한 단어를 받아쓰도록 하는 행위와 마찬가지라고 비판하였다. 특히 수학에서 ‘정의’ 란 일상적인 정의와는 달리 용어의 의미를 단순히 약속하는 것이 아니며, 학생 스스로 도형의 여러 기하학적 성질을 연역적으로 조직화하면서 정의를 재발명하는 과정, 즉 정의하기(defining)를 가

* 인천대학교, leeji_hyun@naver.com
1) 이 논문은 2013년도 인천대학교 교내연구비에 의하여 연구되었음.

르쳐야 한다고 하였다.

교과서의 정의를 그대로 전달하는 대신, 대화를 통해 학생들이 도형의 정의를 재발명하기를 원하는 교사는 어떻게 수업을 계획해야 할 것인가? 이와 관련하여 Freudenthal은 교사가 수학적 개념의 재발명 과정을 상상하는 사고 실험의 필요성을 지적하였는데(우정호, 2000), 이 연구에서는 이러한 사고실험의 도구로 교사와 학생사이의 대화라는 형식을 가진 'lesson play(Zazkis, Liljedahl, Sinclair, 2009)'를 활용하고자 한다. lesson play를 통해 교사들은 가르치고자 하는 주제에 대한 학생들과의 의사소통을 구체적으로 상상함으로서 수업을 계획할 수 있으며, 한편 연구자들은 교사들의 lesson play를 통해 가상적인 실행에서 구현된 교수학적 내용 지식을 탐구할 수 있다(Zazkis, Liljedahl, Sinclair, 2009).

이 연구는 도형 정의의 재발명에 대하여 교사들이 작성한 lesson play를 다음 연구문제를 중심으로 분석하고자 한다.

1. 교사들은 학생들과의 대화를 통해 도형의 정의를 재발명하는 교수과제를 어떻게 실행하였는가?

2. 교사들이 도형의 정의에 대해 생각할 수 있었던 것과 없었던 것은 무엇이었는가? 또 교사들은 이 교수과제의 가상적인 실행에서 어떤 딜레마를 겪었는가?

이러한 분석에서, 교사들이 가지고 있었던 정의 개념은 어떤 것이었으며, 특히 Freudenthal의 이론을 반영하여 정의를 가르치고자 할 때 어떤 교수학적 문제에 봉착할 수 있는지를 살펴본다. 이를 바탕으로 교사들이 자신이 과거에 배웠던 방식과 다른 방식으로 도형의 정의를 가르치기 위해 교사교육에서는 무엇이 필요한가에 대해 논의한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 정의의 언어적 측면: 정의와 용어

우리는 개념을 언어라는 매개를 통해 이해하므로, 개념의 정의란 그 개념을 지시하는 '용어'의 정의이기도 하다. 도형의 정의를 용어라는 언어적 측면에 주목하여 분석한 박경미, 임재훈(1998)은 어떤 개념을 지시하는 용어에는 그렇게 이름을 명명한 인간의 사고가 반영되어 있으므로, 단순히 용어만이 아니라 그러한 용어를 만든 인간의 사고를 가르쳐야 한다고 하였다.

수학 용어는 규약성과 의미성이라는 두 가지 측면을 가지고 있다. 규약성은 용어 자체를 개념에 대한 하나의 규약으로 수용하는 것을 말하는데, 예를 들어 '이등변삼각형'은 용어 자체가 그 정의 혹은 규약을 내포하는 규약성이 강한 용어이다(박경미, 2007). 이처럼 용어와 정의가 일치한다면, 용어가 가진 규약성은 정의를 보다 쉽게 받아들이고 오래 기억하게 한다. 박경미(2007)의 국제 비교 연구에 의하면, 우리나라 학생들이 일본, 중국 등 한자문화권 학생들 및 영어권의 학생들과 비교하여 정사각형을 직사각형으로 정확하게 인식하는 비율이 더 높게 나타났는데, 이러한 결과는 일본·중국에서의 長方形, 영어의 rectangle이라는 용어보다 우리나라의 직사각형이라는 용어가 '(네 각이) 직각인 사각형' 이라는 정의를 더 잘 반영하고 있다는 용어상의 이점과 무관하지 않다.

그러나 모든 수학 용어가 이등변 삼각형의 경우와 같이 그 개념의 정의를 정확하게 반영하는 것은 아니며, 오히려 상충되는 경우도 적지 않게 찾아볼 수 있다. 예를 들어 '등변사다리꼴'이라는 용어는 두 변의 길이가 같은 사다리꼴이라는 의미이지만, 우리나라 교과서에 제시된 정의는 '한 밑변의 양 끝 각의 크기가 같은 사다리꼴'이

므로 용어가 내포하는 의미와 정의가 다르다(박경미, 임재훈, 1998)[2]. 따라서 등변사다리꼴의 경우는 직사각형과 반대로 용어의 규약성이 정의의 수용에 오히려 장애요인이 된다.

수학용어의 의미성이란, 용어로부터 그 개념에 관한 어떤 이미지, 혹은 용어가 조어된 배경과 같은 의미를 추출할 수 있다는 것이다(박경미, 2007). 예를 들어 사물의 이름을 차용한 '사다리꼴' 이라는 용어에서, 정의가 아닌 '사다리 모양의 도형'이라는 그 개념의 특수한 전형적인 예 또는 모양을 환기할 수 있다. 이점에서 박경미, 임재훈(1998)은 사다리꼴, 마름모와 같이 사물의 이름을 빌려 만든 용어가 부적절한 개념 이미지를 강화하는 방향으로 작용하여 결과적으로 올바른 개념 형성 및 정의 이해를 방해할 수 있다고 지적한다.

2. 정의의 수학적 측면

우리나라 교육과정에서 '정의' 라는 용어는 중2 교과서의 논증기하의 도입부에서 처음 등장하며, 여기서 정의는 '용어의 뜻을 명확하게 정한 것(최용준 외, 2012, pp.193)'으로 일상적인 정의와 별다른 차이 없이 설명되고 있다. 일상생활에서는 정의를 주로 정의되는 대상을 다른 대상과 구별하는 근거로 사용하지만, 수학에서는 정의를 다른 대상과 구분하는 것 이상의 정의로부터 그 대상이 가지고 있는 새로운 성질을 증명하는 데 사용한다. 이러한 사용의 차이 때문에, 수학적 정의는 일상적인 정의와 달리 정의와 정의되는 대상이 정확하게 동치 혹은 필요충분조건이라는 속성을 가진다(Alcock, Simpson, 2002; Jacobs, 2003, 46-47).

Freudenthal(1971)은 학생들이 이와 같은 수학적 정의의 의미를 평행사변형의 여러 기하학적 성질을 논리적으로 조직화하는 과정에서 학습할 수 있다고 설명하였다. 평행사변형의 정확한 정의는 모를지라도 그 모양에서 여러 기하학적 성질들을 발견할 수 있으며, 이러한 성질들의 논리적 조직화 과정에서 연역의 필요성이 자연스럽게 등장한다. 여기서 평행사변형의 여러 성질들이 사실 서로 관련되어 있으며, 특히 어떤 한 성질이 다른 성질을 끌어내는 기본 성질이 될 수 있음을 발견하여 이러한 기본 성질을 평행사변형의 정의로 선택할 수 있다. Freudenthal은 도형의 정의는 최초에 제시되어 다른 여러 성질들을 증명할 수 있는 공고한 기초가 되는 것이 아니라, 오히려 정반대로 정의는 그 도형의 기하학적 성질을 연역적으로 조직화하여 얻게 되는 가장 최종적인 산물이라고 지적하였다.

이와 같은 연역적 조직화 과정에서, 학생들은 수학에서의 정의가 일상적 정의와 다른 최소성, 임의성과 같은 특징을 가지게 된다는 것을 자연스럽게 이해할 수 있다. 정의의 최소성이란, 정의가 그 개념을 결정하는 최소한의 정보만을 가지고 있으며 불필요한 정보를 포함하지 않는 속성이다(Linchevsky, Vinner, Karsenty, 1992). 예를 들어 평행사변형을 '두 쌍의 대변이 평행하고, 길이가 같은 사각형' 이라고 정의하지 않더라도, 두 쌍의 대변이 평행하면 대변의 길이도 같으므로 '두 쌍의 대변이 평행한 사각형' 이라는 정의만으로도 충분함을 이해할 수 있다.

한편, 평행사변형의 여러 성질들은 사실 동치이므로, 평행사변형을 '두 쌍의 대변이 같은 사각형' 혹은 '두 쌍의 대각이 같은 사각형' 과 같이 정의할 수 있음을 알 수 있으며, 이를 통해 어떤 수학적 개념에 대해 논리적으로 대등한 다른 정의가 존재할 수 있음을 이해할 수 있다. 이

2) 또한 우리나라의 '적어도' 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이라는 사다리꼴의 정의에서는, "평행하지 않은 두 변의 길이가 같은 사다리꼴" 과 "한 밑변의 양 끝 각의 크기가 같은 사다리꼴"은 동치가 아니다(자세한 설명은 각주 10을 참고할 수 있다).

와 같이 수학에서는 어떤 개념에 관한 동치 명제 혹은 필요충분조건이 여러 개 존재할 수 있으며, 수학적 정의는 이러한 동치명제 중 임의로 어느 한 명제를 그 개념의 정의로 선택할 수 있다는 의미에서 임의적이라고 할 수 있다 (Linchevsky, Vinner, Karsenty, 1992). 또한 수학적 정의의 임의성은 정의와 정리의 지위가 고정된 혹은 절대적인 것이 아니며 상호 교환될 수 있음을 함의한다. 예를 들어 평행사변형을 "두 쌍의 대변이 평행인 사각형" 이라고 정의하면, 이 정의 하에서는 "두 쌍의 대변의 길이가 같다"라는 성질은 정리이지만, 그 반대로 대변의 길이로 평행사변형을 정의하면 두 쌍의 대변이 평행하다는 성질은 정리로 바뀌게 된다.

Ⅲ 연구방법

1. 교사교육 및 연구도구로서의 Lesson play

lesson play[3]는 학습 주제와 관련된 학생들의 사고에 대한 여러 가지 상호작용방안의 가능성을 고민하면서 반성적으로 수업을 계획할 수 있는 도구가 될 수 있다(Zazkis, Liljedah l, Sinclair, 2009). 교사들은 lesson play를 쓰면서, 교사이자 학생이 되어 수업에서의 상호작용을 상상하게 된다. 학생들의 가능한 대답이나 오류에 대한 상호작용을 lesson play로 작성한다는 것은, 단순히 바람직한 대처 방안을 대략적으로 제시하는 수준 이상의 이러한 방안을 구체적으로 구현하는 행동과 언어를 정확하게 제시해야 한다는 점에서 매우 도전적인 교수과제가 될 수 있다. 따라서 lesson play는 마치 모의 비행훈련 장치와 같이, 교수 상황에서의 다양한 사고 및 의사결정을 연습할 수 있는 기회를 제공한다. 특히 즉각적인 대처가 요구되는 실제상황과 달리, lesson play에서는 시공간적 압박 및 기타 환경적 제약에서 자유로운 상태에서 다른 교수학적 선택의 가능성과 그 결과에 대해 고민할 수 있다(Zazkis, Liljedahl, Sinclair, 2013).

한편 연구자들은 lesson play를 통하여, 교사들이 생각하는 '좋은 수업'으로 향하는 교수 경로를 구체적으로 관찰함으로서 교사들의 교수학적 내용 지식 및 교육적 성향을 분석할 수 있다. 본 연구에서도 lesson play를 교사들이 가진 정의에 관한 교수학적 내용지식을 분석하는 렌즈로 활용하고자 한다.

2. 연구 참여자 및 절차

이 연구의 참여자는 2013년 1학기 교육대학원에서 연구자가 강의한 '수학교재연구 및 지도법[4]'을 수강했던 세 여교사이다. 이들은 모두 수학과를 졸업한 후 2급 정교사 자격증을 취득하기 위해 교육대학원에 진학하였으며, 대학을 졸업한 후 중고등학교에서 시간강사로서 다년간의 교육경험이 있었다.

연구자는 강의의 첫 시간에 lesson play를 연구참여자들에게 소개하였다. 그리고 Zazkis, Liljedahl, Sinclair(2009)에서의 소수와 합성수의 개념에 대한 문제 상황을 제시하고, 그에 대한 간단한 lesson play를 각자 작성한 후에 Zazkis, Liljedahl, Sinclair(2009)의 이상적인 lesson play 사례와 비교 및 반성하는 토론을 하였다. 연구자는

3) lesson play의 뿌리는 Plato의 대화편에 등장하는 소크라테스의 대화까지 거슬러 올라갈 수 있다. Sfard는 사고를 의사소통의 한 양상, 즉 자신과의 대화라고 개념화하였는데, lesson play의 아이디어는 이러한 철학적 입장도 반영하고 있다(Zazkis, Liljedahl, Sinclair, 2013).

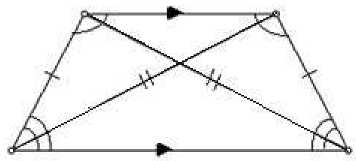
4) 이 강의의 주 교재인『수학교육과정과 교재연구(김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 2011)』에서는, '기하와 증명' 장에서 Freudenthal과 van Hiele의 기하와 증명 교육이론을 소개하였다.

강의에서 도형의 여러 성질을 연역적으로 조직화하면서 정의하기를 가르칠 수 있다는 Freudenthal의 기하 교육 이론을 소개하였으며, van Hiele 기하학습수준이론과 도형의 정의 이해의 문제를 연결하여 설명하였다[5].

이러한 이론 강의 후에, 본 연구에서 분석할 lesson play를 기말 과제로 제시하였다. 최종 보고서에는 lesson play 뿐 아니라 lesson play에서 달성하고자 했던 학습목표[6], 교수 학습상황에 대한 가정(학습 과정 및 학생들의 성향에 대한 가정, 좋은 수학 수업에 대한 자신의 생각)등에 대한 간단한 설명을 포함하도록 하였다. 연구자는 lesson play의 주제를 제시한 뒤, 연구 참여자들과 주제에 대한 간단한 1차 토론의 기회를 가졌다. 교사들이 최종보고서를 제출한 후, 각 교사가 작성한 lesson play에 대한 의문점에 대해 e-mail을 이용하여 개별적으로 인터뷰를 실시하였으며, 교사 P , H와는 2차 토론의 기회를 가질 수 있었다[7]. 연구자는 교사들이 작성한 lesson play 및 최종보고서, 토론과 인터뷰에 대한 전사 기록 등의 자료를 분석하였다.

3. Lesson play 과제 : 등변사다리꼴 정의의 재발명

부록에 제시된 lesson play과제는 다음과 같은 여러 성질을 토대로 등변사다리꼴의 정의를 학생들과 재발명하는 것이다[8].



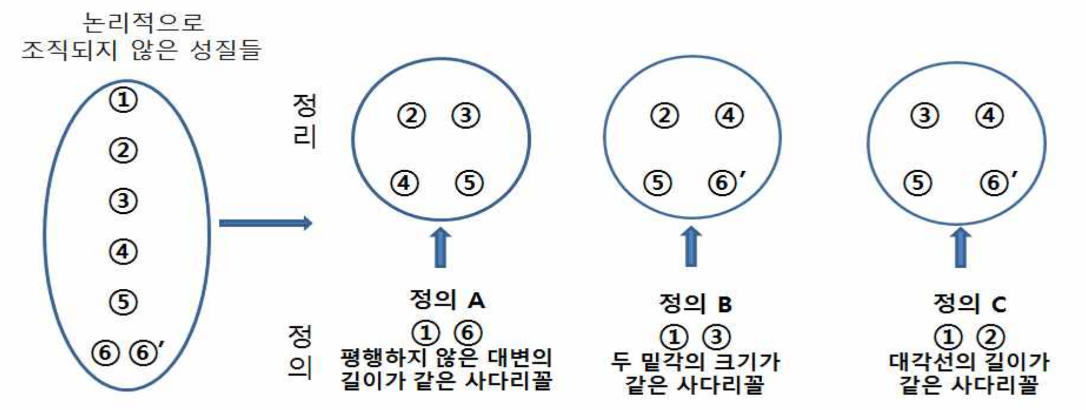
① 한 쌍의 대변이 평행하다.
② 대각선의 길이가 같다.
③ 두 밑각의 크기가 같다.
④ 두 윗각의 크기가 같다.
⑤ 윗각과 밑각의 크기의 합은 180°와 같다.
⑥ 평행하지 않은 한 쌍의 대변은 길이가 같다.
⑥′한 쌍의 대변이 길이가 같다.

이와 같은 여러 성질들을 논리적으로 조직화하여 나머지 성질을 함의할 수 있는 부분 집합을 선택함으로서 등변사다리꼴의 정의를 재발명할 수 있다. 이때 정의로 선택한 성질 외의 나머지 성질은 정의로부터 유도되는 정리가 된다. 예를 들어 등변사다리꼴에 대해서도 연역적 조직화를 통해 그림 1[9]과 같은 여러 정의의 가능성을 생각할 수 있다.

등변사다리꼴의 전형적인 이미지는 이등변 삼각형을 밑변에 평행하게 자른 모양이다. 이등변 삼각형에서 대변의 길이와 밑각의 크기가 같다는 것이 동치이므로, 사다리꼴에서도 변에 의한 정의 A와 각에 의한 정의 B가 동치일 거라고 생각하기 쉽다. 그러나 [그림 Ⅲ-1]에서 정의 A는 B 혹은 C와 동치인 정의가 아니지만, B와 C

---

5) de Villiers(1998)는 다음과 같이 van Hiele 수준에서의 정의 이해를 설명한다. 1 수준의 학생들이 생각하는 도형의 정의란, 어떤 도형을 시각적인 형태로 인식하는 시각적 정의이다. 도형의 여러 성질을 분석할 수 있는 2수준의 학생들이 생각하는 도형의 정의는, 그 도형의 모든 성질을 단순하게 나열하는, 최소성이 결여된 정의이다. 도형의 성질들을 조직화할 수 있는 3수준에 도달해서야 학생들은 정의의 최소성이라는 특징을 인지하며, 도형의 수학적 정의를 이해할 수 있다.
6) 연구자는 lesson play에서 통상적인 학습목표에 국한되지 않는 자유로운 학습목표를 세우도록 허용하였다.
7) 교사 K는 개인적인 사정으로 2차 토론에 참석할 수 없었다.
8) 이 교수과제는 de Villiers(1998)의 교수실험에서 학생들의 정의하기(defining)능력을 평가한 사후 검사 문항을 참고하여 제시하였다.
9) de Villiers(1998)는 Freudenthal의 연역적 조직화를 '후험적 정의하기(a posteriori defining)'라는 용어로 설명하고 있는데, [그림 1]은 후험적 정의하기에 대한 de Villiers의 도식을 등변사다리꼴에 맞추어 연구자가 수정한 것이다.



[그림 Ⅲ-1] 등변사다리꼴의 성질에 대한 연역적 조직화와 정의의 선택

는 논리적으로 동치인 정의임을 알 수 있다[10]. 특히 정의 A와 정의 B(혹은 C)가 동치가 아닌 이유는, 사다리꼴에서 평행한 대변의 쌍이 두 개일 수 있기 때문이다. 만약 정의 B에 단 한 쌍의 대변만 평행하다는 조건을 붙여 정의 B'(단 한 쌍의 대변만 평행하고 두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴)와 같이 수정한다면, A와 B'는 동치인 정의가 된다.

Ⅳ. Lesson play의 분석

<표 Ⅳ-1>은 연구에 참여한 세 교사가 작성한 lesson play의 학습 목표 및 대략적인 교수 학습 경로를 요약한 것이다. 다음은 세 교사의 lesson play에서 살펴볼 수 있었던 정의에 대한 교수학적 내용지식의 각 측면을 살펴보기로 한다.

1. ‘정의’의 재발명 대 ‘용어’의 재발명

교사 P의 lesson play는 다음과 같이 등변사다리꼴이라는 용어를 먼저 제시하지 않은 채, 도형에 대해 마치 ‘사람의 이름처럼 이 도형만을 설명할 수 있는’ 이름을 지어보자는 제안으로 시작하였다.

1. 교사 : 그럼 이 사다리꼴[11]의 이름을 각자 지어보도록 하자. 사다리꼴이란 말은 써도 되고 안 써도 됩니다.
2. 학생 D : 저희가 이름을 지어요? 사각형이요.
3. 교사 : **사각형이라고 하면 이 도형만의 이름이 아니겠지. 사람의 이름처럼 이 도형만을 설명해 주는 구분되는 이름이면 좋겠지**(이후 중략, 교사 P의 lesson play).

교사 P는 정의하기를 ‘주위 사람들과 어떤 사람의 특징에 대한 의견을 모아 별명을 짓는

10) 정의 A와 B(혹은 C)가 같은 정의가 아니라는 점은 직사각형의 예에서 쉽게 확인할 수 있다. 정의 B와 C에서는 직사각형은 등변사다리꼴이지만, 정의 A에서는 단 한 쌍의 대변만 평행할 수 있으므로 직사각형은 등변사다리꼴이 아니다. 우리나라 교과서에서 제시되는 등변사다리꼴의 정의는 B이며, ‘등변사다리꼴’ 이라는 용어에서 유추되는 정의 A와 다르기 때문에 학생들은 등변사다리꼴의 정의 수용에 어려움을 겪는다(박경미, 임재훈, 1998; 박경미, 2007)

11) 여기서 교사는 등변사다리꼴을 지시하고 있다.

<표 Ⅳ-1> 세 교사의 lesson play에서의 학습목표 및 가상교수학습 경로

연구 참여자	학습목표	교수학습 경로
교사 P	도형을 살펴보고 도형의 명칭을 짓고, 그에 따른 정의를 발견하기	‘등변사다리꼴’이라는 이름을 먼저 제시하지 않고 학생들과 등변사다리꼴의 여러 기하학적 특징을 반영한 다양한 이름을 지어본 후, 도형의 정의와 이름과의 관계를 논의하자는 제안으로 끝맺고 있다.
교사 K	도형의 이름을 정의화 하는 과정 경험하기	먼저 ‘등변사다리꼴’이라는 용어를 분석하여 ‘평행하지 않은 대변의 길이가 같은 사다리꼴’이라는 정의를 이끌어내고 있다. 그 이후 변 대신 각을 이용하여 ‘두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴’, ‘평행하지 않은 대변의 길이가 같고 두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴’ 등의 정의를 제시하였으며, 정의하기에 대한 소감을 공유하는 것으로 마무리하였다.
교사 H	학생마다 정의가 다를 수 있고, 그것이 틀린 것이 아님을 알기	등변사다리꼴의 모든 성질을 다 열거하지 않더라도, 등변사다리꼴을 결정하는데 충분한 기하학적 성질들이 무엇인지를 찾아보도록 안내하였으며, 과제에 제시된 등변사다리꼴의 여러 성질을 이용하여 등변사다리꼴을 다양한 방법으로 정의할 수 있다는 결론으로 끝맺고 있다.

것과 비슷한 것’이라고 생각하였다. 이후의 대화에서 학생들은 등변사다리꼴의 여러 기하학적 특징에 주목하여 ‘잘린 삼각형, 일 평행사각형, 삼각형대’ 등의 다양한 이름을 제안하였다[12]. 통상적인 수업에서 학생들은 절대적인 것으로 이미 주어진 도형의 이름을 수동적으로 수용하지만, 위와 같은 이름짓기 활동은 학생들의 적극적인 참여를 유도하며 도형에 대한 흥미를 이끌어낼 수는 있을 것이다(최수임, 김성준, 2012). 그러나 이와 같은 장점에도 불구하고, 교사 P의 수업에서 재발명된 것은 등변사다리꼴의 정의라기보다는 그것을 지시하는 언어적인 ‘이름’이었음을 알 수 있다.

다음 교사 K의 lesson play는 등변사다리꼴이라는 용어로부터 그 정의를 탐색한다는 점에서, 용어 없이 시작한 교사 P와 정반대의 접근으로 보인다. 교사 P는 이러한 과정을 ‘도형의 이름을 정의화하기’라고 하였다.

1. 교사 : 그럼 평행사변형은 두 쌍의 대변이 평행한 사각형, 사다리꼴은 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이라고 정의할 때, 등변 사다리꼴은 어떻게 정의내릴 수 있을까요?
2. 학생 1 : 일단, 한 쌍의 대변이 평행한 사다리꼴 중에서도‘등변’이라는 말이 들어갔으니까 등변이라는 말의 설명이 필요할 것 같아요.
3. 교사 : 그럼, 한 쌍의 대변이 평행하고 두 변의 길이가 같은 사각형?
4. 학생 2 : 두변이 어디가 같은지 설명이 있어야 할 것 같아요.
5. 학생 3 : 한 쌍의 대변이 평행한건 일단 사다리꼴인지 알았으니까, 길게 풀어 쓸 필요는 없을 것 같아요.
6. 학생 1 : 마주보는 두변의 길이가 같은 사다리꼴?
7. 교사 : 그럼, 평행사변형과 다를 바 없을 것 같은 걸..
8. 학생 2 : 평행하지 않은 변의 길이라고

12) 이렇게 이름 짓기는 자연스럽게 용어의 의미성을 환기하는 활동이 된다.

하면 되지 않을까요?

9. 교사 : 평행하지 않은 마주보는 변의 길이가 같은 사다리꼴(이후 중략, 교사 K의 lesson play)

교사 K는 어떤 용어의 뜻을 알기 위해서는 제일 먼저 그 해당 용어를 살펴보아야 하는데, 등변사다리꼴이라는 용어가 ‘등변’ 과 ‘사다리꼴’ 이라는 단어를 포함하고 있으므로 이로부터 “평행하지 않은 마주보는 변의 길이가 같은 사다리꼴(line 9)” 과 같은 정의를 자연스럽게 이끌어낼 수 있다고 보았다. 이후 등변사다리꼴의 다른 성질을 이용하여 “두 밑각이 같은 사다리꼴(line 16)” 과 같은 다른 정의를 제시하였다[13]. 그런데 또 다른 정의의 가능성을 탐색하는 다음 대화(line16-20)에서, 교사와 학생들은 ‘대각선의 길이가 같다.’ 와 ‘윗각과 밑각의 크기의 합이 180도이다.’와 같은 성질은 정의에 넣지 않아도 된다는 결론을 내리고 있었다.

16. 교사 : 밑변의 두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴. 이렇게....그럼, 대각선이 같다는 것과 윗각 밑각의 크기의 합이 180도라는 것은 정의에 넣지 않아도 될까[14]?
17. 학생 1 : 대각선이 같은 사각형은 많아요. 직사각형, 정사각형, 평행사변형 다 같으니까요....
18. 학생 3 : 아니야~ 평행사변형은 대각선이 같지 않아...
19. 학생 1 : 음......맞다...
20. 학생 2 : 윗각 밑각 크기의 합도 그렇고요.(이후 중략, 교사 K의 lesson play)

여기서 연구자는 교사 K에게 왜 이와 같은 성질은 정의 성질이 될 수 없다고 했는지를 물었다. 이 질문에 교사 K는 lesson play에 제시된 것과 같이, 정의는 다른 것들과 구별하기 위한 것인데 등변사다리꼴 외의 다른 사각형도 이 성질들을 만족할 수 있다는 점 외에도 다음과 같은 이유를 더 설명하였다. 교사 K는 평행사변형과 이등변삼각형을 예로 들면서, 정의란 ‘이름에 따라 붙여진 것’이며 이름과 다른 도형의 성질은 이름을 정의로 수용한 이후 발견된 것이므로 도형의 정의가 될 수는 없다고 하였다. 여기서 교사 K는 용어의 분석을 통해 처음 제시했던 정의 “평행하지 않은 두 변의 길이가 같은 사다리꼴” 가 변이 각 혹은 대각선보다 더 먼저 이루어지는 요소이며 “등변” 이라는 용어와도 부합하기 때문에 이것이 이 도형의 정의여야 한다는 생각을 조심스럽게 피력하였다[15].

이상과 같이 교사 K는 용어의 뜻을 반영한 정의가 자연스러운 도형의 정의라고 생각하였다. 다른 정의의 가능성을 제시하면서도, 인터뷰에서는 이름과 부합하지 않는 다른 성질을 이용한 정의의 가능성을 암묵적으로 거부하고 있음을 관찰할 수 있었으며, 따라서 어떤 도형에 대해

13) 이 부분이 발췌문에서는 생략한 (line 10-15) 사이의 lesson play이다.

14) 여기서 “대각선의 길이가 같다, 또 윗각과 밑각의 크기의 합이 180도라는 성질은 정의에 넣어야 할까?” 라는 질문은 다음과 같은 두 가지 해석이 가능하다. 첫 번째 해석은 “이러한 성질을 사용하여 등변사다리꼴을 정의할 수 있는가?”라는 것이다. 두 번째 해석은 이 직전에 제시된 두 정의 “평행하지 않은 마주보는 변의 길이가 같은 사다리꼴”과 “밑변의 두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴” 과 관련하여, “이러한 성질을 기존의 정의에 더 추가할 필요가 있는가?” 라는 질문이다. 하지만 그 어느 쪽의 해석을 선택하던 간에, “다른 사각형도 이러한 성질을 만족하므로 정의에 넣지 않아도 된다.”라는 답변은 수학적으로 적절하지 않다.

15) 이와 같이 교사 K는 대각선의 성질로 등변사다리꼴을 정의할 수 있다고 생각하지 않았다. Zaslavsky와 Shir(2005)의 연구에서도 학생들이 정사각형에서의 대각선 혹은 이등변삼각형에서 중선의 성질을 이용한 도형 정의를 수용하지 못하고 있음을 관찰하였는데, 이들 연구자들은 이러한 원인이 학생들이 갖고 있는 정사각형 혹은 이등변삼각형의 전형적인 개념 이미지가 대각선 혹은 중선을 포함하고 있지 않기 때문이라고 설명하였다.

논리적으로 대등한 여러 정의들이 존재할 수 있다기보다는 그녀의 표현대로 '이름을 정의화한' 단 하나의 자연스러운 정의가 있다고 믿고 있었다.

개념과 개념을 지시하는 이름 혹은 용어는 다르다. 그러나 언어는 개념 및 개념의 형성과 매우 밀접한 관련이 있으므로(Skemp, 1971), 사람들은 종종 개념 그 자체와 그것을 지시하는 이름을 마치 동일한 것처럼 생각한다(최주연, 2013). 도형의 정의는 그 이름을 분석하여 얻을 수 있다는 교사 K의 설명에서도 개념과 이름을 동일시하는 사고를 엿볼 수 있었다. 결국 도형을 지시하는 용어 자체를 정의에 대한 규약으로 받아들였던 교사 K는 용어의 내포와 다른 정의의 가능성을 완전히 수용하지 못하였다.

용어 없이 정의하기를 이름을 짓는 것으로 해석한 교사 P와 주어진 용어의 분석으로부터 정의를 탐색한 교사 K의 lesson play는 상반된 접근으로 보였으나, 이 두 교사의 정의 개념은 모두 정의를 용어라는 언어적 차원에 국한하여 생각하고 있었다는 공통점을 찾을 수 있었다[16].

2. 정의가 있어야 증명을 할 수 있다

교사 K와 교사 H의 lesson play에서는 두 가지 이상의 등변사다리꼴의 정의가 등장하였다. 예를 들어 다음 교사 H의 lesson play에서, 학생이 등변사다리꼴의 성질들을 열거하자 교사는 등변사다리꼴을 결정하는데 충분한 성질들이 무엇인지를 찾도록 안내하였으며, 그 결과 등변사다리꼴에 대한 세 가지 정의를 끌어내고 있었다.

1. 학생 : 한 쌍의 대변이 평행하고, 대각선의 길이가 같고, 윗 각이 같고, 밑각이 같고, 윗 각과 밑각의 크기의 합이 180°이고, 한 쌍의 변이 길이가 같지만 평행하지 않은 거요.
2. 교사 : 잘했어. 그런데 우리 꼭 이 모든 성질들을 말해야지만 등변사다리꼴이라고 할 수 있을까?
3. 학생 1 : 음..아니요. 하나만 말하면 될 것 같아요~~ 한 쌍의 대변이 평행한 거요.
4. 교사 : 왜 그렇게 생각 했니?
5. 학생 1 : 음~ 그건 평행하면 평행선의 성질에 의해서 밑각과 윗각의 합이 180도인 걸 설명할 수 있을 것 같았어요~
6. 교사 : 훌륭하다~ 그럼 다시 생각해 보자. 한 쌍의 대변이 평행하면 등변사다리꼴 일까?
7. 학생 3 : 아니에요. 그럼 이 도형은? (여기서 등변사다리꼴이 아닌 사다리꼴의 그림을 제시하면서) 한 쌍이 평행하지만 윗각과 밑각도 다르고 대각선의 길이도 다른 걸요.
8. 학생 1 : 그러네. 한 쌍의 대변이 평행하지만 등변사다리꼴은 아니야.
9. 교사 : 꼭 하나만 선택하지 않아도 돼.
10. 학생 1 : 한 쌍의 대변이 평행하고 다른 한 쌍의 대변은 길이가 같으면 돼요.
11. 교사 : 잘했어. 또 다른 의견 없니??
12. 학생 2 : 한 쌍의 대변이 평행하고 두 밑각이 같은 거요.
13. 학생 3 : 윗각과 밑각의 크기 합이 180°이고, 한 쌍의 변이 길이가 같지만 평행하지 않은 거요.
14. 교사 : 잘했어. 이처럼 우리는 성질을 가지고 사다리꼴을 정의할 수 있어(교사 H의 lesson play).

이 lesson play에서는 line 10, line 12, line 13과 같이 등변사다리꼴의 정의에 대한 세 가지 가능성이 제시되고 있으나, 이들 성질을 정의로 선택하는 과정에 대한 추론은 '한 쌍의 대변이 평행

16) 교사 P의 lesson play는 결국 도형의 정의와 이름과의 관계를 논의하자는 제안으로 끝맺고 있었다. 이 점에서도 교사 P의 접근은 처음부터 용어를 통해 "이름의 정의화"를 설명하고자 했던 교사 K의 접근과 큰 차이가 없었다는 점을 알 수 있다.

하면, 윗각과 밑각의 합이 180도이다(line 5)', 또 '한 쌍의 대변이 평행하다는 성질만으로는 충분하지 않다(line 6-8)'외에는 찾아볼 수 없음을 알 수 있다. 앞에서 살펴보았듯이 도형의 성질을 연역적으로 조직화하면서 학생들은 어떤 성질을 정의로 선택해야 충분한지, 다른 성질을 선택하면 어떻게 되는지와 같은 점을 이해할 수 있다. 그러나 교사 H의 lesson play에서는 이러한 연역적 조직화의 과정이 소홀히 다루어지고 있으며, 단순히 성질 중에서 '적절히' 선택한다면 도형의 여러 정의를 얻을 수 있다는 결론으로 끝나고 있음을 관찰할 수 있다. 앞에서 살펴봤던 교사 K의 lesson play에서도 등변사다리꼴에 대해 둘 이상의 정의 가능성을 제시하였으나, 정의의 선택과 관련한 연역적 조직화의 과정은 찾아볼 수 없었다.

연구자는 교사 H에게 이 lesson play에 등장한 세 정의는 같은 정의인지, 또 같다면 왜 같은지에 대한 설명을 요청하였다. 이에 교사 H는 '단 한 쌍' 의 대변이 평행인 사각형에서는 위와 같은 세 정의들이 논리적으로 대등한 것임을 어렵지 않게 설명하였다[17]. 연구자는 이 두 교사에게 도형의 여러 성질 사이의 연역적 조직화의 과정을 다루지 않았던 이유를 물었다. 이에 교사 K는 이 수업의 목표가 등변사다리꼴의 정의를 가르치는 것이었으며, 정의를 확립하기 전에 그와 관련된 증명을 다룰 수는 없었기 때문이라고 하였다. 그녀는 도형의 정의를 가르치면서 연역적 조직화 혹은 증명하는 것은 정의를 쉽게 가르치는 방법이 아니며 오히려 학생들을 혼란스럽게 할 수 있다는 이유로 Freudenthal의 방법에 대해 우려하고 있었다. 한편 교사 H는 도형의 여러 성질들의 논리적인 조직화를 다루면서 연역의 필요성을 자연스럽게 제기할 수 있다는 것을 충분히 납득하지 못했으며, 처음부터 연역을 강제적으로 학습자에게 부과하지 않아야 한다는 Freudenthal의 주장을 학교수학에서는 형식적인 증명을 다루지 않아야 한다는 것으로 확대해석하였다고 하였다.

이상과 같이 교사 K와 H는 lesson play에서 도형에 대한 여러 정의의 가능성을 제시하였으나, 이러한 정의의 선택이 어떻게 가능한가를 보여줄 수 있는 연역적 조직화의 과정은 소홀히 취급하고 있었다. 인터뷰를 통해, 이들 교사들이 정의를 가르치는 데 있어 연역적 조직화의 과정을 정의를 설명하는 데 있어서는 부차적인 절차 혹은 정의가 확립된 이후에나 다룰 수 있는 것으로 인식하고 있었음을 확인할 수 있었다.

3. '정의하기' 가 야기했던 딜레마

교사들이 lesson play에서 Freudenthal의 이론을 반영하여 정의의 재발명을 가르치고자 했을 때 봉착했던 교수학적 딜레마를 연구에 참여한 교사들과의 토론 및 인터뷰에서 다음과 같이 살펴볼 수 있었다.

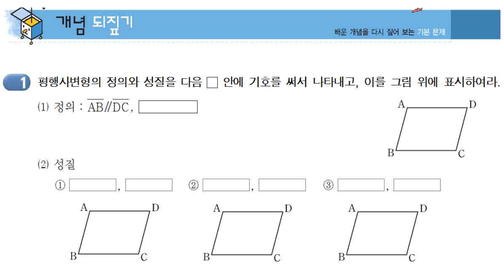
교사 P는 자신이 학창시절 도형의 정의에 대해 "어떤 것은 변으로 정의하고, 또 어떤 것은 각으로 정의하는데, 왜 정의에 일관성이 없을까? 도형의 성질과 정의는 어떻게 보면 비슷하고, 정의는 성질 중 하나라고 할 수 있는데 어떤 기준으로 어떤 성질은 정의라 하고 또 어떤 성질은 성질이라 할까?" 와 같은 의문을 품었었음을 회상하였다. 교사들은 자신의 과거 학습 경험을 떠올리면서, 도형의 정의를 아무 이유도 없이 선언적으로 제시하는 교수 관행의 문제에 대해 공감

17) 연구자는 교사 K에게도 자신의 lesson play에서 제시했던 "평행하지 않은 대변의 길이가 같은 사다리꼴", "두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴" 이라는 정의가 왜 같은지에 대한 설명을 요청하였다. 교사 K는 "사다리꼴" 에서는 사실 단 한 쌍의 대변이 아니라 두 쌍의 대변이 평행할 수도 있다는 것을 고려하지 못하고 위 두 정의가 같은 것이라고 하였다.

하였다. 그러나 교사들은 제한된 수업시간 및 가르칠 수 있는 내용적 제약, 그리고 수학을 어려워하는 대다수 학생들이 도형의 성질을 통해 과연 이러한 방식으로 정의를 재발명할 수 있겠는가와 같은 점을 언급하면서, Freudenthal의 정의 지도는 현장에서는 거의 실현되기는 어려운 것이라고 생각하고 있었다.

그러나 학교의 수업 환경 및 학생의 수준과 같은 상황적 제약 외에도, 교사들은 Freudenthal의 정의 교육관점과 중학교 교과서의 접근이 모순될 수 있다고 생각하였다. 예를 들어 평행사변형에 대한 연역적 조직화는, '두 쌍의 대변이 같은 사각형' 혹은 '두 쌍의 대각이 같은 사각형'와 같은 정의도 가능함을 보여준다. 그러나 교사들은 이것이 "용어나 기호의 뜻을 명확하게 하나로 정하여 나타낸 것(강신덕 외 5인, 2010 :170)" 이라는 중학교 교과서의 정의에 대한 설명과 상치될 수 있다고 하였다.

또한 정의의 임의성으로 인하여, 도형의 어떤 성질이 정의가 되는가 아니면 정의에서 유도되는 정리가 되는가는 절대적인 것이 아니며 무엇이 정의로 선택되는가에 따라 바뀌게 된다. 그러나 이 점 역시 교사들은 다음 문제([그림 Ⅳ-1])에서 관찰할 수 있는 바와 같이, 도형의 정의와 성질(혹은 정리)을 엄격하게 구별하여 지도하는 중학교 교과서의 접근과 상충되므로 학생들을 혼란스럽게 할 수 있다고 우려하였다.



[그림 Ⅳ-1] 평행사변형의 정의와 성질을 구별하는 익힘책 문제(박영훈 외, 2011)

교사들은 Freudenthal의 관점이 내포하는 정의의 임의성 및 그에 따른 정의와 성질의 교환 가능성과 같은 사실이 '학생들을' 혼란스럽게 할 것이라고 표현하였으나, 다음과 같은 교사 H의 언급은 학생 뿐 아니라 교사들 역시 이러한 혼란에서 자유롭지 않았음을 시사한다. 교사 H는 본인 역시 위와 같은 중학교 교과서의 정의 설명과 접근을 '문자 그대로만 받아들여', 이제까지 수학에서 어떤 개념의 정의란 단 하나밖에 없으며, 성질과 정의의 지위는 고정되어 있다고 생각해왔다고 하였다.

논리적으로 대등한 도형의 정의가 여러 개 존재할 수 있다는 사실은, 교과서에서는 이 중 어느 하나를 정의로 선택하여 전개할 수 있다는 점과 모순되지 않는다. 그러나 위와 같은 교사들의 반응은 어떤 도형에 대해 논리적으로 대등한 정의가 여러 개일 수 있으며, 정의와 정리의 지위가 절대적인 것이 아니라는 사실이 교사들에게도 낯선 것이었음을 시사한다. 결과적으로 교사들 자신도 수학적 정의의 임의성과 중학교 교과서의 정의 설명의 해석사이에서 발생할 수 있는 피상적인 모순을 완전히 해소하지 못하고 있음을 알 수 있었다. 현실적인 교수 환경의 여러 제약 외에도 이러한 딜레마는 왜 교사들이 Freudenthal의 이론을 안전한, 또 실현 가능한 교수방법으로 생각할 수 없었는지를 설명하고 있다.

Ⅴ. 결론 및 논의

정의와 공리의 진술로부터 시작하는 것은 수학 내용의 논리적 전개를 위한 필수적인 양식이다. 그러나 완성된 학문의 전개 논리를 교육에서도 그대로 적용한 전통적인 기하교수관행은, 많은 수학교육학자들에 의하여 권위주의적인 교육방식일 뿐만 아니라 연역 체계의 진정한 이해

역시 보장할 수 없다는 비판을 받아왔다. 이 연구에서 분석한 교사들의 lesson play는, 이러한 주입식 정의 교육의 문제에 대해 공감하는 교사들이 왜 다르게 가르치는 데에는 실패하게 되는지를 보여주고 있다.

이 연구에 참여했던 교사들은 등변사다리꼴의 정의를 재발명하는 교수과제에 대하여 '정의하기'에 대한 자신의 생각을 lesson play로 구현하였다. lesson play에서 교사들은 도형의 정의를 일방적으로 전달하지 않았으며 여러 정의의 가능성을 제시하기도 하였으나, 연역적 조직화로서의 정의하기를 충분히 다룰 수는 없었다. 특히 Freudenthal의 이론을 구현하는데 장애가 된 요인은, 교사들이 정의를 그 개념에 대한 필요충분조건이라는 수학적 정의라기보다는 단지 어떤 용어에 대한 언어적 약속으로만 인식하고 있었다는 점에서 찾아볼 수 있었다. 이러한 교사들은 도형을 지시하는 용어에서 의미 혹은 규약을 찾아 정의를 설명하면 충분하다고 보았으며, 왜 정의를 가르치는 데 있어 연역적 조직화와 같은 과정이 필요한지를 이해하지 못하였다. 또한 수학에서도 정의란 단 하나 밖에 존재하지 않는다고 생각하여, 수학적 정의의 임의성 및 정의와 정리의 지위가 절대적이지 않다는 사실을 수용하는 데 어려움을 겪고 있었다. 특히 "용어나 기호의 뜻을 명확하게 하나로 정하여 나타낸 것"이라는 중학교 교과서의 정의 설명을 문자 그대로만 해석하여, 논리적으로 대등한 정의가 여러 개 존재할 수 있음을 함의하는 Freudenthal의 관점과 중학교 교과서의 정의 설명 사이에서 갈등하였다.

교사들은 주입식 정의 교육의 문제에 대해 깊이 공감하고 있었다. 그러나 연역적 조직화에 의한 정의의 재발명은 이들 교사들이 가지고 있었던 용어의 의미에 대한 약속이라는 상식적인 정의개념 뿐만 아니라, 중학교 교과서에서의 접근과도 잠재적으로 모순 혹은 충돌할 수 있는 것이었으며, 이러한 모순을 해소할 수 없었던 교사들이 Freudenthal의 이론을 실행에 옮긴다는 것은 매우 어려운 일임을 알 수 있었다.

이 연구는 정의 교육과 관련하여 Leikin, Levav-Waynberg(2007)의 연구와 같이, 수학교육 이론에 근거한 이상적인 교수 관행이 왜 현장에서는 실천되지 못하는지를 설명하였다. Borko, Eisenhart, Brown, Underhill, Jones, Agard(1992)는, 수학을 절차적으로 가르치지 않아야 한다는 바람직한 신념을 가지고 있었음에도 불구하고 교수학적 내용 지식의 부족으로 인해 분수의 나눗셈을 개념적으로 가르치는데 실패했던 한 예비교사의 사례를 분석하였다. 이들 연구자들은 교사교육에서 단지 바람직한 교수 방향을 제시하는 수준에 머물러서는 부족하며, 새로운 교수 방법의 실현을 위해 요구되는 교수학적 내용 지식과 자신이 갖고 있는 현재 지식, 혹은 과거 학교수학을 배웠던 방식 사이에 존재할 수 있는 간격을 교사들이 인식하게 하는 것이 필요하다고 지적하였다. 본 연구의 lesson play를 통한 분석 역시, Freudenthal의 이론과 같은 이상적인 교수 철학을 소개하는 것만으로는 교사들이 도형의 정의를 다르게 접근하도록 교수동기를 부여하기 어려움을 보여주고 있으며, Freudenthal의 관점이 함의하는 정의 개념과 상식적인 정의 개념 사이에 존재할 수 있는 차이에 대해 반성해보는 것이 필요함을 시사하고 있다.

이 연구에서는 교사들의 lesson play를 정의에 대한 교수학적 내용지식에 대한 분석의 도구로 활용하였으나, 수학교사교육에서 lesson play는 학교수학에 대한 자신의 지식과 새로운 교수 방법의 실행에 요구되는 내용 지식의 차이를 인식하고 반성하는 교육 도구로서도 활용을 기대할 수 있다. 한편, 정의의 임의성에 대해 혼란스러워 했던 수학교사들의 반응은, 중학교 교과서의

정의에 대한 설명 및 접근으로 인해 수학적 정의 개념에 대해 잠재적으로 어떤 잘못된 인식을 가질 수 있는지를 보여주고 있다. 따라서 이러한 정의 교육의 맹점을 개선 및 보완할 수 있는 방법에 대한 교육적 고민 및 후속 연구가 필요하다.

참고문헌

강신덕, 홍인숙, 김영우, 이재순, 전민정, 나미영 (2010). **중학교 수학 2**. 서울 : 교학사.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2011). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

박경미, 임재훈(1998). 학교수학 기하 용어의 의미론적 탐색- 기하 용어의 역사적 변천 및 국제 비교를 중심으로, **대한수학교육학회 논문집 8**(2), pp.565-586.

박경미(2007). 도형 개념의 이해에 영향을 미치는 언어적 측면에 대한 연구 -용어의 어원과 조어 방식을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A: **수학교육, 46**(3), pp. 245-261.

박영훈 외 5인(2011). **중학 수학익힘책 2. 서울: 천재문화.**

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.

최수임, 김성준(2012). 정의하기와 이름짓기를 통한 도형의 이해 고찰 -초등학교 4학년 도형 영역을 중심으로-, **한국학교수학회논문집, 15**(4).

최용준, 한대희, 박진교, 김강은, 신태양, 배명주 (2012). **중학교 수학 2**. 서울: 천재문화.

최주연(2011). **학생들의 수학용어를 통한 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 석사학위 논문.

Alcock, L. & Simpson A.(2002), Definitions: dealing with categories mathematically. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), pp. 28-34.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill R. G., Jones, D. & Agard P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily?, *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), pp. 194-222.

de Villiers, M.(1998). To teach definitions in geometry or teach to define, in Olivier, A & Newstead, K. (Eds.), *Proceedings of 22nd PME-conference*, University of Stellenbosch, 12-17 July 1998, Vol. 2, pp. 248-255.

Lakatos, I.(1976). **수학적 발견의 논리**(우정호 역). 서울 : 아르케.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A(2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics, 66*, pp. 349–371.

Linchevsky, L., Vinner, S., Karsenty, R., (1992). To be or not to be minimal? Student teachers views about definitions in geometry, in Geeslin, W., Graham, K. (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, pp. 48 – 55, Durham, USA.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*(3&4), pp. 413–435.

Jacobs, H. R. (2003). *Geometry seeing, doing, understanding(3rd ed.)*. New York : W. H. Freeman and Company.

Skemp, R. (1971). **수학학습심리학(황우형 역)**. 서울: 민음사

Zaslavsky, O., Karni, S.(2005). Students' conceptions of a mathematical definition, *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), pp.

317-346.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Sinclair, N.(2009). Lesson Plays: Planning teaching vs. teaching planning. *For the Learning of Mathematics, 29*(1), pp. 40-47.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Sinclair, N.(2013). *Lesson play in mathematics education: a tool for research and professional development.* New York : Springer.

Imagining the Reinvention of Definitions : an Analysis of Lesson Plays

Lee, Ji Hyun (Incheon National University)

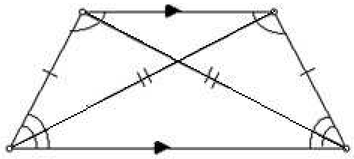
Though teachers' lesson plays, this article analysed teachers' knowledge for mathematical teaching about mathematical definitions and their pedagogical difficulties in teaching defining. Although the participant teachers didn't transmit definitions to students and suggested possible definitions of the given geometric figure in their imaginary lessons, they didn't teach defining as deductive organization of properties of the geometric figure. They considered mathematical definition as a mere linguistic convention of a word, so they couldn't appreciate the necessity of deductive organization in teaching definitions, and the arbitrary nature of mathematical definitions. Therefore, for learning to teach definitions differently, it is necessary for teachers to reflect the gap between the everyday and mathematical definitions in teachers'education.

* Key Words : Defining(정의하기), Lesson Play(lesson play), Mathematical Knowledge for Teaching(수학 교수학적 내용지식), Definition(정의), Guided Reinvention(안내된 재발명)

논문접수 : 2013. 10. 13
논문수정 : 2013. 12. 15
심사완료 : 2013. 12. 20

<부록> Lesson Play 교수과제

다음은 등변 사다리꼴모양을 관찰하고, 등변 사다리꼴의 기하학적 성질을 탐구하는 교실의 상황입니다. 다음과 같은 사각형 모양을 '등변사다리꼴' 이라고 합니다.



학생들은 '등변 사다리꼴' 모양이 다음과 같은 성질들을 가지고 있음을 관찰하였습니다.

① 한 쌍의 대변이 평행하다.
② 대각선의 길이가 같다.
③ 두 밑각의 크기가 같다.
④ 두 윗각의 크기가 같다.
⑤ 윗각과 밑각의 크기의 합은 $180°$ 와 같다.
⑥ 평행하지 않은 한 쌍의 변은 길이가 같다.

이러한 성질들을 토대로, '등변 사다리꼴' 의 가능한 가장 간결한 정의를 학생들과 구성하는 대화를 구상해보십시오. 또 이렇게 구성한 정의를 이용하여, 정의 성질에 포함되지 않은 등변 사다리꼴의 다른 성질의 증명과정도 역시 lesson play로 구상해보십시오(여기에 열거되지 않은 등변 사다리꼴의 기하학적 성질을 이용하여 논의해도 무방합니다).