ISSN: 1226-7244 (Print)
ISSN: 2288-243X (Online)
논문번호 13-04-24

Journal of IKEEE.Vol.17,No.4,559∼563,December 2013
http://dx.doi.org/10.7471/ikeee.2013.17.4.559

ISF와 Floquet 벡터에 기초한 발진기 위상잡음 이론의 등가성에 대한 해석적 증명

Analytical Proof of Equivalence of ISF, and Floquet Vector-Based Oscillator Phase Noise Theories

전 만 영*★

Man-Young Jeon*★

Abstract

This paper analytically proves the equivalence between two main oscillator phase noise theories, which are based on the ISF, and Floquet vector, respectively. For this purpose, this study obtains the power spectral density matrix from the ISF-based phase noise theory. As a result, one can prove that the power spectral density matrix obtained from the ISF-based phase noise theory is essentially equivalent to the power spectral density matrix presented by the Floquet vector-based phase noise theory, which manifests the equivalence of the two main theories. This study is intended to provide deeper insight into the relations between the two main theories.

요 약

본 논문에서는 ISF와 Floquet 벡터에 각각 기초하는 두 개의 주요한 발진기 위상잡음 이론의 등가성을 해석적으로 증명한다. 이를 위해 본 연구에서는 ISF에 기초하는 위상잡음 이론으로부터 전력 스펙트럼 밀도 행렬을 구한다. 이렇게 함으로써 ISF에 기초한 위상잡음 이론의 전력 스펙트럼 밀도 행렬과 Floquet 벡터에 기초한 위상잡음 이론의 전력 스펙트럼 밀도 행렬이 같다는 사실을 해석적으로 증명할 수 있으며 이는 두 이론이 본질적으로 등가임을 증명한다. 본 연구의 목적은 현재까지 널리 알려진 상기 두 위상잡음 이론사이의 관계에 대한 보다 깊은 통찰력을 제공하는데 있다.

Key words : Phase noise, jitter, Floquet Vector, ISF, Oscillator perturbation

Ⅰ. 서론

지금까지 발진기의 위상잡음에 관한 수많은 연구가 있어 왔으며 그 중 비교적 널리 알려진 이론은 참고문헌[1]-[15]이다. 이러한 위상잡음 이론 중 시간영역에서 전개된 대표적인 두 개의 위상잡음 이론은 ISF(Impulse Sensitivity Function: 임펄스 감도함수)에 기초한 위상잡음 이론[9],[10]과 Floquet 벡터에 기초한 위상잡음 이론[11],[12]이 있다. ISF에 기초한 위상잡음 이론은 일종의 선형시변 위상잡음 이론으로서 이론의 전개과정이 평이하고 위상잡음 예측치가 실용적으로 사용하기에 충분히 정확하다. 게다가 발진파형이 대칭이 되게 하거나 최대 전하 스윙이 생기도록 설계하면 위상잡음을 줄일 수 있다는 유용한 설계정보를 제공해주기 때문에 이 이론은 발진기 설계자들에게 가장 널리 알려진 이론이다. 한편, Floquet 벡터

*★ Dept. of Information and Communications Engineering, Dongyang University
myjeon@dyu.ac.kr, 054-630-1158
Manuscript received Dec. 09 2013; revised Dec. 26 2013; accepted Dec. 26. 2013

에 근거한 위상잡음이론은 이론의 전개과정이 복잡하고 발진기 회로에서 상태 방정식을 세운 후 수치 해석적으로 Floquet 벡터를 구해야 하는 부담이 있으나 현재까지 알려진 시간영역 위상잡음 이론 중 가장 정확한 이론으로 알려져 있다.

본 논문에서는 표면적으로는 아무런 관계없이 서로 독립되어 보이는 상기 두 이론이 본질적으로는 같은 이론임을 해석적으로 증명한다. 이를 위해 2장에서는 ISF에 기초한 위상잡음 이론으로부터 기본 주파수 뿐 아니라 그 하모닉까지 포함하는 형태의 PSD(Power Spectral Density: 전력 스펙트럼 밀도)행렬을 유도한다. 3장에서는 이를 가지고 ISF에 기초한 위상잡음 이론과 Floquet 벡터에 근거한 위상잡음 이론의 등가성을 해석적으로 증명한다.

Ⅱ. ISF에 기초한 이론으로부터 PSD 행렬의 유도

잡음에 의해 교란되는 발진기의 상태 벡터 공간(State Vector Space)에서 최종 수렴 사이클(limiting cycle)의 법선벡터 방향의 교란은 발진기의 비선형성에 의한 제한으로 인해 무시할 정도로 작다고 가정한다. 이 경우 교란된 발진기의 상태변수 벡터 $\boldsymbol{x}(t)$는 는

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(\omega_o t+\phi(t))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{X_n}e^{jn(\omega_o t+\phi(t))} \tag{1}$$

이다. 여기서 $\phi(t)$는 잡음에 의해 유발되는 위상천이(phase shift), ω_o는 기본 발진 주파수, $\boldsymbol{X_n}$은 주파수 $n\omega_o$에서 $\boldsymbol{x}(t)$의 계수벡터를 각각 나타낸다. $\boldsymbol{x}(t)$와 시간 천이된 $\boldsymbol{x}(t+\tau)$는 백색 가우스 잡음에 대하여 서로 독립이므로 $\boldsymbol{x}(t)$의 시간평균 자기상관 행렬은

$$\boldsymbol{R}(\tau)=\overline{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^*(t+\tau)}=\overline{\boldsymbol{x}(t)}\,\overline{\boldsymbol{x}^*(t+\tau)} \tag{2}$$

으로 쓸 수 있다. 식(2)를 식(1)에 대입하면

$$\boldsymbol{R}(\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{X_m X_n^*}e^{-jn\omega_o\tau}\times\overline{e^{j(m-n)\omega_o t}}\,\overline{e^{j[m\phi(t)-n\phi(t+\tau)]}} \tag{3}$$

을 얻는다.

$\overline{e^{j(m-n)\omega_o t}}=\delta_{m,n}$이므로 식(3)은

$$\boldsymbol{R}(\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{X_m X_m^*}e^{-jm\omega_o\tau}\overline{e^{jm\varphi(\tau)}} \tag{4}$$

로 간소화 된다. 여기서 $\varphi(\tau)\equiv\phi(t)-\phi(t+\tau)$로 정의한다.

$\overline{e^{jm\varphi(\tau)}}$을 에르고딕 확률과정(ergodic process)으로 가정하면 식(4)는 앙상블 평균의 관점에서

$$\boldsymbol{R}(\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{X_m X_m^*}e^{-jm\omega_o\tau}\langle e^{jm\varphi(\tau)}\rangle \tag{5}$$

로 다시 쓸 수 있다. 여기서 $\langle e^{jm\varphi(\tau)}\rangle$는 $\varphi(\tau)$에 대한 특성함수로서

$$\langle e^{jm\varphi(\tau)}\rangle=e^{jm\langle\varphi(\tau)\rangle-\frac{1}{2}m^2 Var[\varphi(\tau)]} \tag{6}$$

으로 주어진다[17]. 식(6)을 식(5)에 대입하면

$$\boldsymbol{R}(\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{X_m X_m^*}e^{-jm\omega_o\tau}\times e^{jm\langle\varphi(\tau)\rangle-\frac{1}{2}m^2 Var[\varphi(\tau)]} \tag{7}$$

이 된다. ISF에 기초한 위상잡음 이론[9]에 의하면 외부 잡음전류에 의해 유발되는 발진기의 위상천이 $\phi(t)$에 관한 식은

$$\phi(t)=\int_0^t\frac{\Gamma(\omega_o\alpha)}{q_{\max}}i_n(\alpha)d\alpha \tag{8}$$

로 주어지며 ISF에 기초한 위상잡음 이론은 바로 이 식을 기초로 하여 전개된다. 여기서 $\Gamma(\omega_o\alpha)$, $q_{\max}$, $i_n(\alpha)$는 각각 유효 ISF, 공진기의 커패시터에 충전되는 최대전하량, 발진기로 유입되는 외부 잡음전류를 나타낸다. $\langle i_n(t)\rangle=0$ 이므로 식(8)의 양변에 앙상블 평균을 취하면 $\langle\phi(t)\rangle=0$임을 알 수 있다. 같은 이유에 의해 $\langle\phi(t+\tau)\rangle=0$임도 알 수 있다. 이 두 가지 사실을 이용하면

$$\langle\varphi(\tau)\rangle=\langle\phi(t)\rangle-\langle\phi(t+\tau)\rangle=0 \tag{9}$$

를 얻으며 식(9)와 $\varphi(t,\tau)$ 의 정의식을 사용하면

$$\begin{aligned}Var[\varphi(\tau)]&=\langle[\varphi(\tau)-\langle\varphi(\tau)\rangle]^2\rangle\\&=\langle\varphi(\tau)^2\rangle=\langle[\phi(t)-\phi(t+\tau)]^2\rangle\end{aligned} \tag{10}$$

을 얻는다. 백색잡음에 의해 교란된 발진기에 있어서 참고문헌[10]에 의하면 식(10)의 세 번째 등식은

$$\langle [\phi(t)-\phi(t+\tau)]^2\rangle = \left(\Gamma_{rms}^2/2q_{\max}^2\right)/\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)|\tau| \tag{11}$$

로 주어진다. 여기서 Γ_{rms}는 유효 ISF의 실효치를 나타낸다. 식(10)과 (11)로 부터

$$Var[\varphi(\tau)] = \left(\Gamma_{rms}^2/2q_{\max}^2\right)/\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)|\tau| \tag{12}$$

이 됨을 알 수 있다. 식(9)와 (12)를 식(7)에 대입하면 상태벡터 $\boldsymbol{x}(t)$의 자기상관 행렬은

$$\boldsymbol{R}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X_m X_m^*} e^{-jm\omega_o\tau} e^{-\left(m^2\Gamma_{rms}^2/4q_{\max}^2\right)\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)|\tau|} \tag{13}$$

이 된다. 식(13)의 양변을 Fourier 변환하면 *ISF에 기초한 위상잡음 이론의 확장된 PSD* 행렬은 아래의 식(14)와 같이 최종적으로 얻어진다.

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} \boldsymbol{X_m X_m^*} \frac{\left(m^2\Gamma_{rms}^2/2q_{\max}^2\right)\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)}{\left(m^4\Gamma_{rms}^4/16q_{\max}^4\right)\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)^2 + (\omega+m\omega_o)^2} \tag{14}$$

식(14)는 발진기의 기본 주파수뿐만 아니라 상위의 하모닉 주위를 포함하는 모든 주파수 영역에 대한 상태벡터 $\boldsymbol{x}(t)$의 PSD 행렬을 나타낸다. 한편, 참고문헌[10]에 의해 주어지는 $\boldsymbol{R}(\tau)$를 Fourier 변환하여 얻어지는 PSD 행렬은 아래 식(15)와 같이 주어지며 이는 식(14)에서 $m=1$일 때, 즉, 기본 주파수일 때의 특수한 경우를 나타낸다.

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \boldsymbol{X_1 X_1^*} \frac{\left(\Gamma_{rms}^2/2q_{\max}^2\right)\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)}{\left(\Gamma_{rms}^4/16q_{\max}^4\right)\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)^2 + (\omega+\omega_o)^2} \tag{15}$$

이러한 의미에서 식(14)는 식(15)보다 일반적인 형태로 확장된 PSD 행렬이라 할 수 있다.

III. ISF에 기초한 이론과 Floquet 벡터에 기초한 이론의 등가성 증명

위상천이 $\phi(t)$와 시간천이 $\alpha(t)$사이에는 $\alpha(t)=\phi(t)/\omega_o$의 관계가 있으므로 식(8)을 시간천이 $\alpha(t)$의 미분 방정식 형태로 표현하면

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{\Gamma(\omega_o+\alpha(t))}{\omega_o q_{\max}} \sqrt{\overline{i_n^2}/(2\Delta f)}\, \frac{i_n(t)}{\sqrt{\overline{i_n^2}/(2\Delta f)}} \tag{16}$$

이 된다. 여기서 식(8)의 Γ의 인수에 $\alpha(t)$가 추가되었으며 백색 가우시안(white Gaussian) 잡음전류 $i_n(t)$는 그것의 PSD로 정규화 된 형태로 표현하였다. 정규화 된 잡음전류 $i_n(t)/\sqrt{\overline{i_n^2}/(2\Delta f)}$의 PSD는 1이 된다. $i_n(t)$가 백색 가우시안 잡음인 경우, Γ의 인수에 식(16)처럼 $\alpha(t)$를 추가한 경우와 식(8)처럼 추가하지 아니한 경우 사이에는 차이가 없음을 참고문헌[16]로부터 유추할 수 있다. 한편, Floquet 벡터에 기초한 위상잡음 이론에서 시간 천이에 관한 미분 방정식은

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \boldsymbol{v}_1^T(t+\alpha(t))\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x}_s(t+\alpha(t))\right)b(t) \tag{17}$$

로 주어진다[11],[12]. 여기서 $\boldsymbol{v}_1^T(.)$, $\boldsymbol{B}(.)$, $\boldsymbol{x}_s(.)$, $b(t)$는 Floquet 벡터의 전치 벡터, 잡음의 상태변수 의존성을 반영하는 행렬, 안정된 수렴 사이클에서의 상태변수 벡터, 그리고 PSD가 1에 정규화된 외부 잡음을 각각 나타낸다.

식(16)을 식(17)의 관점에서 바라볼 때 아래의 등식

$$\frac{\Gamma(\omega_o+\alpha(t))}{\omega_o q_{\max}} \sqrt{\overline{i_n^2}/(2\Delta f)} = \boldsymbol{v}_1^T(t+\alpha(t))\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x}_s(t+\alpha(t))\right) \tag{18}$$

이 성립함을 알 수 있다. 한편, Floquet 벡터한 기초한 위상잡음 이론에서 백색 잡음에 의해 교란된 발진기의 상태변수 벡터 $\boldsymbol{x}(t)$의 PSD 행렬은

$$\boldsymbol{S}(\omega) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \boldsymbol{X_k X_k^*} \frac{\omega_o^2 k^2 c}{\omega_o^4 k^4 c^2/4 + (\omega+k\omega_o)^2} \tag{19}$$

이다[11]. 여기서 상수 c는

$$c = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{v}_1^T(t)\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x}_s(t)\right)\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{x}_s(t)\right)\boldsymbol{v}_1(t)\,dt \tag{20}$$

이다. 한 개의 잡음원에 대하여 식(20)의 피적분 함수

$v_1^T(t)B(x_s(t))$와 $B^T(x_s(t))v_1(t)$는 같은 스칼라이므로 식(20)은

$$c=\frac{1}{T}\int_0^T\left[v_1^T(t)B\left(x_s(t)\right)\right]^2dt \tag{21}$$

이 된다. 식(18)을 식(21)에 대입하면

$$c=\frac{\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)}{2\omega_o^2q_{\max}^2}\frac{1}{T}\int_0^T\Gamma^2\left(\omega_o t\right)dt=\frac{\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)}{2\omega_o^2q_{\max}^2}\Gamma_{rms}^2 \tag{22}$$

이 된다. 식(22)를 식(19)에 대입하면 Floquet 벡터에 기초한 위상잡음 이론의 PSD 행렬은

$$S(\omega)=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}X_kX_k^*\frac{\left(k^2\Gamma_{rms}^2/2q_{\max}^2\right)\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)}{\left(k^4\Gamma_{rms}^4/16q_{\max}^4\right)\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)^2+\left(\omega+k\omega_o\right)^2} \tag{23}$$

으로 얻어진다. 식(23)은 ISF에 기초한 위상잡음 이론의 확장된 PSD 행렬인 식(14)와 완벽하게 일치한다. 이는 한 개의 백색 가우스 잡음원에 대하여, Floquet 벡터에 기초한 위상잡음 이론과 ISF에 기초한 위상잡음 이론은 본질적으로 등가임을 증명한다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 ISF에 기초한 위상잡음 이론으로부터 보다 일반적 형태의 PSD 행렬을 유도하였고 이에 의해 ISF에 기초한 위상잡음 이론과 Floquet 벡터에 기초한 위상잡음 이론과의 등가성을 해석적으로 증명하였다. 본 논문의 목적은 현재까지 널리 알려진 상기 두 위상잡음 이론사이의 관계에 대한 보다 깊은 통찰력을 제공하는데 있다. 추후에는 본 논문에서 유도한 PSD 행렬의 응용에 관한 연구를 수행할 필요가 있다.

References

[1] D. B. Leeson, "A simple model of feedback oscillator noise spectrum," *Proc. IEEE*, vol. 54, no.2, pp. 329-330, Feb. 1966.

[2] M. Lax, "Classical noise-V: Noise in self-sustained oscillators," *Phys. Rev.*, vol. 160, pp. 290-307, 1967.

[3] U. L. Rohde, *Digital PLL Frequency Synthesizers: Theory and Design*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.

[4] A. A. Abidi and R. G. Meyer, "Noise in relaxation oscillators," *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. SC-18, pp. 794-802, Dec. 1983.

[5] F. X. Kaertner, "Determination of the correlation spectrum of oscillators with low noise," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-37, pp. 90-101, Jan. 1989.

[6] T. C. Weigandt, B. Kim, and P. R. Gray, "Analysis of timing jitter in CMOS ring oscillators," *Proc. ISCAS*, vol. 4, pp. 27-30, June 1994.

[7] J. McNeil, "Jitter in ring oscillators," *Proc. ISCAS*, vol. 6, pp. 201-204, June 1994.

[8] B. Razavi, "A study of phase noise in CMOS oscillators," *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. SC-31, pp. 331-343, Mar. 1996.

[9] A. Hajimiri and T. H. Lee, "A general theory of phase noise in electrical oscillators," *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. SC-33, pp. 179-194, Feb. 1998.

[10] A. Hajimiri and T. H. Lee, *The Design of Low Noise Oscillators*. Boston, MA: Kluwer Academic, 1999.

[11] A. Demir, A. Mehrotra, and J. Roychowdhury, "Phase noise in oscillators: a unifying theory and numerical methods for characterization," *IEEE Trans. Circuits Syst.- I*, vol. 47, pp. 655-674, May 2000.

[12] A. Demir, "Phase noise and timing jitter in oscillators with colored-noise sources," *IEEE Trans. Circuits Syst.- I*, vol. 49, pp. 1782-1791, Dec. 2002.

[13] F. O'Doherty and J. P. Gleeson, "Phase diffusion coefficient for oscillators perturbed by colored noise," *IEEE Trans. Circuits Syst. -II,* vol. 54, pp. 435-439, May 2007.

[14] S. Sancho, A. Suarez, J. Dominguez, and F. Ramirez, "Analysis of near-carrier phase-noise spectrum in free-running oscillatorsin the presence of white and colored noise sources," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* vol. 58, no. 3, pp. 587-601, Mar. 2010.

[15] S. Sancho, A. Suarez, and F. Ramirez, "General phase-noise analysis from the variance of the phase deviation," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* vol. 61, no. 1, pp. 472-481, Jan. 2013.

[16] P. Vanassche, G. Gielen, and W. Sansen, "On the difference between two widely publicized methods for analyzing oscillator behavior," *Proc. ICCAD,* pp. 229-233. Nov. 2002.
[17] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. NewYork: McGraw-Hill, 1986.

BIOGRAPHY

Jeon Man-Young (Member)

1987 : BS degree in Electronics Engineering, Kyungpook National University.
1991 : MS degree in Electronics Engineering, Kyungpook National University.
2000 : PhD degree in Electronics and Electrical Engineering, POSTECH.
1987~1997 : Senior Research Engineer, ETRI, and Samsung Electronics.
2000~2001 : Prestigious Senior Research Engineer, Samsung Advanced Institute of Technology(SAIT)
2001~ : Professor, Dept. of Inform. and Communications Eng., Dongyang University