

불확실성을 포함한 다 개체 시스템의 상태 일치를 위한 이산 시간 출력 제한 협조 제어 알고리즘

Discrete-Time State Feedback Algorithm for State Consensus of Uncertain Homogeneous Multi-Agent Systems

윤 문 채, 김 정 수*, 백 주 훈
(Moon-Chae Yoon¹, Jung-Su Kim², and Juhoon Back³)

¹School of Electrical Engineering, Korea University

²Dept. of Electrical and Information Engineering, Seoul National University of Science and Technology

³School of Robotics, Kwangwoon University

Abstract: This paper presents a consensus algorithm for uMAS (uncertain Multi-Agent Systems). Unlike previous results in which only nominal models for agents are considered, it is assumed that the uncertain agent model belongs to a known polytope set. In the middle of deriving the proposed algorithm, a convex set is found which includes all uncertainties in the problem using convexity of the polytope set. This set plays an important role in designing the consensus algorithm for uMAS. Based on the set, a consensus condition for uMAS is proposed and the corresponding consensus design problem is solved using LMI (Linear Matrix Inequality). Simulation result shows that the proposed consensus algorithm successfully leads to consensus of the state of uMAS.

Keywords: multi-agent system, state consensus, model uncertainties, state feedback, linear matrix inequality

I. 서론

IT 및 정보 기술의 발달에 따라 나타난 두드러진 현상 중 하나로 소형 시스템의 대량화 현상이 있다. 이는 과학과 공학 여러 분야에 걸쳐 개별 시스템은 소형화되고 이런 개별 시스템 여럿을 이용해 대량화된 또 다른 거대시스템을 구성하여 원하는 목적을 달성하고자 하는 시도에 기인한다. 따라서 각 개체(agent)가 서로 통신, 협력하여 다 개체 군집 시스템(MAS: Multi-Agent System)이 특정 목적을 달성하도록 제어하는 것이 중요한 문제로 떠오르고 있다[1,17,18].

그 중에서 특히 MAS를 이루는 여러 개체의 상태 변수가 개체 간 국부 통신(local communication)을 통해 한 가지 상태 값으로 수렴하는 상태 일치(state consensus) 문제가 주목받고 있다. 그 이유는 MAS 운용을 위한 여러 형태의 제어 문제가 상태 일치 문제로 귀결되기 때문이다. 예를 들자면, 이동 로봇 다수가 한 장소에서 만나도록 하거나 (rendezvous problem) 여러 비행체가 대형을 이루어 날아가도록 하는 문제(formation control)는 모두 상태 일치 문제의 특별한 형태이다. 이러한 상태 일치를 위해서는 개체의 상

태 변수 값이 초기치에 상관없이 일정 시간 후에 같은 값을 가지도록 개체들 사이에 미리 약속된 통신 알고리즘 또는 상태 일치 알고리즘이 잘 작동하여야 한다. 이러한 다 개체 시스템의 상태 일치 문제를 풀기 위해 이웃하는 개체 간에 상태 변수 정보를 주고받는다는 가정 하에서 여러 연구가 수행되었다[2-6]. 하지만, 연구 대부분이 MAS를 이루는 개체의 동특성을 정확히 알고 있다고 가정하였다[2-6]. 그러나 실제 에이전트의 동특성은 모델 불확실성을 포함하고 있으므로 이런 상황을 다룰 수 있는 상태 일치 알고리즘의 설계가 필요하다. 이러한 불확실성을 포함하는 MAS를(이후에 uMAS라 칭함) 위한 상태 일치 알고리즘 설계 문제는 두 가지 경우를 생각할 수 있다. 개별 개체의 동특성이 불확실하지만 모두 동일한 경우와 불확실하고 모두 다른 경우가 그것들이다. uMAS를 구성하는 각 개체의 모델이 전부 다른 경우에는 고정된(static) 이득을 가진 상태 일치 알고리즘으로는 상태 일치를 달성할 수 없다. 이는 내부 모델 정리(internal model principle)에 의해서 이중 MAS에 대해서 상태 일치를 이루기 위해서는 각 개체의 모델이 다르더라도 각 개체가 공통된 내부 모델을 포함해야 한다는 원리 때문이다[13,14]. 따라서 uMAS를 이루는 개체가 전부 다르다면, 내부 모델의 부재로 인해 기존의 상태 제한 일치 알고리즘으로는 상태 일치를 이룰 수 없으므로 동적(dynamic) 일치 알고리즘을 제안하거나 달성하고자 하는 상태 일치 정의를 새롭게 적절히 수정해야 한다. 본 논문에서는 uMAS에 대해서 개체가 모두 동일하다는 가정하에서 상태 일치를 이루는 알고리즘을 설계하는 방법을 제안한다.

* 책임저자(Corresponding Author)

Manuscript received February 20, 2013 / revised March 10, 2013 / accepted March 15, 2013

윤문채: 고려대학교 전기전자전공공학과 석 · 박사 통합과정

(gkst41x@korea.ac.kr)

김정수: 서울과학기술대학교 전기정보공학과

(jungsu@seoultech.ac.kr)

백주훈: 광운대학교 로봇학부(backhoon@kw.ac.kr)

※ 이 연구는 서울과학기술대학교 교내 학술연구비 지원으로 수행되었음.

Copyright© ICROS 2013

이를 위해서 본 논문에서는 uMAS의 상태 일치 조건을 유도한다. 유도된 uMAS를 위한 상태 일치 조건에는 두 가지 형태의 불확실성이 나타난다. 하나는 라플라시안 행렬의 고유치들이 불확실성의 형태로 상태 일치 조건에 미치는 영향이고 다른 하나는 개체가 가진 모델 불확실성이다. 이러한 불확실성을 다루기 위하여 우선 라플라시안 행렬의 고유치들이 존재하는 영역을 근사하는 볼록 집합을 구하고 그 볼록 집합과 모델 불확실성이 곱해져서 형성하는 또 다른 불확실성을 표현하는 볼록 다각형을 구한다. 이러한 과정을 통해 uMAS의 상태 일치에 나타나는 불확실성을 하나의 볼록 다각형으로 나타낼 수 있음을 보인다. 최종적으로 하나의 볼록 다각형으로 나타낸 불확실성이 있는 uMAS의 상태 일치를 이루는 제어 이득을 구할 수 있게 하는 선형 행렬 부등식 조건을 유도한다. 모의 실험을 통해 제안하는 상태 일치 알고리즘이 uMAS의 상태일치를 성공적으로 달성함을 보인다.

II. 본론

1. MAS의 상태일치 문제 정의

이산 시간에서 협조 제어 대상이 되는 다개체 시스템(MAS: Multi-Agent System)은 아래와 같이 나타낸다.

$$x_i^+ = Ax_i + Bu_i, \quad x_i \in R^n, u_i \in R^m. \quad (1)$$

여기서 x_i^+ 와 x_i 는 각각 $x_i(k+1)$ 와 $x_i(k)$ 을 나타내고 전체 MAS는 동일한 선형 시스템 모델로 표현 가능한 N 개의 개체로 구성되어 있다고 가정한다. 여기서 개체의 시스템 행렬(A, B)는 제어가능(controllable)하다고 가정한다. 이렇게 정의된 MAS에 대해서 상태 일치는 아래와 같이 정의한다.

정의 1: MAS (1)에 대해서 아래 조건이 만족하면 상태 일치(state consensus)를 이루었다고 한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i(k) - x_j(k)) = 0, \quad \forall i, j \in N. \quad (2)$$

이 논문에서는 상태 일치 문제 해결을 위해 다음과 같은 형태의 상태 일치 알고리즘 u_i 를 고려한다[3,6,10].

$$u_i = K \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i). \quad (3)$$

여기서 제어 이득 K 는 모든 u_i 에 같은 값이 사용된다. 상수 a_{ij} 는 각 개체 사이의 연결 여부를 나타낸다. 즉 i 번째 개체와 j 번째 개체가 연결이 있으면 $a_{ij} = 1$ 이고 연결이 없으면 $a_{ij} = 0$ 이다. 결국, 협조 제어 문제란 상태일치 조건(2)가 만족하도록 제어 이득 K 를 설계하는 문제이다.

이제 각 개체 사이의 연결 상태(a_{ij})를 고려하여 전체 MAS의 동역학을 벡터 형식으로 표현하면 다음과 같다[5].

$$x^+ = [(I_N \otimes A) + (L \otimes BK)]x. \quad (4)$$

행렬 I_N 은 크기가 N 인 항등 행렬이고, $x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T$ 이다. 연산자 \otimes 는 크로네커 곱(Kronecker product)을 의미하며, L 은 주어진 다개체 시스템의 연결 상태를

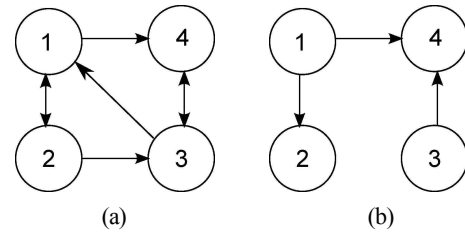


그림 1. 연결 상태 예. (a) 신장트리를 포함하는 경우, (b) 신장트리를 포함하지 않는 경우.

Fig. 1. Example of network.

나타내는 a_{ij} 로 구성된 라플라시안 행렬(Laplacian matrix)이며, L 은 다음과 같이 정의된다.

$$L = [l_{ij}] \in R^{N \times N} \quad (5)$$

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{if } i \neq j \\ \sum_{k=1}^N a_{ik} & \text{if } i = j \end{cases}$$

라플라시안 행렬은 MAS를 구성하는 각 개체의 연결 상태를 수학적으로 나타내는데 유용하다. 예를 들어 그림 1에 나타난 개체들을 고려해보자.

그림 1(a)와 (b)는 모두 4개의 개체를 가진 MAS이다. 이때 화살표는 개체간 정보 전달 방향을 뜻한다. 예를 들어 그림 1(a)의 1번 개체는 2번 개체와 3번 개체로부터 정보를 전달받으므로, 1(a)의 라플라시안 행렬(L_1)의 1행은 2열과 3열의 값이 -1이 된다. 또한, 1번 개체에 정보를 전달해주는 개체가 2개이므로, 1행 1열의 값은 2가 된다. 2번 개체의 경우, 1번 개체로부터 정보를 전달받으므로, 2행의 1열의 값이 -1이 되며, 정보를 전달해주는 개체가 1번 개체뿐이므로, 2행 2열의 값은 1이 된다. 이러한 방식으로 3번 개체에 대해 3행을, 4번 개체에 대해 4행을 정리하면, 수식 (6)의 L_1 과 같다. 1(b)번 그림에 대한 라플라시안 행렬은 L_2 이다.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

또한, 신장 트리란 원래 연결 상태 그래프의 부분 그래프이면서 어떤 한 개체에서 나머지 모든 개체에 정보가 도달 가능(reachable)한 트리를 말한다. 라플라시안 행렬의 이러한 정의에 따라 다음과 같은 수식이 만족한다.

$$L1_N = 0.$$

여기서 1_N 은 모든 요소가 1이고 크기가 N 인 벡터이다. 이 수식은 라플라시안이 0인 고유값을 반드시 하나를 가지며 0이 아닌 나머지 고유값들은 게쉬고린의 정리(Gershgorian theorem)에 의하여 모두 열린 우반 평면에 존재하게 된다 [11].

2. 이산 시간 다개체 시스템의 상태일치

이 장에서는 불확실성이 없는 경우에 대해서 앞서 설명한 협조 제어 이득 K 를 구할 수 있는 조건을 소개한다. 이를 위해 우선 반드시 필요한 가정을 언급한다.

가정 1: MAS의 연결 상태를 나타내는 그래프는 신장 트리(Spanning tree)를 포함한다.

그래프 이론 관점에서 협조 제어를 하기 위해서는 모든 개체에 정보 전달이 가능한 개체가 적어도 하나는 존재해야 하므로 상태 일치 문제에서 가정 1은 필수 불가결한 것이다. 다음으로, MAS의 협조 제어를 통해 상태 일치에 도달하기 위한 조건을 설명한다.

보조 정리 1 [5,12]: 가정 1을 만족하는 MAS (1)에 대해서

$$|A + \lambda_i(L)BK| < 1, \quad i = 2, \dots, N \quad (7)$$

을 만족하면 조건 (2)를 달성한다. 여기서 $\lambda_i(L)$ 은 행렬 L 의 i 번째 고유값을 나타내며 $\lambda_1(L) = 0$ 이기 때문에 $i = 2$ 부터 고려한다.

보조 정리 1의 조건에서 만약 $\lambda_i(L)$ 이 없다면 이는 일반적인 이산 시간 선형 시스템의 안정도 정리와 동일하다. 따라서 보조 정리 1은 MAS의 상태 일치 제어 이득 K 를 구하는 문제가 단일 개체의 강인 안정화(robust stabilization) 문제와 같다는 의미이다. 즉 이득 K 를 단일 개체의 DC 게인(DC gain)에 복소수 형태의 불확실성(uncertainty)이 있는 하나의 선형 시스템을 안정화하도록 설계하면 전체 MAS가 상태 일치를 이룬다. 이를 만족하는 이득 K 를 구하는 문제는 [2]에서 다룬 바와 같이, 선형 행렬 부등식(LMI)를 이용하여 구할 수 있다. 다음 보조 정리는 그 방법을 소개한다.

보조 정리 2 [4]: MAS (1)과 수식 (4)의 형태를 갖는 협조 제어 알고리즘을 고려한다. 라플라시안 행렬의 고유값을 $\lambda_i(L) = \sigma_i + j\omega_i$ ($i = 2, \dots, N$)이라 할 때 $0 < \chi < 1$ 에 대하여 다음 선형 행렬 부등식을 만족하는 대칭 양행렬 $Q \in R^{n \times n}$ 와 행렬 $Y \in R^{m \times n}$ 가 존재하면

$$\begin{bmatrix} \chi^2 Q & * & * & * \\ 0 & \chi^2 Q & * & * \\ AQ - \sigma_i BY & -\omega_i BY & Q & * \\ \omega_i BY & AQ - \sigma_i BY & 0 & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

이득 $K = YQ^{-1}$ 는 $|\lambda(A + \lambda_i(L)BK)| < \chi$ ($i = 2, \dots, N$)을 만족하게 하여 MAS (1)은 상태일치를 이룬다.

여기서 *는 대각선을 기준으로 대칭 위치에 있는 행렬의 전치 행렬을 의미한다. 보조 정리 2의 조건 (8)을 만족하도록 이득 K 를 결정하면 일치 조건 (7)을 만족하게 되어 상태 일치가 이루어지게 되는 것이다. 이러한 불확실성이 없는 MAS의 상태 일치 연구 결과를 기반으로 다음 절에서는 개체 동특성에 불확실성이 있을 때, 상태 일치 알고리즘을 설계하는 방안을 논의한다.

3. uMAS에 대한 상태일치 문제 정의와 일치 조건

이 장에서는 이 논문의 주된 관심인 불확실성을 포함한 상태일치 문제를 소개한다. uMAS은 아래와 같은 선형 시불변 시스템들로 이루어져 있다.

$$x_l^+ = \tilde{A}_l x_l + \tilde{B}_l u_l, \quad x_l \in R^n, u_l \in R^m, l = 1, \dots, N \quad (9)$$

여기서 N 은 uMAS를 이루는 개체 수이며 두 행렬 \tilde{A} 와 \tilde{B}

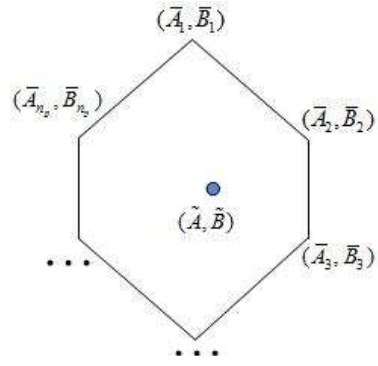


그림 2. (\tilde{A}, \tilde{B}) 가 속한 볼록다각형.

Fig. 2. Example of polytope containing (\tilde{A}, \tilde{B}) .

는 모르지만 아래 식 (10)과 같은 볼록 다각형 Ω 안에 속하는 미지의 상수 행렬이다.

$$\Omega = (\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{j=1}^{n_p} \epsilon_j (\bar{A}_j, \bar{B}_j) \mid \epsilon_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n_p} \epsilon_j = 1 \quad (10)$$

즉, 두 행렬 \tilde{A} 와 \tilde{B} 는 불확실하지만, 이들은 알고 있는 \bar{A}_j, \bar{B}_j 들의 볼록 조합(convex combination)으로 나타낼 수 있다고 가정한다. 이는 그림 2에 나타나 있다.

본 논문에서는 uMAS에 대해서 보조 정리 1에서 제안한 조건과 유사한 조건을 유도하여 그것을 바탕으로 상태 일치 알고리즘의 이득 K 를 계산하고자 한다. 다음 조건은 uMAS에 대한 상태 일치 조건도 MAS에 대한 그것과 동일하게 나타낼을 보인다.

보조 정리 3: 다음 부등식이 만족하면 uMAS에 대한 상태 일치가 달성된다.

$$|\tilde{A} + \lambda_i(L)\tilde{B}K| < 1, \quad i = 2, \dots, N. \quad (11)$$

이 보조 정리의 증명은 MAS의 상태 일치 조건 증명과 동일하기에 생략한다. 이후에는 이러한 uMAS의 상태 일치 조건을 이용해 제어 이득 K 를 구할 수 있음을 보인다. 조건 (11)을 고려하면 기존의 결과와 비슷하여 uMAS에 대한 상태 일치 문제가 기존의 연구와 차이가 없어 보이지만 이는 사실이 아니다. 조건 (11)을 통해 나타나는 uMAS의 상태 일치 조건에는 두 가지 형태의 불확실성이 존재한다. 개별 개체가 자신과 연결이 있는 이웃 개체의 정보(local information)만을 이용하기 때문에 개별 개체는 uMAS 전체의 연결 상태를 표현하는 라플라시안 행렬을 알 수 없으므로 $\lambda_i(L)$ 값들을 알지 못한다. 또한 조건 (11)을 고려한다면 미지의 \tilde{B} 와 $\lambda_i(L)$ 이 곱해져서 새로운 불확정한 항을 만들기 때문에 이 또한 제어 이득 설계를 어렵게 만든 요소이다. 이러한 사실로 인해 uMAS에 대한 상태 일치 알고리즘 설계는 기존의 연구와는 다르며 불확실성이 없는 MAS 연구에서는 존재하지 않는 또 다른 난관이 존재하고 이것을 적절히 분석하는 것이 본 연구의 핵심이다. 다음 절에서는 조건 (11)에 존재하는 두 가지 형태의 불확실성을 다루는 방법을 제안하고 이를 기반으로 uMAS의 상태 일치를 위한 제어 이득 K 를 구하는 방법을 제시한다.

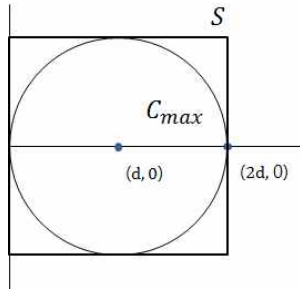


그림 3. $\lambda_i(L)$ 의 범위.

Fig. 3. Range of Laplacian matrix's eigenvalue.

4. 불확실성을 포함한 다개체 시스템의 상태일치

우선, $\lambda_i(L)$ 의 불확실성을 다루기 위하여, $\lambda_i(L)$ 이 속하는 볼록 집합을 구한다.

보조 정리 4: $\lambda_i(L)$ ($i = 2, \dots, N$)은 $conv(\pm jd, 2d \pm jd)$ 안에 속한다. 여기서 $conv(p)$ 는 꼭짓점 p 들로 이루어진 볼록 다각형을 의미하고 $d = N - 1$ 이다.

증명: [2]에서 보인 바와 같이 게쉬고린의 정리 (Gershgorian theorem)를 이용하면 L 의 모든 고윳값은 그림 3과 같은 복소 평면 위의 원(C_{max}) 안에 속한다. 이때 복소 평면 위의 점 $(0, d), (0, -d), (2d, d), (2d, -d)$ 를 꼭짓점으로 하는 볼록 집합 S 는 C_{max} 를 포함하므로, L 의 고윳값은 S 안에 포함된다. □

이후 논의를 위해 $\theta_1 := jd, \theta_2 := -jd, \theta_3 := 2d + jd, \theta_4 := 2d - jd$ 라고 표기한다. 여기서 θ_1 과 θ_2 그리고 θ_3 과 θ_4 는 각각 켈레복소수 관계임을 주목하자.

이제 또 다른 불확실성에 해당하는 복소수 $\lambda_i(L)$ 과 \tilde{B} 가 곱해져서 생기는 항 $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 을 분석한다. 이를 위해 라플라시안 행렬의 고윳값 $\lambda_i(L)$ 이 볼록 집합 S 안에 포함되고 모델 불확실성을 나타내는 식 (10)에 의해 시스템 행렬의 (\tilde{A}, \tilde{B}) 도 볼록 다각형 Ω 에 포함된다는 사실에 주목한다. 따라서 두 볼록 다각형 S 와 Ω 에 포함된 원소들을 곱해서 얻는 새로운 집합이 어떤 형태로 표현되는지 조사해야 한다. 이를 위하여 주어진 볼록 다각형에 속한 임의의 원소와 그 집합의 꼭짓점과의 관계를 규명하는 대푯값의 정리가 유용하다.

보조 정리 5 (대푯값의 정리): [15] 임의의 볼록 다각형 M 에 대해, 임의의 $x \in M$ 가

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1$$

로 표현되면, x_1, x_2, \dots, x_n 은 M 의 꼭짓점이며, 그 역도 성립한다.

다음 정리는 이 대푯값의 정리를 이용하여 집합 S 와 Ω 가 곱해져서 생기는 새로운 집합 또한 꼭짓점 개수가 유한한 볼록 집합이 됨을 보인다.

정리 1: 꼭짓점의 개수가 유한한 두 볼록 집합 S_1 과 S_2 의 원소의 곱이 가능할 때, 그 원소들의 곱이 만드는 집합 M 또한, 꼭짓점의 개수가 유한한 볼록 집합이다.

증명¹⁾: 집합 S_1 과 S_2 가 볼록 집합이므로 임의의 $x \in S_1$ 과 $y \in S_2$ 에 대해, 대푯값 정리에 따라 아래 식이 성립한다.

$$x = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i x_i \quad \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i = 1, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1,$$

$$y = \sum_{i=1}^{n_2} \mu_i y_i \quad \sum_{i=1}^{n_2} \mu_i = 1, \quad 0 \leq \mu_i \leq 1.$$

여기서 x_i 는 S_1 의 i 번째 꼭짓점이고 y_i 는 S_2 의 i 번째 꼭짓점이다. 또한, 일반성을 잃지 않고, $n_2 > n_1$ 이라 가정할 수 있다. 이 때, 어떤 $z := xy$ 가 형성하는 집합이 유한한 꼭짓점의 볼록 조합(convex combination)으로 표현됨을 증명한다. 즉 그 집합을 M 이라 하고 그것이 가진 꼭짓점의 개수가 n_s 라면 임의의 $z \in M$ 를 다음과 같이 표현할 수 있는 꼭짓점 z_k 와 계수 η_k 가 존재함을 보인다.

$$z = \sum_{k=1}^{n_s} \eta_k z_k, \quad \sum_{k=1}^{n_s} \eta_k = 1.$$

이제 k 를 $i \times (n_2 - 1) + j$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n_1, j = 1, 2, 3, \dots, n_2$)라 정의하자. 그리고 k 를 n_2 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $Q(k)$ 와 $R(k)$ 이라 하자. 그러면 z 를 아래와 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$z = xy = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i x_i \left(\sum_{j=1}^{n_2} \mu_j y_j \right) = \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \lambda_i \mu_j x_i y_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_1 \mu_j x_1 y_j + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_2 \mu_j x_2 y_j + \dots + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{n_1} \mu_j x_{n_1} y_j$$

$$= \sum_{k=1}^{n_2} \lambda_{Q(k)+1} \mu_{R(k)+1} x_{Q(k)+1} y_{R(k)+1}$$

$$+ \sum_{k=n_2+1}^{2n_2} \lambda_{Q(k)+1} \mu_{R(k)+1} x_{Q(k)+1} y_{R(k)+1}$$

$$+ \dots + \sum_{k=n_1(n_2-1)}^{n_1 n_2} \lambda_{Q(k)+1} \mu_{R(k)+1} x_{Q(k)+1} y_{R(k)+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1 n_2} \lambda_{Q(k)+1} \mu_{R(k)+1} x_{Q(k)+1} y_{R(k)+1}$$

이에 대해 $\eta_k = \lambda_{Q(k)+1} \mu_{R(k)+1}$ 로 정의하고, $z_k = x_{Q(k)+1} y_{R(k)+1}$ 로 정의하면, 위 식은 아래와 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$z = \sum_{k=1}^{n_1 n_2} \eta_k z_k$$

또한, 이 경우 아래 식이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n_1 n_2} \eta_k = \sum_{k=1}^{n_2} \lambda_1 \mu_k + \sum_{k=n_2+1}^{2n_2} \lambda_2 \mu_{k-n_2}$$

$$+ \dots + \sum_{k=n_2(n_1-1)+1}^{n_1 n_2} \lambda_{n_1} \mu_{k-(n_1-1)n_2}$$

¹⁾ 직관적이며 보이는 정리 1의 증명이 소개된 문헌을 찾지 못하여 본 논문에서 제시하였음.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{r=1}^{n_2} \lambda_1 \mu_r + \sum_{r=1}^{n_2} \lambda_2 \mu_r + \dots + \sum_{r=1}^{n_2} \lambda_n \mu_r \\
 &= \left(\sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n_2} \mu_j \right) = 1
 \end{aligned}$$

다시 말해, $\sum_{k=1}^{n_1 n_2} \eta_k = 1$ ($\eta_k \geq 0$)이 성립하므로 집합 M 은 $z_k := y_i x_j$ 들의 블록 조합으로 표현할 수 있다. 따라서 M 은 블록 다각형이다. 또한, 대푯값 정리에 따라, 임의의 $z \in M$ 를 $z_k = y_i x_j$ 로 표현할 수 있으며 개수가 유한하므로, z_k 는 블록 집합 M 의 꼭짓점이며 M 는 블록 다각형이다. □

정리 1에 따라, $\lambda_i(L)$ 이 속하는 블록 집합과 \tilde{B} 가 속하는 블록 집합의 곱 역시 블록 집합을 이룬다는 것을 확인할 수 있다. 다음 보조 정리는 조건 (11)을 만족하는 이득 K 를 구하기 위하여 조건에서 \tilde{A} 와 \tilde{B} 를 고려하는 대신에 그것을 둘러싸는 블록 집합의 모든 꼭짓점을 고려할 수 있음을 의미한다.

보조 정리 6 [16]: $A \in \text{conv}(A_1, A_2, \dots, A_{n_p})$ 일 때, 시스템 $x^+ = A_i x$ ($i = 1, 2, \dots, n_p$)가 안정하면 $x^+ = Ax$ 역시 안정하다.

보조 정리 6에 의해서 다음 조건이 만족하면 uMAS를 위한 일치 조건 (11)이 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^{n_p} \epsilon_i \bar{A}_i + \sum_{k=1}^4 \alpha_k \theta_k \epsilon_i \bar{B}_i K \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^{n_p} \epsilon_i [\bar{A}_i + \sum_{k=1}^4 \alpha_k \theta_k \bar{B}_i K] \right| < 1, \quad i = 2, \dots, n_p \quad (12)
 \end{aligned}$$

여기서 $\sum_{k=1}^4 \alpha_k = 1$, $\sum_{i=1}^{n_p} \epsilon_i = 1$ 이고 θ_i 는 보조 정리 4에 정의되어 있다. 조건 (11)과 비교하여 달라진 점은 불확실한 \tilde{A} 와 \tilde{B} 에 대신에 그들의 꼭짓점 \bar{A}_i 와 \bar{B}_i 를 $\lambda_i(L)$ 대신에 그것을 둘러싸는 블록 다각형 S 의 네 꼭짓점 θ_i 를 고려한 것이다. 위 부등식에서 고정된 A_i 에 대하여 $\theta_k \bar{B}_i$ 가 4개의 꼭짓점을 생성하므로 부등식 (12)를 확인하기 위하여 $4n_p$ 개의 부등식을 조사하면 된다.

조건 (12)를 만족하는 이득 K 를 구하는 데 있어서 n_p 가 크다면 고려해야 하는 부등식의 숫자 $4n_p$ 가 커지고 이는 이득 K 의 존재성을 나타내는 부등식 (12)의 가해성(feasibility)을 악화시킬 수 있으므로 부등식의 숫자를 줄이는 시도가 필요하다. 아래 정리 2는 고려해야 하는 꼭짓점의 개수를 줄이는 데 이용된다.

정리 2: 제어 가능한 시스템 $\dot{x} = [A + (\sigma + j\omega)BK]x$ 가 안정하면, $\dot{x} = [A + (\sigma - j\omega)BK]x$ 도 안정하다.

증명: 간략한 표기를 위해 본 논문에서는 입력이 하나인 경우에 대해서 증명한다. $\mu = \sigma + j\omega$ 이라 하자. 그러면 $(\sigma + j\omega)BK = \mu BK$ 가 성립한다. 여기서 시스템이 제어 가능하므로, 좌표 변환을 통해서 아래 시스템으로 변형할

수 있다.

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\
 \hat{B} &= T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \hat{K} &= KT = [k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}]
 \end{aligned}$$

이에 따라 전체 시스템은 아래와 같은 모양을 가진다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}} &= (\hat{A} + \mu \hat{B} \hat{K}) \hat{x} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 - \mu b k_0 & -a_1 - \mu b k_1 & -a_2 - \mu b k_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_3 - \mu b k_3 & \dots & -a_{n-1} - \mu b k_{n-1} \end{bmatrix} \hat{x}
 \end{aligned}$$

따라서 행렬 $(\hat{A} + \mu \hat{B} \hat{K})$ 의 고유값은 다음과 같은 이 시스템의 특성 방정식을 통해 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \lambda^n + (a_{n-1} + \mu b k_{n-1}) \lambda^{n-1} + (a_{n-2} + \mu b k_{n-2}) \lambda^{n-2} \\
 + \dots + (a_0 + \mu b k_0) = 0 \quad (13)
 \end{aligned}$$

시스템이 안정하다고 가정하였고 고유값은 좌표 변환에 대하여 불변이므로 이 방정식의 해 λ_i 에 대해서 $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, \dots, n$)이 성립한다. 식 (13) 전체의 켤레 복소수는 a_k, b, k_k 가 모두 실수라는 사실을 이용하면 아래 식 (14)와 같다.

$$\begin{aligned}
 \overline{\lambda^n + (a_{n-1} + \bar{\mu} b k_{n-1}) \lambda^{n-1} + (a_{n-2} + \bar{\mu} b k_{n-2}) \lambda^{n-2}} \\
 + \dots + (a_0 + \bar{\mu} b k_0) = 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

이 식은 시스템 $\dot{\hat{x}} = (\hat{A} + \bar{\mu} \hat{B} \hat{K}) \hat{x}$ 의 특성 방정식이므로 식 (14)의 해 $\bar{\lambda}_i$ 는 행렬 $(\hat{A} + \bar{\mu} \hat{B} \hat{K})$ 의 고유값이다. 켤레 복소수의 정의에 따라 $|\lambda_i| = |\bar{\lambda}_i| < 1$ 이 성립하므로, $\dot{\hat{x}} = (\hat{A} + \bar{\mu} \hat{B} \hat{K}) \hat{x}$ 역시 안정한 시스템이다. □

정리 2와 부등식 (12)를 고려하면 θ_1 과 θ_3 에 대해서만 부등식 (12)의 만족 여부를 확인하면 된다. 다음으로, 선형 행렬 부등식을 이용하여 uMAS를 위한 일치 조건 (12)를 만족시키는 제어 이득 K 를 찾는 방법을 제시한다.

정리 3: uMAS (7)에 대해 가정 1이 만족한다고 하자. 아래 식 (15)를 만족하는 대칭 양행렬 $Q \in R^{n \times n}$ 와 행렬 $Y \in R^{m \times n}$ 가 존재하면 제어 이득 $K = YQ^{-1}$ 은 불확실성을 포함하는 uMAS가 상태일치에 도달하도록 한다.

$$\begin{bmatrix} \chi^2 Q & * & * & * \\ 0 & \chi^2 Q & * & * \\ \bar{A}_i Q - 2(N-1)\bar{B}_i Y & -(N-1)\bar{B}_i Y & Q & * \\ (N-1)\bar{B}_i Y & \bar{A}_i Q - 2(N-1)\bar{B}_i Y & 0 & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (15-1)$$

$$\begin{bmatrix} \chi^2 Q & * & * & * \\ 0 & \chi^2 Q & * & * \\ \bar{A}_i Q & -(N-1)\bar{B}_i Y & Q & * \\ (N-1)\bar{B}_i Y & \bar{A}_i Q & 0 & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (15-2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_p$$

여기서 기호 *는 대각선을 기준으로 대칭 위치에 있는 행렬의 전치 행렬을 의미한다.

증명: 보조 정리 6과 조건 (12)에 의해

$\sum_{i=1}^{n_p} \epsilon_i [\bar{A}_i + \sum_{k=1}^4 \alpha_k \theta_k \bar{B}_i K]$ 의 모든 꼭짓점을 안정화시키는 K 를 찾으면, 그 K 는 불확실성을 포함하는 uMAS (7)이 상태 일치가 되도록 한다. 이때 $\sum_{i=1}^{n_p} \epsilon_i [\bar{A}_i + \sum_{k=1}^4 \alpha_k \theta_k \bar{B}_i K]$ 의 꼭짓점은 보조 정리 6과 정리 1에 따라, 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & \bar{A}_1 + \theta_1 \bar{B}_1 K, \bar{A}_1 + \theta_2 \bar{B}_1 K, \bar{A}_1 + \theta_3 \bar{B}_1 K, \bar{A}_1 + \theta_4 \bar{B}_1 K, \\ & \bar{A}_2 + \theta_1 \bar{B}_2 K, \bar{A}_2 + \theta_2 \bar{B}_2 K, \bar{A}_2 + \theta_3 \bar{B}_2 K, \bar{A}_2 + \theta_4 \bar{B}_2 K, \\ & \vdots, \\ & \bar{A}_{n_p} + \theta_1 \bar{B}_{n_p} K, \bar{A}_{n_p} + \theta_2 \bar{B}_{n_p} K, \bar{A}_{n_p} + \theta_3 \bar{B}_{n_p} K, \bar{A}_{n_p} + \theta_4 \bar{B}_{n_p} K. \end{aligned}$$

그런데 정리 2에 따라, 임의의 $1 \leq i \leq n_p$ 에 대해서, $\bar{A}_i + \theta_1 \bar{B}_i K$ 가 안정하면, $\bar{A}_i + \theta_2 \bar{B}_i K$ 도 안정하고, $\bar{A}_i + \theta_3 \bar{B}_i K$ 가 안정하면, $\bar{A}_i + \theta_4 \bar{B}_i K$ 도 안정하다. 결과적으로 아래 식 (16)에 정리된 총 $2 \times n_p$ 개의 시스템을 안정화시키는 K 는 주어진 다개체 시스템이 상태 일치를 이루게 한다.

$$\dot{x} = \bar{A}_l + \theta_1 \bar{B}_l K \quad l = 1, 2, \dots, n_p \quad (16-1)$$

$$\dot{x} = \bar{A}_l + \theta_3 \bar{B}_l K \quad l = 1, 2, \dots, n_p \quad (16-2)$$

여기서 $\theta_1 := jd$, $\theta_3 := 2d + jd$ 이고 $d = N - 1$ 이다. 마지막으로 보조 정리 2에 의해, 아래 식 (17)을 만족하는 대칭 양행렬 $Q \in R^{n \times n}$ 와 행렬 $Y \in R^{m \times n}$ 가 존재하면 제어 이득 $K = YQ^{-1}$ 은 불확실성을 포함하는 uMAS가 상태 일치에 도달하도록 한다.

$$\begin{bmatrix} \chi^2 Q & * & * & * \\ 0 & \chi^2 Q & * & * \\ \bar{A}_i Q - 2(N-1)\bar{B}_i Y & -(N-1)\bar{B}_i Y & Q & * \\ (N-1)\bar{B}_i Y & \bar{A}_i Q - 2(N-1)\bar{B}_i Y & 0 & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (17-1)$$

$$\begin{bmatrix} \chi^2 Q & * & * & * \\ 0 & \chi^2 Q & * & * \\ \bar{A}_i Q & -(N-1)\bar{B}_i Y & Q & * \\ (N-1)\bar{B}_i Y & \bar{A}_i Q & 0 & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (17-2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_p$$

□

결과적으로, 불확실성을 포함하는 uMAS (7)이 상태 일치를 이루도록 하는 제어 이득 K 를 찾는 문제는 $\lambda(L) B_i$ 를 포함하는 집합을 볼록 다각형으로 표현하고, 이 집합의 꼭짓점에 해당하는 시스템을 모두 안정화시키는 문제로 귀결

되었다. 정리 3은 이러한 과정을 선형 행렬 부등식을 이용하여 구할 수 있음을 보여준다.

III. 모의실험

모의실험은 총 2가지를 진행하였으며, 두 모의실험 모두 총 4대의 개체와 같은 연결을 이용하였으나, 시스템 행렬은 서로 다른 경우에 대해 모의실험을 진행하였다.

먼저, 첫 번째 모의실험의 조건은 아래와 같다.

$$x_l^+ = \tilde{A}x_l + \tilde{B}u, \quad l = 1, 2, 3, 4$$

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \text{conv}((\bar{A}_1, \bar{B}_1), (\bar{A}_2, \bar{B}_2))$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

이때, 각 개체의 동특성 \tilde{A} 는 $\text{conv}((\bar{A}_1, \bar{B}_1), (\bar{A}_2, \bar{B}_2))$ 사이의 임의의 값을 선택하였으며, 각 개체 사이의 연결은 그림 (1)-a와 같다고 하자. 그러면 라플라시안 행렬은 (6)의 L_1 과 같고, 이는 신장 트리를 포함한다. 이 논문에서의 주요 접근법 중 하나는 미지의 $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 를 포함하는 볼록 다각형을 구하여 미지항 대신에 그것을 고려한 것이다. 이 과정에서 볼록 다각형이 보수적으로 계산될 수 있는데 이 예에서 실제 시스템의 $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 와 정리 3을 사용하기 위해 만든 $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 을 포함하는 볼록 다각형의 관계는 그림 4에 나타나 있다.

이때, 왼쪽 그림은 $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 의 1행, 오른쪽 그림은 2행을 나타낸다. 또한, 가로축은 실수, 세로축은 허수를 나타낸다. 검은 원이 실제 $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 의 값이며, 푸른 사각형이 정리 3을 사용하여 만든 $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 의 범위이다.

이제, $\chi = 0.65$ 로 하고, 부등식 (17)을 이용하여 K 를 구하면, $K = [0.0121 \ 0.1017]$ 을 얻는다. 이후, 각 개체에 (3)과 같은 입력을 인가하면 불확실성이 있음에도 불구하고 그림 5에 보인 바와 같이 성공적으로 상태일치를 달성함을 알 수 있다.

두 번째 모의실험의 조건은 아래와 같다.

$$x_l^+ = \tilde{A}x_l + \tilde{B}u, \quad l = 1, 2, 3, 4$$

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \text{conv}((\bar{A}_1, \bar{B}_1), (\bar{A}_2, \bar{B}_2))$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

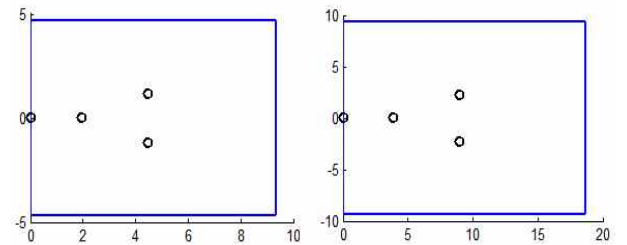


그림 4. $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 와 그를 포함하는 집합.

Fig. 4. $\lambda_i(L)\tilde{B}$ and convex set contained.

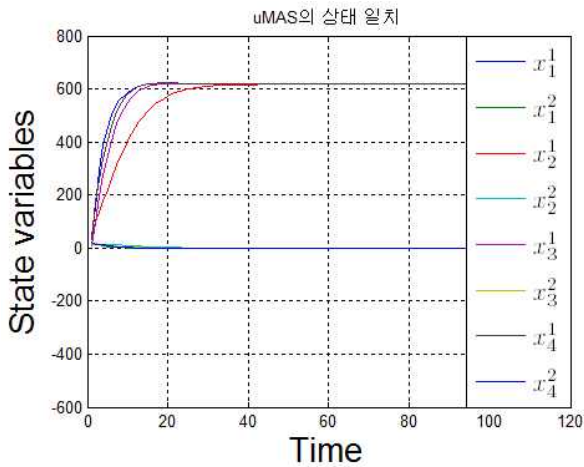


그림 5. 상태일치를 이룬 개체들.

Fig. 5. State consensus of Agents.

고정된 값으로 수렴하지 않는 시스템의 예를 들기 위하여, 각 개체의 \tilde{A} , \tilde{B} 는 아래와 같이 고정하였다.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

각 개체의 연결과 라플라시안 행렬은 그림 (1)-a와 (6)의 L_1 과 같다. 또한, $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 와 정리 3을 사용하기 위해 구한 $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 를 포함하는 볼록 다각형은 그림 6에 나타나 있다.

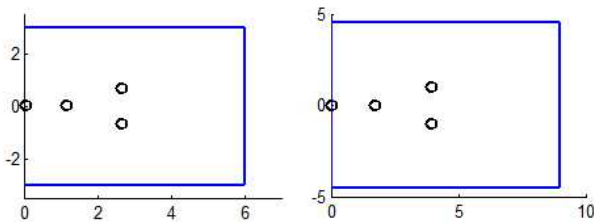


그림 6. $\lambda_i(L)\tilde{B}$ 와 그를 포함하는 집합.

Fig. 6. $\lambda_i(L)\tilde{B}$ and convex set contained.

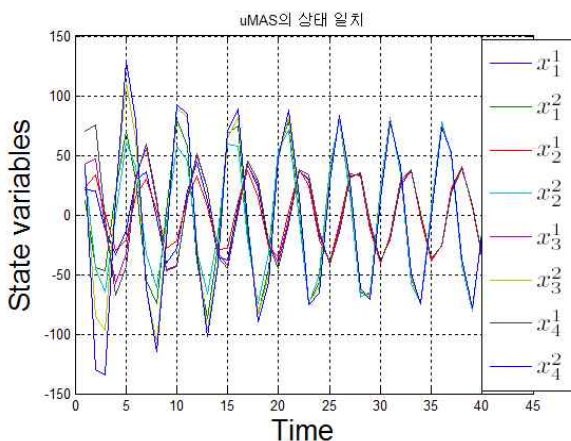


그림 7. 상태일치를 이룬 개체들.

Fig. 7. State consensus of agents.

이제, $\chi = 0.65$ 로 하고, 부등식 (17)을 이용하여 K 를 구하면, $K = [-0.0227 \ 0.0569]$ 을 얻는다. 이후, 각 개체에 (3)과 같은 입력을 인가하면, 상태 변수들의 값이 진동함에도 불구하고, 그림 7에 보인 바와 같이 성공적으로 상태일치를 달성함을 알 수 있다.

IV. 결론

이 논문에서 불확실성을 포함한 이산시간 다개체 시스템의 상태 일치 문제를 제어 이득을 선형 행렬 부등식을 이용하여 구하는 방법을 제안하였다.

향후에는 이 논문에서 사용한 선형 행렬 부등식 해의 존재 가능성을 더 크게 하기 위하여 라플라시안 행렬의 고유값이 속하는 볼록집합을 더 작게 축소하는 방향의 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465-1476, 2004.
- [2] P. Wieland, J.-S. Kim, and F. Allgower, "On topology and dynamics of consensus among linear high-order agents," *International Journal of Systems Science*, vol. 42, no. 10, pp. 1831-1842, 2011.
- [3] J. Wang, D. Cheng, and X. Hu, "Consensus of multi-agent linear dynamic systems," *Asian Journal of Control*, vol. 10, pp. 144-155, 2008.
- [4] J. Lee and J.-S. Kim, "Discrete time consensus problem using optimal control," *ICROS-SICE International Joint Conference*, pp. 262-266, 2009.
- [5] S. E. Tuna, "LQR-based coupling gain for synchronization of linear systems," Arxiv:0801.3390, 2008.
- [6] J. Lee and J.-S. Kim, "Disc margins of the discrete-time LQR and its application to consensus problem," *International Journal of Systems Science*, vol. 43, no. 10, pp. 1891-1900, 2012.
- [7] J. H. Seo, H. Shim, and J. Back, "Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach," *IEEE Transactions on Automatica Control*, vol. 11, pp. 2659-2664, 2009.
- [8] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S. J. Xu, "Full-order observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 3, pp. 606-609, 1994.
- [9] P. Wieland and F. Allgower, "On consensus among identical linear systems using input-decoupled functional observers," *Proc. of Amer. Control Conference*, pp. 1641-1646, 2010.
- [10] P. Wieland, "From static to dynamic couplings in consensus and synchronization among identical and non-identical systems," Ph.D. Thesis, University of

Stuttgart, 2010.

- [11] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, 4th Ed., Springer-Verlag, 2010.
- [12] J. Lee, "Discrete-time consensus algorithms design using optimal control," Master Thesis, Seoul National University, 2010.
- [13] H. Kim, H. Shim, and J. Seo, "Output consensus of heterogeneous uncertain linear multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 1, pp. 200-206, 2011.
- [14] P. Wieland, R. Sepulchre, and F. Allgower, "An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization," *Automatica*, vol. 47, pp. 1068-1074, 2011.
- [15] M. Bazaraa, H. Sherali, and C. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2nd Ed., WILEY, 1993.
- [16] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [17] J. Kim, H. Kim, H. Shim, and J. Back, "Output consensus of non-identical and stabilizable linear systems having the same transfer matrix," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 17 no. 9, pp. 851-953, 2011.
- [18] J. Kim, J. Yang, H. Shim, and J.-S. Kim, "Synchronization of linear time-varying multi-agent systems with heterogeneous time-varying disturbances using integral controller," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18 no. 7, pp. 622-626, 2012.



윤 문 재

2012년 고려대학교 전기전자전파공학부 학사. 2012년~현재 고려대학교 전기전자전파공학과 석·박사 통합과정 재학중. 관심분야는 멀티 에이전트 시스템, 파라미터 추정, 적응 시스템 등.



김 정 수

1998년 고려대학교 전기공학과 학사. 2000년, 2005년 동 대학원 석사, 박사. 2005년~2008년 서울대학교 자동화기술 공동 연구소, 독일 Stuttgart대학, 영국 Leicester대학 박사후 연구원. 현재 서울과학기술대학교 전기정보공학과 조교수. 관심 분야는 비선형 제어, 모델예측제어, 최적화 응용, 멀티에이전트 시스템 등.



백 주 훈

1997년 서울대학교 기계설계학과 학사. 1999년 동 대학원 석사. 2004년 동 대학교 전기공학부 박사. 2005년~2006년 영국 Imperial College 박사후 연구원. 2007년~2008년 고려대학교 기계공학부 연구교수. 2008년~현재 광운대학교 로봇학부 부교수. 관심분야는 다개체 시스템, 풍력 발전 제어 시스템, 비선형제어 등.