Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 18, No. 12, December 2013
www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2013.18.12.075

외판원 문제의 다항시간 알고리즘

이 상 운*

A Polynomial Time Algorithm of a Traveling Salesman Problem

Sang-Un, Lee *

요 약

본 논문은 NP-완전으로 다항시간 알고리즘이 존재하지 않는 대규모 외판원 문제의 최적 해를 $O(n^2)$의 다항시간으로 구하는 알고리즘을 제안하였다. 대규모 외판원 문제에서 가장 큰 문제는 처리될 데이터가 $n \times n$으로 n이 커질수록 기하급수적으로 증가한다. 본 논문에서는 먼저, 데이터의 양을 약 $n/2$의 크기로 축소시킨다. 다음으로 임의의 정점에서 시작하여 양방향으로 경로를 탐색하는 방법을 적용하였다. 제안된 알고리즘을 26개의 유럽 도시들을 방문하는 TSP-1과 46개 미국 도시들을 방문하는 TSP-2에 적용한 결과 모두 최적 해를 $O(n^2)$ 수행 복잡도로 빠르게 구하는데 성공하였다. 따라서 제안된 알고리즘은 TSP의 일반화된 알고리즘으로 적용할 수 있을 것이다.

▸ Keywords : 외판원 문제, 전수 탐색 방법, 간선 교환 방법, 데이터 축소

Abstract

This paper proposes a $O(n^2)$ polynomial time algorithm to obtain optimal solution for Traveling Salesman problem that is a NP-complete because polynomial time algorithm has been not known yet. The biggest problem in a large-scale Traveling Salesman problem is the fact that the amount of data to be processed is $n \times n$, and thus as n increases, the data increases by multifold. Therefore, this paper proposes a methodology by which the data amount is first reduced to approximately $n/2$. Then, it seeks a bi-directional route at a random point. The proposed algorithm has proved to be successful in obtaining the optimal solutions with $O(n^2)$ time complexity when applied to TSP-1 with 26 European cities and TSP-2 with 46 cities of the USA. It could therefore be applied as a generalized algorithm for TSP.

▸ Keywords : CTraveling Salesman Problem, Exhaustive Search Method, Edge Exchange Method, Data Reduction

•제1저자 : 이상운
•투고일 : 2013. 09. 03, 심사일 : 2013. 09. 21, 게재확정일 : 2013. 10. 05.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

I. 서 론

본 논문에서는 외판원 문제 (Traveling Salesman Problem, TSP)의 최적 해를 찾는 알고리즘을 제안한다. TSP는 n개의 도시가 있는 경우, 한 도시 (노드)에서 출발하여 $n-1$개의 도시를 단지 한번 씩 방문하고 출발 도시로 다시 되돌아오는 해밀턴 사이클 (Hamiltonian Cycle, HC) 문제로 경로 길이의 합이 최소가 되는 조건을 만족시켜야 한다[1].

TSP는 계산수학 (Computational Mathematics) 분야에서 가장 집중적으로 연구 중인 문제로 전수 탐색 방법 이외에는 효율적인 해법이 아직 알려지지 않은 NP-완전 (Non-deterministic polynomial complete) 난제로 남아 있다[2-3].

TSP의 해법 (Solution Method)은 정확한 방법 (Exact Method)과 근사 방법 (Approximate Method)으로 분류된다[1,4].

정확한 방법은 최적 해 (Optimal Solution)를 얻음을 보장하기 위해 n개의 도시를 연결하는 도로 (간선)에 대해 전수 탐색 (Exhaustive Search)을 수행해야 한다. 전수 탐색은 대칭행렬 (Symmetric Matrix)에 대해 $(n-1)!/2$회 수행된다[5]. 결국, n이 크면 컴퓨터를 활용하여도 원하는 시간에 해답을 얻지 못한다.

현실세계의 많은 문제들은 정확한 방법으로 해결하기에는 너무 큰 경향이 있으며, 일반적으로 빠른 결론을 요구한다. 따라서 좋은 발견적 방법을 적용하면 양질의 해법을 찾을 수 있으며, 매우 빠른 장점을 갖고 있다. 반면에, 근사 방법은 발견적 방법 (Heuristic Algorithms or Heuristics)으로 최적 해를 찾음을 보장하지는 못하지만 적당히 좋은 (Reasonable Good) 해법을 빠르게 찾기 위해 일반적으로 사용된다[4].

발견적 방법은 초기 해를 구하는 구성 (Constructive) 단계, 초기 해를 개선하는 지역 개선 (Local Improvement) 단계, 지역적으로 최적화된 경로를 개선하는 확장 (Extensions) 단계로 수행된다. 구성단계에 적용되는 알고리즘에는 최단 인접 이웃 탐색 (Nearest Neighbor Search, NN), 양측 최단인접 이웃 탐색 (Double-sided NN), 다중파편 (Multiple Fragment, MF), 삽입 탐색 (Insertion Search, IS) 등이 있다. 지역개선단계에 적용되는 알고리즘에는 간선 교환 (k-edge Exchange, k-opt)이 있으며, 확장단계에 적용되는 알고리즘에는 Tabu 탐색 알고리즘, 모의실험 담금질 (Simulated Annealing)과 유전자 알고리즘 (Genetic Algorithm), 신경망 (Neural Networks), 진화 알고리즘 (Evolutionary Algorithms), 변종 NN (Variable Neighborhood Search, VNN), 개미집단 최적화 (Ant Colony Optimization) 등 다양한 방법들이 있다[4].

본 논문은 각 정점의 최소 인접 정점 2개씩을 이웃으로 하여, 에르되시 수 (Erdös number)가 2인 탐색 범위에서 최단경로를 양방향으로 탐색하는 발견적 방법으로 TSP의 최적해를 $O(n^2)$의 다항시간으로 구할 수 있는 알고리즘을 제안한다. 제안되는 알고리즘은 대규모 TSP의 처리될 데이터 양을 약 $n/2$로 축소시키고 각 정점의 $1^{st}Min$과 $2^{nd}Min$만을 대상으로 양방향 최단 경로를 탐색하여 선형시간 $O(n^2)$으로 최적해를 도출하는 방법이다.

2장에서는 대규모 TSP에서 최적 해를 도출할 경우 발생되는 문제를 고찰한다. 3장에서는 알고리즘을 제안하고, 4장에서는 $n=26$과 $n=42$인 실제 데이터에 적용하여 제안된 알고리즘의 적합성을 검증한다.

II. 관련 연구와 문제점

TSP에서 다루는 데이터는 대칭행렬 (Symmetric Matrix)을 대상으로 한다. 즉, 두 도시 i,j 간의 거리 $w\{i,j\}$는 $w\{j,i\}$와 같으며 양방향 또는 무방향이다.

TSP의 초기 해법을 얻는 일반적인 방법에는 NN, DNN, MF, IS 등이 있다. 이들 방법은 모두 $n\times n$의 거리계산 데이터를 활용한다. 만약, $n=100$인 대칭행렬인 경우, 계산될 거리 데이터 개수는 5,000개이다. 따라서 대규모의 TSP에 대해서는 초기 해를 구하기 위해 $n\times n$의 모든 노드들 간의 거리를 계산하는데 많은 시간이 소요되며, 모든 노드들 간의 거리가 TSP의 최적 해 간선들로 선택되지 않아 최적 해를 구하는데 불필요한 시간만 소요된다. 결국, 대규모의 TSP를 빠르게 해결하기 위해서는 필요한 데이터의 양을 현격히 축소시킬 필요가 있다.

만약, 데이터를 임의로 축소시킬 경우 TSP의 초기 해법을 얻는 NN, DNN 등은 하나의 경로를 형성하는데 실패할 수 있는 문제가 발생할 수 있다. 따라서 이러한 문제를 해결할 수 있도록 데이터 축소 양을 결정하는 방법을 연구해야 한다.

초기 해에 대해 최적 해를 얻는 방법은 지역개선과 확장 등 많은 방법이 제시되어 있다. 그러나 적용하기에 가장 쉬운 방법이 지역개선 방법이다. 지역 개선 알고리즘인 k-opt는 Stougie[6]와 Chuin[7] 등이 제안하고 있으며, $k=1,2,3,4,\cdots$로 무한히 확장 가능하다. 그러나 3-opt와 4-opt를 적용하려면 2-opt에 비해 알고리즘 수행횟수가 기하급수적으로 증가한다. 결국, 실제적으로는 2-opt와 3-opt들이 주종을 이루고 있다. Lee[8]는 확장된 $k-$opt를 적용하여 TSP를 풀고자 하였다.

3장에서는 축소된 데이터들을 대상으로 각 정점의 $1^{st}Min$과 $2^{nd}Min$만을 대상으로 양방향 최적 해를 도출하는 방법을 제안하여, 대규모 TSP를 해결할 수 있는 실용적인 알고리즘으로 활용하고자 한다.

III. 대규모 TSP의 빠른 최적 해 도출 알고리즘

본 장에서는 먼저, 데이터를 축소시키고 TSP를 양방향으로 빠르게 찾는 알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘은 먼저, 식 (1)을 적용하여 데이터를 약 절반으로 감소시켰다.

$$x \le (\frac{Min+Max}{2}) \quad (1)$$

두 번째로 각 정점에서 $1^{st}Min$과 $2^{nd}Min$의 2개 간선을 선택한다. 왜냐하면 TSP는 해밀턴 사이클로 한 정점의 간선은 2개가 되기 때문이다. 각 정점에서 선택된 $1^{st}Min$과 $2^{nd}Min$을 대상으로 양 방향으로 최단경로를 결정하였다.

1. 각 정점 v의 거리 값에서 하위 50%만 선택.
   $x \le (\frac{Min+Max}{2})$
2. 각 정점 v에서 최소값 2개 ($1^{st}, 2^{nd}$ Min) 선택.
   $\{x, y\} = \{y, x\}$ 도 선택된 것으로 취급.
3. 임의의 정점 v_1에서 시작하여 양방향으로 탐색.
   Do While $|V| = \varnothing$
   (1) 현 정점 v_i의 $1^{st}, 2^{nd}$ Min인 인접정점 $N_G(v_i)$ 선택.
   if $N_G(v_i) = \varnothing$ then Min 값 4개를 $N_G(v_i)$로 선택.
   (2) $N_G(v_i)$인 v_j 정점의 $1^{st}, 2^{nd}$ Min 인접정점 $N_G(v_j)$인 v_k 정점 선택.
   (3) v_j 모두를 거치고 v_k로 향하는 최단 경로 선택.
   if $N_G(v_j)$로 최단 경로 결정 불가시 v_i의 3^{rd} Min과 $N_G(v_j)$의 $1^{st}, 2^{nd}$ Min 정점 선택.
   (4) v_{i1}와 v_j 경로 선택, v_{i2}와 3^{rd} Min 경로 선택.
   End While.

그림 1. TSP의 다항시간 알고리즘
Fig. 1. Polynomial time algorithm for TSP

최단 경로 결정 방법은 현재 위치한 정점 v_i의 $1^{st}Min$과 $2^{nd}Min$ 인접 정점 v_j와 v_j의 $1^{st}Min$과 $2^{nd}Min$ 인접 정점 v_k 또는 v_i의 3^{rd} Min 정점을 대상으로 이웃의 이웃까지 탐색 영역을 대상으로 하는 탐욕 알고리즘 (greedy algorithm)이다. 제안된 알고리즘은 그림 1에 제시하였다.

IV. 알고리즘 적용 및 분석

본 장에서는 그림 2의 TSP-1과 TSP-2 데이터를 대상으로 제안된 알고리즘의 적합성을 평가해 본다.

4.1 실험 데이터

TSP-1은 Pleines[5]가 제안한 데이터로, 유럽의 26개 도시를 여행하는 경우로 편의상 각 도시를 번호로 표기하였다. 참고로, 1 (포르투갈 리스본), 2(핀란드 헬싱키), 3(스페인 마드리드), 4(터키 이스탄불), 5(그리스 아테네), 6(루마니아 부다페스트), 7(불가리아 소피아), 8(스웨덴 스톡홀름), 9(노르웨이 오슬로), 10(세르비아 베오그라드), 11(헝가리 부다페스트), 12(덴마크 코펜하겐), 13(이탈리아 로마), 14(폴란드 바르샤바), 15(오스트리아 빈), 16(독일 베를린), 17(네덜란드 암스테르담), 18(영국 런던), 19(벨기에 브뤼셀), 20(체코 프라하), 21(이탈리아 밀라노), 22(스위스 취리히), 23(스페인 바르셀로나), 24(스위스 제네바), 25(독일 프랑크푸르트), 26(프랑스 파리)이다. 전수탐색은 7.7556×10^{24}회 수행한다.

TSP-2는 Dantzig, Fulkerson과 Johnson[9]이 제시한 데이터로 미국의 49개 도시를 방문하는 문제로, 7개 도시는 40과 41번 도시사이에 존재하여 실제 데이터는 42개이다. 본 데이터의 단위는 마일이며, $1/17(d_{ij}-11)$로 정규화시켜 정수로 표현되었다. TSP-1과 TSP-2의 각 정점에서 $x \le (Min+Max)/2$와 $1^{st}Min, 2^{nd}Min$을 선택한 결과는 그림 3에 제시되어 있다.

4.2 TSP-1 데이터

TSP-1의 최적 해는 1-3-13-21-22-25-20-15-11-10-7-5-4-6-14-2-8-9-12-16-17-19-18-26-24-23-1=16,189 Km이다.

정점 ①에서 시작하여 양방향으로 최단경로를 탐색한 결과는 그림 4와 같다. 실험 결과 26개 정점을 단지 7회의 탐색으로 TSP를 얻을 수 있었다. 첫 번째로, 정점 1을 탐색한 결과 (a)와 같이 13-3-1-23-24의 경로를 얻었다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1		4074	639	4326	4528	4073	3730	3691	3641	3354	3314	3304	2671	5438	3078	5148	2318	2260	2098	2926	2294	2299	1276	2019	2542	1801
2	4074		3932	3128	2286	2663	2862	583	907	2785	1884	1033	3148	1130	1888	1489	1803	2337	1962	1800	2871	2260	5725	2422	1843	2263
3	639	3932		3687	2889	3478	1986	3466	3094	2715	2673	2846	982	2967	2605	2509	1781	1718	1561	2347	1728	1641	637	1380	1903	1709
4	4326	3128	3687		1141	638	577	3356	3306	972	1400	2689	2306	2125	1656	2304	2795	5141	2276	1968	2046	2219	3075	2363	2361	2913
5	4528	2286	3889	1141		1254	847	3549	3499	1174	1602	2798	2808	2278	1888	2506	3027	3296	2978	2170	2248	2421	3277	2565	2863	3118
6	4073	2663	3478	638	1284		407	2828	2775	732	895	2102	2080	1487	1106	1749	2370	2666	2295	1408	1786	1880	2889	2116	1980	2357
7	3730	2862	1986	577	847	407		2779	2729	409	810	1981	1727	1508	1060	1703	2230	2864	2193	1362	1463	1769	2836	1793	1810	2335
8	3691	583	3466	3356	3549	2828	2779		549	2370	1969	626	2764	1665	1719	1076	1420	1954	1579	1417	2187	1877	2839	2039	1460	1880
9	3641	907	3094	3306	3499	2778	2729	549		2320	1919	588	2718	1618	1669	1026	1370	1904	1529	1367	2138	1827	2789	1989	1410	1830
10	3354	2785	2715	972	1174	732	409	2370	2320		428	1637	1334	1099	684	1332	1823	2117	1804	966	1074	1247	2103	1391	1389	1941
11	3314	1884	2673	1400	1602	895	810	1969	1919	428		1343	1294	698	256	904	1395	1752	1358	568	1034	1004	2093	1320	979	1527
12	3304	1033	2846	2689	2798	2102	1981	626	588	1637	1343		2083	1129	915	367	886	1238	1030	688	1507	1205	2234	1933	802	1252
13	2671	3148	982	2306	2808	2080	1727	2764	2718	1334	1294	2083		1872	1150	1525	1661	1898	1492	1300	565	871	1420	882	1275	1413
14	3438	1130	2967	2125	2278	1487	1508	1665	1618	1099	698	1129	1872		718	589	1216	1670	1299	612	1456	1298	2529	1975	1064	1627
15	3078	1888	2605	1656	1888	1106	1060	1719	1669	684	256	918	1150	718		648	1139	1582	1107	312	837	748	1928	1018	723	1271
16	3148	1489	2809	2304	2806	1749	1703	1076	1026	1332	904	367	1525	589	648		669	1114	781	337	1055	859	1847	1129	982	1073
17	2318	1803	1781	2798	3027	2370	2230	1420	1370	1823	1393	886	1661	1216	1139	669		530	220	912	1096	801	1858	964	416	517
18	2260	2337	1718	3141	3296	2666	2864	1954	1904	2117	1782	1238	1898	1670	1582	1114	530		371	1257	1321	942	1504	991	764	449
19	2098	1962	1561	2276	2978	2295	2193	1579	1529	1804	1338	1030	1492	1299	1107	781	220	371		913	927	632	1338	664	409	297
20	2926	1800	2347	1968	2170	1408	1362	1417	1367	966	568	688	1300	612	312	337	912	1257	913		830	668	1480	950	504	1071
21	2294	2871	1728	2046	2248	1786	1463	2187	2138	1074	1034	1507	963	1486	857	1088	1096	1321	927	830		305	1043	317	710	842
22	2299	2260	1641	2219	2421	1880	1769	1877	1827	1247	1004	1205	871	1298	748	859	801	942	632	668	305		1052	280	415	572
23	1276	5725	637	3075	3277	2859	2836	2839	2789	2105	2093	2234	1420	2529	1928	1847	1588	1504	1338	1480	1043	1052		772	1295	1030
24	2019	2422	1380	2363	2863	2116	1793	2039	1989	1391	1320	1833	882	1578	1018	1129	964	991	664	950	317	280	772		578	517
25	2542	1843	1903	2361	2863	1980	1810	1460	1410	1389	979	802	1278	1064	723	582	416	764	409	504	710	415	1295	578		567
26	1801	2263	1709	2913	3118	2357	2333	1880	1830	1941	1527	1252	1413	1627	1271	1073	517	449	297	1071	842	572	1030	517	567	

(a) TSP-1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
1		8	39	37	50	61	58	59	62	81	103	108	149	181	187	161	142	174	185	164	137	117	114	88	77	87	91	108	111	91	83	89	98	74	67	74	97	43	38	29	3	5
2	8		48	47	49	62	60	60	66	81	107	117	149	185	191	170	146	178	186	168	139	122	118	89	80	89	93	106	113	92	88	91	97	81	69	76	89	46	37	33	11	12
3	39	48		9	21	21	16	15	20	40	62	66	104	140	146	120	101	133	142	120	94	77	73	44	36	44	48	62	69	50	42	55	64	44	42	61	46	41	33	30	41	55
4	37	47	9		15	20	17	20	28	44	67	71	108	144	150	124	104	138	143	123	96	80	78	48	40	46	50	63	71	51	43	55	63	43	41	60	41	34	26	21	37	41
5	50	49	21	15		17	18	26	31	50	72	77	114	150	156	130	111	143	140	124	94	83	84	53	46	46	48	64	66	46	38	50	56	38	31	42	25	20	18	18	47	53
6	61	62	21	20	17		6	17	22	41	63	68	106	142	142	118	97	129	130	106	80	68	69	41	34	30	34	47	51	30	22	34	42	23	28	44	30	34	34	38	57	64
7	58	60	16	17	18	6		10	15	35	57	61	99	135	137	110	91	123	126	106	78	62	63	34	27	28	32	46	53	34	26	39	49	30	32	51	36	38	36	33	58	61
8	59	60	15	20	26	17	10		5	24	46	51	88	124	130	104	85	117	124	105	77	60	57	28	19	29	33	49	56	38	32	44	56	39	41	60	47	48	46	40	58	61
9	62	66	20	28	31	22	18	5		20	41	46	84	120	128	108	86	118	128	110	84	61	59	29	21	32	36	54	61	43	36	49	60	44	46	66	52	53	51	48	63	66
10	81	81	40	44	50	41	38	24	20		23	26	63	99	105	90	75	107	118	104	77	50	48	22	14	27	30	48	57	49	51	63	75	62	64	83	71	73	70	68	83	84
11	103	107	62	67	72	63	57	46	41	23		11	49	85	90	72	51	83	93	86	56	34	28	23	29	36	34	46	59	60	63	76	86	78	83	102	93	96	93	87	108	111
12	108	117	66	71	77	68	61	51	46	26	11		40	76	81	64	59	84	101	97	64	42	36	38	40	47	48	59	71	71	78	87	97	89	90	110	98	99	97	91	109	113
13	145	149	104	108	114	106	99	88	84	63	49	40		38	41	34	29	54	72	71	68	49	43	69	77	78	77	85	96	103	106	120	126	121	130	147	136	137	134	117	147	150
14	181	185	140	144	150	142	138	124	120	99	85	76	38		10	31	53	46	69	93	90	82	77	105	114	116	118	119	130	141	142	155	160	159	164	185	172	176	171	166	186	186
15	187	191	146	150	156	142	137	130	125	105	90	81	41	10		27	48	39	58	82	87	77	72	102	111	112	110	115	126	136	140	150	155	158	160	179	172	178	176	171	188	192
16	161	170	120	124	130	115	110	104	105	90	72	64	34	31	27		21	26	58	62	58	60	45	74	84	84	83	88	98	109	112	123	128	127	133	155	148	151	151	144	164	166
17	142	146	101	104	111	97	91	85	86	78	51	59	29	53	48	21		31	43	42	36	30	27	56	64	66	63	66	78	90	93	100	104	108	114	133	126	131	129	128	144	147
18	174	178	133	138	143	129	123	117	118	107	83	84	54	46	39	26	31		26	45	68	62	59	88	96	98	97	98	98	115	126	123	128	136	146	159	138	163	161	157	176	180
19	185	186	142	143	140	130	126	124	128	118	93	101	72	69	58	58	43	26		22	50	70	69	99	107	98	91	79	88	99	108	109	113	124	134	146	147	159	163	156	162	188
20	164	168	120	123	124	106	106	108	110	104	86	97	71	93	82	62	42	45	22		30	49	58	81	87	75	72	89	62	81	88	86	90	101	111	122	124	138	139	139	161	167
21	137	139	94	96	94	80	78	77	84	77	56	64	65	90	87	58	36	68	50	30		21	27	54	60	47	44	31	38	53	60	62	67	75	85	98	121	108	118	113	134	140
22	117	122	77	80	83	68	62	60	61	50	34	42	49	82	77	60	30	62	70	49	21		8	32	40	36	32	36	47	61	64	71	76	79	84	108	97	102	102	98	119	124
23	114	118	73	78	84	69	63	57	59	48	28	36	43	77	72	48	27	59	69	58	27	8		29	37	39	36	42	53	62	66	78	82	81	86	107	99	103	101	97	116	119
24	85	89	44	48	53	41	34	28	29	22	23	35	69	105	102	74	56	88	99	81	54	32	29		8	12	9	28	39	36	39	52	62	54	59	79	71	73	67	86	90
25	77	80	36	40	46	34	27	19	21	14	29	40	77	114	111	84	64	96	107	87	60	40	37	8		11	18	33	42	34	36	49	59	50	52	71	68	67	68	60	78	87
26	87	89	44	46	46	30	28	29	32	27	36	47	78	116	112	84	66	98	98	78	47	36	39	12	11		3	21	29	24	27	39	49	42	47	66	59	64	68	62	84	90
27	91	93	48	50	48	34	32	33	36	30	34	45	77	115	110	83	63	97	91	72	44	32	36	9	15	3		20	30	28	31	44	53	46	51	70	63	69	70	67	88	94
28	108	106	62	63	64	47	46	49	54	48	46	59	83	119	115	88	66	98	79	59	31	36	42	28	33	21	20		12	20	28	38	40	43	53	70	67	78	84	79	101	107
29	111	113	69	71	66	51	53	56	61	57	59	71	96	130	126	98	78	98	85	62	38	47	53	39	42	29	30	12		20	28	24	29	39	49	60	62	72	78	82	108	114
30	91	92	50	51	46	30	34	38	43	49	60	71	103	141	136	109	90	118	99	81	53	61	62	36	34	24	28	20	20		8	18	28	23	32	48	46	54	58	62	88	77
31	83	85	42	43	38	22	26	32	36	51	63	75	106	142	140	112	93	126	108	88	60	64	66	39	36	27	31	28	28	8		12	23	14	24	36	37	49	56	59	86	92
32	89	91	55	58	58	50	34	39	44	49	63	76	87	120	155	130	123	100	123	109	86	62	71	78	52	49	39	44	35	24	15	12		11	14	24	36	37	49	56	59	86	92
33	98	97	64	63	56	42	49	56	60	75	86	97	126	160	158	128	104	128	113	90	67	76	82	62	59	49	53	40	29	28	23	11		21	30	33	43	54	62	66	92	98
34	74	81	44	43	35	23	30	39	44	62	78	89	121	159	155	127	108	136	124	101	78	79	81	54	50	42	46	43	39	23	14	14	21		9	28	23	34	41	45	71	80
35	67	69	42	41	31	28	32	41	46	64	83	90	130	164	160	133	114	146	134	111	85	84	86	59	52	47	51	53	49	32	24	24	30	9		18	13	24	32	38	64	74
36	74	76	61	60	42	44	51	60	66	83	102	110	147	185	179	155	133	159	146	122	98	108	107	79	71	66	70	70	60	48	40	36	33	25	18		17	29	38	45	71	77
37	97	99	46	41	28	30	36	47	52	71	93	98	136	172	172	148	126	158	147	124	121	97	99	71	65	89	63	67	62	46	38	37	43	23	13	17		12	21	27	54	60
38	48	46	41	34	20	34	38	48	53	73	96	99	137	176	178	151	131	163	159	138	108	102	103	73	67	64	69	75	72	54	46	49	54	34	24	29	12		9	18	41	48
39	38	37	35	26	18	34	36	46	51	70	93	97	134	171	176	151	129	161	163	139	118	102	101	71	68	68	70	84	78	58	50	56	62	41	32	38	21	9		6	32	38
40	29	33	30	21	18	38	33	40	48	65	87	91	117	166	171	144	128	157	156	139	113	98	97	67	60	62	67	79	82	62	53	59	66	45	38	45	27	18	6		28	32
41	3	11	41	37	47	57	58	58	63	83	108	109	147	186	188	164	144	176	182	161	134	119	116	86	78	84	88	101	108	88	80	86	92	71	64	71	94	41	32	25		6
42	5	12	55	41	53	64	61	61	66	84	111	113	150	186	192	166	147	180	188	167	140	124	119	90	87	90	94	107	114	77	86	92	98	80	74	77	60	48	38	32	6	

(b) TSP-2

그림 2. 실험 데이터

Fig. 2. Experimental data

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1			639														2318	2260	2098		2294	2299	1276	2019	2542	1801
2								383	907		1884	1035		1130	1855	1459	1803		1962	1800					1843	
3	639						1986						952				1781	1718	1561		1728	1641	637	1380	1903	1709
4					1141	638	577			972	1400		2306	2125	1656	2304			2276	1968	2046	2219		2363	2361	
5				1141		1254	847			1174	1602		2808	2278	1858	2506				2170	2248	2421		2565	2563	
6				638	1254		407			732	895	2102	2050	1487	1106	1749				1408	1786	1850		2116	1950	
7			1986	577	847	407				409	810	1981	1727	1508	1060	1703				1362	1483	1769		1793	1810	
8		383						549		1999	626		1665	1719	1076	1420	1954	1579	1417		1877			1460	1880	
9		907							549		1919	588		1615	1669	1026	1370	1904	1529	1367		1827		1989	1410	1830
10					972	1174	732	409			428	1637	1334	1099	684	1332	1823		1804	966	1074	1247		1391	1389	
11					1400	1602	895	810				428		1345	1294	698	256	904	1395	1752	1358	568	1034	1004		1320	979	1527
12			1035						626	588	1637	1345				1129	915	367	886	1238	1030	688	1507	1205		1533	802	1252
13				952				1727			1334	1294				1872	1150	1525	1661		1492	1300	565	871	1420	882	1275	1413
14			1130				1487	1508	1665	1615	1099	698	1872			718	589	1216	1670	1299	612	1456	1298			1575	1064	1627
15					1656		1106	1060			684	256	915	1150	718		648	1139	1582	1107	312	837	748			1018	723	1271
16			1459				1703	1076	1026	1332	904	367	1525	589	648			669	1114	781	337	1055	859			1129	552	1073
17								1420	1370		1395	886		1216	1139	669			530	220	912	1096	801	1558	964	416	517
18				1718							1752	1238		1670	1582	1114	530			371	1257	1321	942	1504	991	764	449
19				1561				1579	1529		1358	1030	1492	1299	1107	781	220	371			913	927	632	1338	664	409	297
20							1408	1362	1417	1367	966	568	688	1300	612	312	337	912	1257	913		830	668	1480	950	504	1071
21											1074	1034		565	1456	837	1055	1096	1321	927	830		305	1043	317	710	842
22											1247	1004	1205	871	1298	748	859	801	942	632	668	305		1052	280	415	572
23	1276		637								2103	2093		1420	2529	1928	1847	1558	1504	1338	1480	1043	1052		772	1295	1030
24			1380								1391	1320		882		1018	1129	964	991	664	950	317	280	772		578	517
25								1460	1410	1389	979	802	1275	1064	723	532	416	764	409	504	710	415	1295	578		567
26											1527	1252	1413	1627	1271	1073	517	449	297	1071	842	572	1030	517	567	

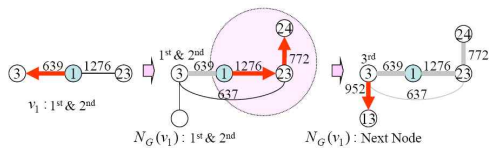
(a) TSP-1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
1		8	39	37	50	61	58	59	62	81														85	77	87	91			91	83	89	95	74	67	74	57	43	35	29	3	5
2	8		45	47	49	62	60	60	66	81														89	80	89	93			92	85	91	97	81	69	76	59	46	37	33	11	12
3	39	45		9	21	21	16	15	20	40	62	66										77	73	44	36	44	48	62	69	50	42	55	64	44	42	61	46	41	35	30	41	55
4	37	47	9		15	20	17	20	25	44	67	71											78	48	40	46	50	63	71	51	43	55	63	43	41	60	41	34	26	21	37	41
5	50	49	21	15		17	16	26	31	50	72	77												53	46	46	48	64	66	46	38	50	56	35	31	42	25	20	18	18	47	53
6	61	62	21	20	17		6	17	22	41	63	68										68	69	41	34	30	34	47	51	30	22	34	42	23	28	44	30	34	34	35	57	64
7	58	60	16	17	18	6		10	15	35	57	61										62	63	34	27	28	32	46	53	34	26	39	49	30	32	51	36	38	36	33	55	61
8	59	60	15	20	26	17	10		5	24	46	51										60	57	28	19	29	33	49	56	38	32	44	56	39	41	60	47	48	46	40	58	61
9	62	66	20	25	31	22	15	5		20	41	46										61	59	29	21	32	36	54	61	43	36	49	60	44	46	66	52	53	51	45	63	66
10			40	44	50	41	35	24	20		23	26	63									50	48	22	14	27	30	48	57	49	51	63	75	62	64					65		
11							57	46	41	23		11	49				51				56	34	28	23	29	36	34	46	59	60												
12							61	51	46	26	11		40			64	59				64	42	36	35	40	47	45	59														
13									84	63	49	40		35	41	34	29	54	72	71	65	49	43	69	77	78	77	85													
14											85	76	35		10	31	53	46	69	93	90	82	77																	
15											90	81	41	10		27	48	35	58	82	87	77	72																	
16										90	72	64	34	31	27		21	26	58	62	58	60	45	74	84	84	83	88													
17										75	51	59	29	53	48	21		31	43	42	36	30	27	56	64	66	63	66	75												
18											83	84	54	46	35	26	31		26	45	68	62	59	88	96	98	97	98	98												
19											93	101	72	69	58	58	43	26		22	50	70	69	99		95	91	79	85	99											
20											86		71	93	82	62	42	45	22		30	49	55	81	87	75	72	59	62	61	88	86	90								
21						80	76	77		77	56	64	65			58	36	66	50	30		21	27	54	60	47	44	31	30	53	60	62	67	75							
22						62	60	61	50	34	42	49				60	30	62		49	21		5	32	40	36	32	36	47	61	64										
23							57	59	46	28	36	43				45	27	59		55	27	5		29	37	39	36	42	53	62											
24			44	48	53	41	34	28	29	22	23	35					56				54	32	29		8	12	9	28	39	36	39	52		54						
25			36	40	46	34	27	19	21	14	29	40									60	40	37	8		11	15	33	42	34	36	49	59	50	52				60		
26			44	46	46	30	28	29	32	27	36	47									47	36	39	12	11		3	21	29	24	27	39	49	42	47		59				
27			48	50	48	34	32	33	36	30	34	45									44	32	36	9	15	3		20	30	28	31	44	53	46	51						
28			62	63	64	47	46	49	54	48	46	59								59	31	36	42	28	33	21	20		12	20	28	35	40	43	53						
29			69	71	66	51	53	56	61	57	59	71								62	38	47	53	39	42	29	30	12		20	28	24	29	39	49	60	62				
30			50	51	46	30	34	38	43	49	60	71									53	61	62	36	34	24	28	20	20		8	15	25	23	32	48	46	54	58	62		
31			42	43	38	22	26	32	36	51	63	75									60	64	66	39	36	27	31	28	28	8		12	23	14	24	36	37	49	56	59		
32			55	55	50	34	39	44	49	63	76										62	71	78	52	49	39	44	35	24	15	12		11	14	24	36	37	49	56	59		
33			64	63	56	42	49	56	60	75											67	76	82	62	59	49	53	40	29	25	23	11		21	30	33	43	54	62	66		
34	74	81	44	43	38	23	30	39	44	62	78										75	79	81	54	50	42	46	43	39	23	14	14	21		9	25	23	34	41	45	71	80
35	67	69	42	41	31	25	32	41	46	64	83										85	84	86	59	52	47	51	53	49	32	24	24	30	9		18	13	24	32	38	64	74
36	74	76	61	60	42	44	51	60	66	83											98			79	71	66	70	70	60	48	40	36	33	25	18		17	29	38	45	71	77
37	57	59	46	41	25	30	36	47	52	71														71	65	59	63	67	62	46	38	37	43	23	13	17		12	21	27	54	60
38	45	46	41	34	20	34	38	48	53	73														73	67	64	69	75	72	54	46	49	54	34	24	29	12		9	15	41	48
39	35	37	35	26	18	34	36	46	51	70														71	65	65	70	84	78	58	50	56	62	41	32	38	21	9		6	32	38
40	29	33	30	21	18	35	33	40	45	65	87													67	60	62	67	79	82	62	53	59	66	45	38	45	27	15	6		25	32
41	3	11	41	37	47	57	55	58	63	83														86	78	84	88			88	80	86	92	71	64	71	54	41	32	25		6
42	5	12	55	41	53	64	61	61	66	84														90	87	90	94			77	86	92	98	80	74	77	60	48	38	32	6	

(b) TSP-2

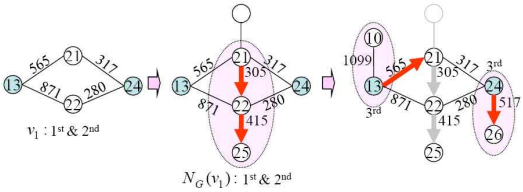
그림 3. 데이터 축소와 최소값 2개 선택

Fig. 3. Data reduction and selection of two minimum values



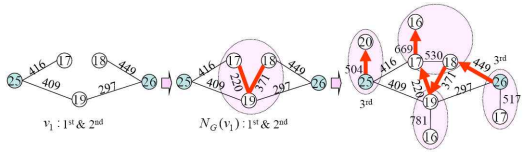
$$13\frac{952}{}3\frac{639}{}1\frac{1276}{}23\frac{772}{24}24$$

(a) 정점 1



$$25\frac{415}{}22\frac{305}{}21\frac{565}{}13\frac{952}{}3\frac{639}{}1\frac{1276}{}23\frac{772}{}24\frac{517}{}26$$

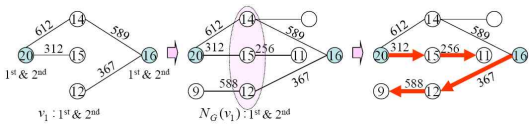
(b) 정점 13과 24



$$20\frac{504}{}25\frac{415}{}22\frac{305}{}21\frac{565}{}13\frac{952}{}3\frac{639}{}1\frac{1276}{}23\frac{772}{}24\frac{517}{}26\frac{449}{}18$$

$$\frac{371}{}19\frac{220}{}17\frac{669}{}16$$

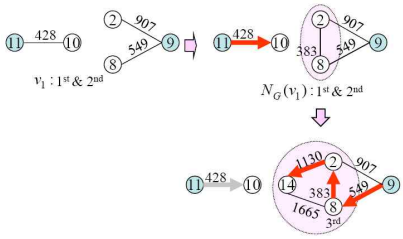
(c) 정점 25와 26



$$11\frac{256}{}15\frac{312}{}20\frac{504}{}25\frac{415}{}22\frac{305}{}21\frac{565}{}13\frac{952}{}3\frac{639}{}1\frac{1276}{}23\frac{772}{}$$

$$24\frac{517}{}26\frac{449}{}18\frac{371}{}19\frac{220}{}17\frac{669}{}16\frac{367}{}12\frac{588}{}9$$

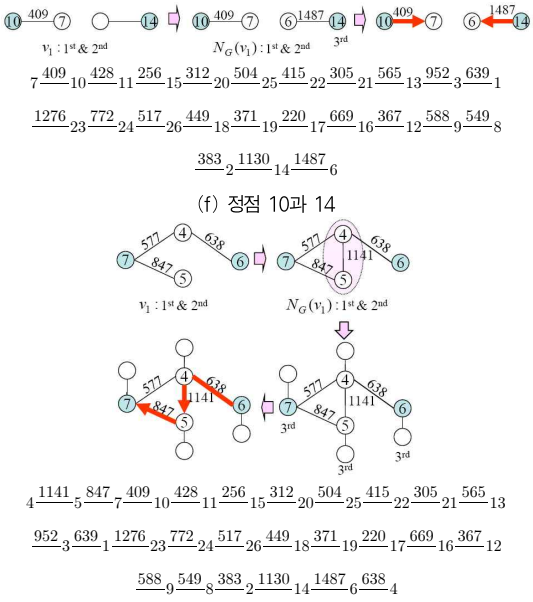
(d) 정점 20과 16



$$10\frac{428}{}11\frac{256}{}15\frac{312}{}20\frac{504}{}25\frac{415}{}22\frac{305}{}21\frac{565}{}13\frac{952}{}3\frac{639}{}1\frac{1276}{}23$$

$$\frac{772}{}24\frac{517}{}26\frac{449}{}18\frac{371}{}19\frac{220}{}17\frac{669}{}16\frac{367}{}12\frac{588}{}9\frac{549}{}8\frac{383}{}2\frac{1130}{}14$$

(e) 정점 11과 9



(f) 정점 10과 14

(g) 정점 7과 6

그림 4. TSP-1의 양방향 최단경로 탐색

Fig. 4. Two-sided shortest path search for TSP-1

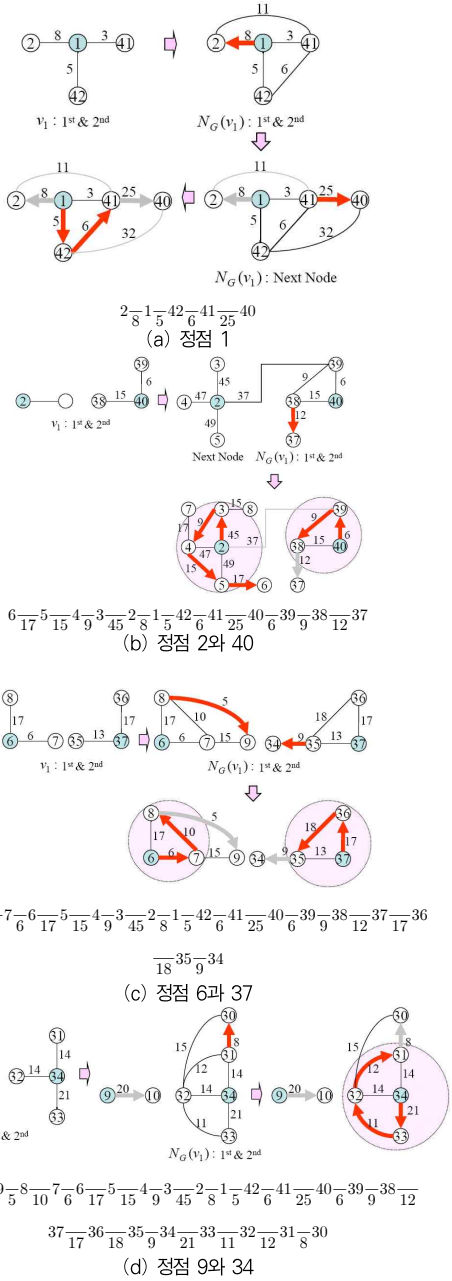
두 번째로, 첫 번째로 구한 경로의 최좌측과 최우측의 13과 24를 탐색한 결과 (b)와 같이 25-22-21-13-3-1-23-24-26을 얻었다. 세번째로, 다시 25와 26 정점을 탐색한 결과 (c)와 같이 20- 25-22-21-13-3-1-23-24-26-18-19-17-16 경로를 얻었다.

(c)의 결과에 대해 20과 16 정점 탐색 결과 (d)와 같이 11-15-20-25-22-21-13-3-1-23-24-26-18-19-17-16-12-9 경로를 얻었다. (d)의 결과에서 11과 9 정점 탐색 결과 (e)와 같이 10-11-15-20-25-22-21-13-3-1-23-24-26-18-19-17-16-12-9-8-2-14 경로를 얻었다. (e)에서 10과 14 정점 탐색 결과 (f)와 같이 7-10-11-15-20-25-22-21-13-3-1-23-24-26-18-19-17-16-12-9-8-2-14-6의 경로로 확장되었다. (f) 결과에서 7과 6 정점 탐색 결과 4-5-7-10-11-15-20-25-22-21-13-3-1-23-24-26-18-19-17-16-12-9-8-2-14-6-4를 얻어 4 정점에서 만나는 해밀턴 사이클을 형성하였다.

4.3 TSP-2 데이터

TSP-2의 최적 해는 1번부터 42번까지 순서대로 방문하고 다시 1번으로 되돌아오는 경우로 $12,345M=669$이다.

TSP-2의 각 정점에서 $x \le (Min+Max)/2$의 데이터 축소와 $1^{st}\,Min, 2^{nd}\,Min$을 선택한 결과는 그림 3의 (b)에 제시되어 있다. 정점 ①에서 시작하여 양방향으로 최단경로를 탐색한 결과는 그림 5와 같다. 실험 결과 42개 정점을 단지 11회의 탐색으로 TSP를 얻을 수 있었다.

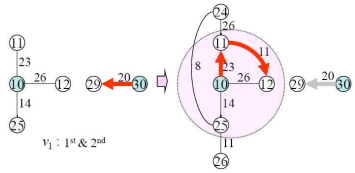


(a) 정점 1

(b) 정점 2와 40

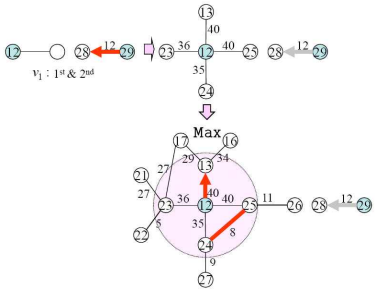
(c) 정점 6과 37

(d) 정점 9와 34



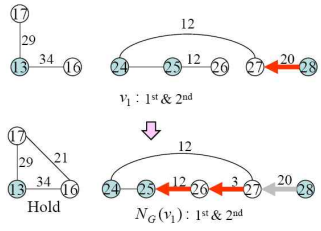
12 11 11 23 10 20 9 5 8 10 7 6 6 17 5 15 4 9 3 45 2 8 1 5 42 6 41 25 40 6
39 9 38 12 37 17 36 18 35 9 34 21 33 11 32 12 31 8 30 20 29

(e) 정점 10과 30



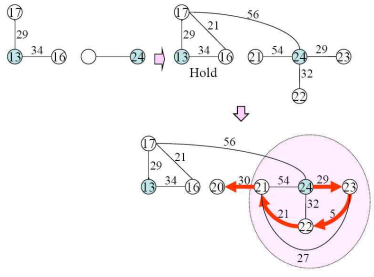
13 40 12 11 11 23 10 20 9 5 8 10 7 6 6 17 5 15 4 9 3 45 2 8 1 5 42 6 41 25
40 6 39 9 38 12 37 17 36 18 35 9 34 21 33 11 32 12 31 8 30 20 29 12 28 , 24 8 25

(f) 정점 12와 29



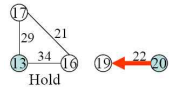
13 40 12 11 11 23 10 20 9 5 8 10 7 6 6 17 5 15 4 9 3 45 2 8 1 5 42 6 41 25
40 6 39 9 38 12 37 17 36 18 35 9 34 21 33 11 32 12 31 8 30 20 29 12 28 20
27 3 26 11 25 8 24

(g) 정점 13, 24, 25와 28



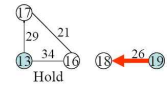
13 40 12 11 11 23 10 20 9 5 8 10 7 6 6 17 5 15 4 9 3 45 2 8 1 5 42 6 41 25
40 6 39 9 38 12 37 17 36 18 35 9 34 21 33 11 32 12 31 8 30 20 29 12 28 20
27 3 26 11 25 8 24 29 23 5 22 21 21 30 20

(h) 정점 13과 24



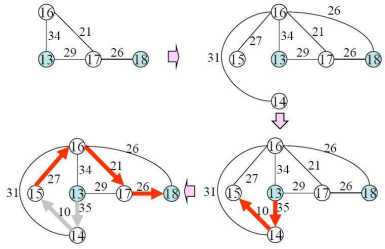
13 40 12 11 11 23 10 20 9 5 8 10 7 6 6 17 5 15 4 9 3 45 2 8 1 5 42 6 41
25 40 6 39 9 38 12 37 17 36 18 35 9 34 21 33 11 32 12 31 8 30 20 29 12
28 20 27 3 26 11 25 8 24 29 23 5 22 21 21 30 20 22 19

(i) 정점 13과 20



13 40 12 11 11 23 10 20 9 5 8 10 7 6 6 17 5 15 4 9 3 45 2 8 1 5 42 6 41 25
40 6 39 9 38 12 37 17 36 18 35 9 34 21 33 11 32 12 31 8 30 20 29 12 28 20
27 3 26 11 25 8 24 29 23 5 22 21 21 30 20 22 19 26 18

(j) 정점 13과 19



15 10 14 35 13 40 12 11 11 23 10 20 9 5 8 10 7 6 6 17 5 15 4 9 3 45 2 8 1 5
42 6 41 25 40 6 39 9 38 12 37 17 36 18 35 9 34 21 33 11 32 12 31 8 30 20
29 12 28 20 27 3 26 11 25 8 24 29 23 5 22 21 21 30 20 22 19 26 18 26 17
21 16 27 15

(k) 정점 13과 18

그림 5. TSP-2의 양방향 최단경로 탐색

Fig. 5. Two-sided shortest path search for TSP-2

TSP-2는 정점 1 탐색 결과 (a)와 같이 2-1-42-41-40 경로를 얻었다. (a)에서 최좌측 2와 최우측 40 정점 탐색 결과 (b)와 같이 6-5-4-3-2-1-42-41-40-39-38-37 경로를 얻었다. (b)의 결과에서 6과 37 정점 탐색 결과 (c)와 같이 9-8-7-6-5-4-3-2-1-42-41-40-39-38-37-36-35-34 경로를 얻었다. (c) 결과에서 9와 34 정점 탐색 결과 (d)와 같이 10-9-8-7-6-5-4-3-2-1-42-41-40-39-38-37-36-3 5-34-33-32-31-30 경로를 얻었다. (d)에서 10과 30 정점 탐색 결과 (e)와 같이 12-11-0-9-8-7-6-5-4-3-2-1-42-41-40-39-38-37-36-35-34-33-32-31-30-29 경로를 얻었다. 이와 같이 (f)의 12와 29, (g)의 13,24, 25와 28, (g)의 13과 24, (h)의 13과 20, (i)의 13과 18 정점 탐색을 수행한 결과 15-14-13-12-11-0-9-8-7-6-5-4-3-2-1-42-41-40-39-38-37-36-35-34-33-32-31-30-29-28-27-26-25-24-23-22-21-20-19-18-17-16-15로 15 정점에서 만나는 해밀턴 사이클을 얻었다.

V. 결론

본 논문은 NP-완전으로 다항시간 알고리즘이 존재하지 않는 대규모 외판원 문제에 대한 최적 해를 $O(n^2)$의 다항시간으로 도출할 수 있는 알고리즘을 제안하였다.

제안된 방법은 먼저, 알고리즘 수행에 적용되는 데이터 양을 약 $n/2$로 축소시키고 각 정점에서 1^{st} Min과 2^{nd} Min 인접 정점들만을 선택하였다. 이 과정은 $O(n)$의 선형 시간이 소요된다. $n=26$인 TSP-1과 $n=42$인 TSP-2 데이터에 대해 1^{st} Min과 2^{nd} Min 정점들을 대상으로 양 방향으로 탐색하는 방법을 적용하였다. TSP-1은 26개 데이터에 대해 7회만에 TSP를 구할 수 있었으며, TSP-2는 42개 데이터에 대해 11회만에 TSP를 정확히 구하였다.

결국, 본 논문은 대규모 TSP에 대해 발견적 알고리즘으로 최적 해를 빠르게 구할 수 있음을 검증하였으며, TSP의 최적 해를 구하는 일반적인 알고리즘으로 적용할 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] D. S. Johnson and L. A. McGeoch, "The Traveling Salesman Problem and Its Variations," Kluwer Academic Publishers, pp. 369-443, 2002.

[2] A. Likas and V. T. Paschos, "A Note on a New Greedy-solution Representation and a New Greedy Parallelizable Heuristic for the Traveling Salesman Problem," Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 13, pp. 71-78, 2002.

[3] A. Schrijver, "On the History of Combinatorial Optimization (till 1960)," in Handbook of Discrete Optimization'' (K. Aardal, G.L. Nemhauser, R. Weismantel, eds.), Elsevier, Amsterdam, pp. 1-68, 2005.

[4] E. Charniak and M. Herlihy, "CSC 751 Computational Complexity: Local Search Heuristics," Department of Computer Science, Brown University, 2008.

[5] J. Pleines, "ZIP-Methode: ein Kombinatorischer Ansatz zur Optimalen Lősung Allgemeiner Traveling-Salesman-Problem (TSP)," Kőnnen bekannte Lősungen nicht nur auf Gesamtgrphen sondern auf Teilgraphen angewandt werden, so bringt die ZIP-Methode den entscheidenden Quantensprung der rechentechnischen Vereinfachung, http://www.jochen-pleines.de/download/ZIP2006.pdf, 2006.

[6] L. Stougie, "2P350: Optimaliseringsmethoden," http://www.win.tue.nl/~leen/OW/2P350/Week8/week8.pdf, College Wordt ggeven op vinjdagmiddag, 2001.

[7] L. H. Chuin, "IS 703: Decision Support and Optimization," School of Information Systems," Department of Computer Science, Brown University, 2008.

[8] S. U. Lee, "The Extended k-opt Algorithm for Traveling Salesman Problem," Journal of Korea Society of Computer Information, Vol. 17, No. 10, pp. 155-165, Oct. 2012.

[9] G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson, "Solution of a Large-scale Traveling- Salesman Problem," The Rand Corporation, http://www.cse.wustl.edu/~chen/7102/TSP.pdf, 1954.

저 자 소 개

이 상 운(Sang-Un, Lee)

1983년 ~ 1987년 :
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995년 ~ 1997년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998년 ~ 2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
2003.3 ~ 현 재 :
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리,
소프트웨어 개발 방법론,
소프트웨어 신뢰성,
그래프 알고리즘
e-mail : sulee@gwnu.ac.kr