ISSN 1975-8359(Print) / ISSN 2287-4364(Online)
The Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers Vol. 61, No. 12, pp. 1898~1902, 2012
http://dx.doi.org/10.5370/KIEE.2012.61.12.1898

양자화와 오버플로우 비선형성을 가지는 이산시간 폴리토픽 불확실 지연 시스템의 강인 안정성

Robust Stability for Discrete-time Polytopic Uncertain Delay Systems with Quantization/overflow Nonlinearities

김 종 해*
(Jong-Hae Kim)

Abstract - In this paper, we consider the delay-dependent robust stability condition for polytopic uncertain systems with interval time-varying delay using various combinations of quantization and overflow nonlinearities. A robust stability condition for uncertain systems with time-varying delay and quantization/overflow nonlinearities is proposed by LMI(linear matrix inequality) and Lyapunov technique. It is shown that the proposed method is less conservative compared to the recent results by numerical examples.

Key Words : Finite wordlength effects, Robust stability, Time delay, Polytopic uncertainty, LMI

1. 서 론

고정 소수점(fixed-point) 연산을 가지는 하드웨어나 컴퓨터를 이용하는 이산 시간시스템의 구현은 양자화나 오버플로우 등의 유한 어장(finite wordlength)으로 인한 비선형성이 발생한다[1-3]. 이러한 비선형성은 설계한 시스템의 불안정 요소가 되므로 유한어장을 가지는 이산 시스템에 대한 안정성 문제에 대한 연구[4-8]가 최근 진행되고 있다. 또한, 시간지연과 불확실성을 가지는 시스템에 대한 연구도 시스템의 안정성과 밀접한 관련이 있으므로 최근까지도 많이 연구되어지고 있다. 따라서, 시스템의 동적 모델에서 시간지연과 불확실성 및 비선형성을 포함하는 시스템에 대한 이산시간 시스템에 대한 강인 안정성에 대한 해석 문제는 매우 중요하다. 또한, 시간지연을 다루는 방법에서 지연 독립적(delay-independent)인 방법보다 지연 종속적인 방법(delay-dependent)이 덜 보수적(less conservative)임이 잘 알려져 있다[9-11]. 따라서, 양자화와 오버플로우의 합성 비선형성과 구간 시변 시간지연을 가지는 불확실 지연시스템에 대해서 지연 종속 강인 안정성조건을 제시하고자 한다.

최근 양자화와 오버플로우 비선형성을 이용하는 지연시스템의 강인 안정성 조건은 Kandanvli와 Kar[3,6,7,8]에 의하여 많은 연구가 이루어져 왔다. Kandanvli와 Kar[6]은 포화(saturation) 비선형을 가지는 이산시간 상태 지연 시스템의 강인 안정성 조건을 선형행렬부등식(linear matrix inequality) 접근방법으로 제안하였다. 하지만 다루는 비선형성이 포화에만 해당하고 시간지연도 시불변이었다. 또한, Kandanvli와 Kar[7]은 양자화와 오버플로우 비선형성을 가지는 상태 지연 시스템의 강인 안정성 조건을 선형행렬부등식 기법으로 제시하였다. 하지만 시불변 시간지연을 가지는 시스템에 대하여 지연독립적인 방법으로 조건을 제안했다. 이러한 문제를 해결하기 위하여, Kandanvli와 Kar[8]은 양자화와 오버플로우의 비선형성과 정합조건(matching condition)을 가지는 불확실성 및 시변 시간지연을 가지는 이산시간 지연 시스템에 대하여 지연 종속 강인 안정성 조건을 제시하였다. 하지만, 양자화와 오버플로우의 다양한 혼합 비선형성에 대한 강인 안정성 조건을 제시하지 못한다는 단점이 있다. 그리고 불확실성을 다루는 기법에서도 정합조건을 다루는 변수 불확실성 접근방법에 비하여 폴리토픽 불확실성(polytopic uncertainty) 기법이 덜 보수적임이 알려져 있다. 따라서, 본 논문에서는 양자화와 오버플로우의 다양한 혼합 비선형성에 대하여 기존 결과[8]보다 양자화와 오버플로우의 혼합 비선형성의 넓은 범위에서 강인 안정성 조건을 제시하고 폴리토픽 불확실성을 사용하여 기존의 보수성을 줄이고자 한다.

본 논문에서는 양자화와 오버플로우의 혼합 비선형성을 가지는 폴리토픽 불확실 지연 시스템에 대하여 지연 종속 강인 안정성 조건을 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식으로 제시한다. 적절한 리아푸노프 함수와 Finsler's lemma를 이용하여 기존의 결과보다 넓은 범위의 비선형성에서도 강인 안정성을 만족하고 시변 시간지연에 대해서도 덜 보수적이도록 강인 안정성 조건을 제시한다. 마지막으로 몇 가지 예제를 통하여 본 논문에서 제안한 알고리듬의 타당성과 우수성을 보인다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. I, 0과 R^r은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, 영행렬과 $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다. $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이고, $\langle X\rangle$는 $X+X^T$ 를 의미한다.

* Corresponding Author : Department of Electronic Eng., Sun Moon University
E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr
Received : August 6, 2012; Accepted : November 12, 2012

2. 문제설정

시변 시간지연을 가지는 이산시간 불확실성 특이시스템

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \mathcal{O}\{\mathcal{Q}(y(k))\} = f(y(k)) \\
&= \left[f_1(y_1(k))\ f_2(y_2(k)) \cdots f_n(y_n(k)) \right]^T \\
y(k) &= Ax(k) + A_d x(k-d(k)) \\
&= \left[y_1(k)\ y_2(k) \cdots y_n(k) \right]^T \\
x(k) &= \phi(k), \quad k = -d_2, -d_2+1, \ldots, 0
\end{aligned} \tag{1}
$$

을 다룬다. 여기서, $x(k) \in R^n$는 상태변수, $y(k) \in R^n$는 측정출력, $\phi(k)$는 초기함수, $f(\bullet)$는 양자화 비선형함수인 $\mathcal{Q}(\bullet)$와 오버플로우 비선형함수인 $\mathcal{O}(\bullet)$의 합성 비선형함수(composite nonlinear function)이다. 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. 시스템 행렬은 잘 모르지만 폴리토프형의 알고 있는 볼록 컴팩트 집합인

$$
\Xi := (A, A_d) \in \Omega \tag{2}
$$

에 속한다고 가정한다. 여기서 Ω는

$$
\Omega := \left\{ \Xi(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \Xi_i,\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 1 \right\} \tag{3}
$$

이고 $\Xi_i := (A_i, A_{di}) \in \Omega, (i = 1, \ldots, N)$이며, Ξ_i는 다면 정의역(polyhedral domain) Ω의 i번째 꼭지점(vertex)을 표시한다. 구간을 가지는 시변 시간지연항은

$$
0 \leq d_1 \leq d(k) \leq d_2 \tag{4}
$$

를 만족하는 정수이다. 여기서, d_1는 시간지연 하한값(lower bound)이고 d_2는 시간지연의 상한값(upper bound)이 된다. 그리고 $d_1 = d_2$이면 $d(k)$는 시불변 시간지연항이 된다. 합성 비선형함수 $f(y(k))$는 섹터(sector) 구간 $[k_o, k_q]$에 제한되고

$$
f_i(0) = 0,\ k_o y_i(k)^2 \leq f_i(y_i(k)) y_i(k) \leq k_q y_i(k)^2, (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}
$$

로 정의한다[7]. 여기서, $y_i(k)$는 $y(k)$의 i번째 요소이고, 각 값들은

$$
k_q = \begin{cases} 1 & \text{for } \textit{magnitude truncation} \\ 2 & \text{for } \textit{round off} \end{cases}
\tag{6}
$$

$$
k_o = \begin{cases} 0 & \text{for } \textit{zeroing saturation} \\ -\dfrac{1}{3} & \text{for } \textit{triangular} \\ -1 & \text{for } \textit{two's complement} \end{cases}
$$

으로 정의된다[8]. 식 (1), (5)와 (6)의 표현은 재료 롤링공정, 재료 절삭공정, 유한 어장의 비선형성을 가지는 불확실 이산시스템, 하이퍼큐브(hypercubes)에서 정의되는 신경회로망, 유한 레지스터 길이에서 구현되는 고정 상태 공간 디지털 필터, 시간지연 시스템 등 많은 공학 문제에서 사용된다[7].

아래의 보조정리 1은 Finsler의 보조정리[12]이며, 본 논문에서 제안하는 정리의 증명과정에서 필요하다.

보조정리 1 [12]: $x \in R^n$, $Q = Q^T \in R^{n \times n}$, $rank(B) < n$ 을 만족하는 $B \in R^{m \times n}$ 이라고 두면 아래의 조건은 모두 동일하다.

i) $x^T Q x < 0,\ \forall Bx = 0,\ x \neq 0$
ii) $B^{\perp T} Q B^{\perp} < 0$
iii) $\exists \mu \in R:\ Q - \mu B^T B < 0$
iv) $\exists X \in R^{n \times m}:\ Q + XB + B^T X^T < 0$

여기서, $B^{\perp}$는 B의 영공간(null space)의 기저(basis)이다.

따라서. 본 논문의 목적은 식 (1)~(6)으로 표현되는 시스템의 강인 안정성 조건을 구하고자 하는 모든 변수의 견지에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 표현으로 구하는 것이다.

정리 1: 식 (1)~(6)으로 표현되는 폴리토픽 불확실성 지연시스템을 고려한다. 아래의 주어진 선형행렬부등식

$$
\Psi_i = \begin{bmatrix} \Psi_{1i} & \Psi_{2i} \\ * & \Psi_{3i} \end{bmatrix} < 0 \tag{7}
$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬(positive-definite matirx) P, Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, 양의 정부호 대각행렬(diagonal matrix) G와 행렬 $M_j (j = 1, \ldots, 12)$, $X_k (k = 1, \ldots, 5)$ 가 존재하면, 식 (1)~(6)으로 표현되는 불확실 이산시간 지연 시스템은 강인 안정하다. 여기서, 몇 가지 변수들은

$$
\Psi_{1i} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ * & -Q_1 - \langle X_2 A_{di} \rangle & -M_8^T - A_{di}^T X_3^T & -M_2^T - A_{di}^T X_4^T \\ * & * & -Q_2 - \langle M_9 \rangle & -M_3^T - M_{10} \\ * & * & * & -Q_3 - \langle M_4 \rangle \end{bmatrix}
$$

$$
\Psi_{2i} = \begin{bmatrix} \Psi_{21} & M_6 + M_{12} + X_1 - A_i^T X_6^T & d_2 M_1^T & d_1 M_7^T \\ -A_{di}^T X_5^T & X_2 - A_{di}^T X_6^T & d_2 M_2^T & d_1 M_8^T \\ -M_{11} & X_3 - M_{12} & d_2 M_3^T & d_1 M_9^T \\ -M_5 & X_4 - M_6 & d_2 M_4^T & d_1 M_{10}^T \end{bmatrix}
$$

$$
\Psi_{11} = -P + d^* Q_1 + Q_2 + Q_3 + d_{12} S_1 + d_1 S_2 + \langle M_1 \rangle + \langle M_7 \rangle - \langle X_1 A_i \rangle
$$

$$
\Psi_{12} = M_2 + M_8 - X_1 A_{di} - A_i^T X_2^T
$$

$$
\Psi_{13} = M_3 - M_7^T + M_9 - A_i^T X_3^T
$$

$$
\Psi_{14} = -M_1^T + M_4 + M_{10} - A_i^T X_4^T
$$

$$
\Psi_{21} = M_5 + M_{11} - A_i^T X_5^T - d_{12} S_1 - d_1 S_2
$$

$$
\Psi_{3i} = \begin{bmatrix} \Psi_{31} & X_5 + (k_q + k_o) G & d_2 M_5^T & d_1 M_{11}^T \\ * & \langle X_5 \rangle - 2 k_q k_o G & d_2 M_6^T & d_1 M_{12}^T \\ * & * & -d_2 S_1 & 0 \\ * & * & * & -d_1 (S_2 - S_1) \end{bmatrix}
$$

$$
\Psi_{31} = P - 2G + d_{12} S_1 + d_1 S_2
$$

$$
d_{12} = d_2 - d_1, \quad d^* = d_{12} + 1, \quad \eta(k) = f(y(k)) - x(k)
$$

과 같이 정의한다.

증명: 적절한 리아푸노프 함수(Lyapunov function)를

$$V(k)=V_1(x(k))+V_2(x(k))+V_3(x(k))+V_4(x(k))$$

$$\begin{aligned}
V_1(x(k)) &= x(k)^T P x(k)\\
V_2(x(k)) &= \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x(i)^T Q_1 x(i) + \sum_{(j=-d_2+2)}^{k-1}\ \sum_{(l=k+j-1)}^{k-1} x(l)^T Q_1 x(l)\\
V_3(x(k)) &= \sum_{i=k-d_1}^{k-1} x(i)^T Q_2 x(i) + \sum_{i=k-d_2}^{k-1} x(i) Q_3 x(i)\\
V_4(x(k)) &= \sum_{(\beta=-d_2+1)}^{-d_1}\ \sum_{(j=k-1+\beta)}^{k-1} \eta(j)^T S_1 \eta(j)\\
&\quad + \sum_{(\beta=-d_1+1)}^{0}\ \sum_{(j=k-1+\beta)}^{k-1} \eta(j)^T S_2 \eta(j)
\end{aligned} \tag{8}$$

과 같이 설정하고, $V(x(k))$의 전방향 차분(forward difference) $\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k))$을 구하면

$$\Delta V_1(x(k)) = f(y(k))^T P f(y(k)) - x(k)^T P x(k) \tag{9}$$

$$\Delta V_2(x(k)) \le d^* x(k)^T Q_1 x(k) - x(k-d(k))^T Q_1 x(k-d(k))$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_3(x(k)) = & \ x(k)^T Q_2 x(k) - x(k-d_1)^T Q_2 x(k-d_1)\\
& + x(k)^T Q_3 x(k) - x(k-d_2)^T Q_3 x(k-d_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_4 &= d_{12}\eta(k)^T S_1 \eta(k) + \sum_{j=k-d_1}^{k-1} \eta(j)^T S_1 \eta(j) - \sum_{j=k-d_2}^{k-1} \eta(j)^T S_1 \eta(j)\\
&\quad + d_1 \eta(k)^T S_2 \eta(k) - \sum_{j=k-d_1}^{k-1} \eta(j)^T S_2 \eta(j)\\
&= d_{12}\eta(k)^T S_1 \eta(k) - \sum_{j=k-d_2}^{k-1} \eta(j)^T S_1 \eta(j) + d_1 \eta(k)^T S_2 \eta(k)\\
&\quad - \sum_{j=k-d_1}^{k-1} \eta(j)^T (S_2 - S_1) \eta(j)
\end{aligned}$$

와 같다. 식 (9) 몇 가지 항을 Zhang과 Han[12]의 보조정리 1의 유한 합 부등식(finite sum inequality) 방법과 유사하게 정리하면

$$-\sum_{j=k-d_2}^{k-1} \eta(j)^T S_1 \eta(j) \le \zeta(k)^T \Pi_1 \zeta(k) + d_2 \zeta(k)^T Y_1^T S_1^{-1} Y_1 \zeta(k) \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=k-d_1}^{k-1} \eta(j)^T (S_2 - S_1) \eta(j)\\
& \le \zeta(k)^T \Pi_2 \zeta(k) + d_1 \zeta(k)^T Y_2^T (S_2 - S_1)^{-1} Y_2 \zeta(k)
\end{aligned} \tag{11}$$

로 전개된다. 여기서 변수들은 아래와 같이 정의한다.

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \langle M_1 \rangle & M_2 & M_3 & -M_1^T + M_4 & M_5 & M_6\\ * & 0 & 0 & -M_2^T & 0 & 0\\ * & * & 0 & -M_3^T & 0 & 0\\ * & * & * & -\langle M_4 \rangle & -M_5 & -M_6\\ * & * & * & * & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} \langle M_7 \rangle & M_8 & -M_7^T + M_9 & M_{10} & M_{11} & M_{12}\\ * & 0 & -M_8^T & 0 & 0 & 0\\ * & * & -\langle M_9 \rangle & -M_{10} & -M_{11} & -M_{12}\\ * & * & * & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \end{bmatrix}\\
Y_2 &= \begin{bmatrix} M_7 & M_8 & M_9 & M_{10} & M_{11} & M_{12} \end{bmatrix}\\
\zeta(k) &= \begin{bmatrix} x(k)^T & x(k-d(k))^T & x(k-d_1)^T & x(k-d_2)^T & f(y(k))^T & y(k)^T \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

식 (9)~(11)의 수식을 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned}
& \Delta V(x(k)) \le\\
& \zeta(k)^T \left\{ \Omega_1 + d_2 Y_1 S_1^{-1} Y_1 + d_1 Y_2^T (S_2 - S_1)^{-1} Y_2 \right\} \zeta(k) - 2\gamma < 0
\end{aligned} \tag{12}$$

와 같고, 변수들은

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & \Omega_{15} & \Omega_{16}\\ * & -Q_1 & -M_8^T & -M_2^T & 0 & 0\\ * & * & \Omega_{17} & -M_3^T - M_{10} & -M_{11} & -M_{12}\\ * & * & * & -Q_3 - \langle M_4 \rangle & -M_5 & -M_6\\ * & * & * & * & \begin{pmatrix} P - 2G\\ + d_{12} S_1 + d_1 S_2 \end{pmatrix} & (k_q + k_o) G\\ * & * & * & * & * & -2 k_q k_o G \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= -P + d^* Q_1 + Q_2 + Q_3 + d_{12} S_1 + d_1 S_2 + \langle M_1 \rangle + \langle M_7 \rangle\\
\Omega_{12} &= M_2 + M_8,\ \Omega_{13} = M_3 - M_7^T + M_9,\ \Omega_{14} = -M_1^T + M_4 + M_{10}\\
\Omega_{15} &= M_5 + M_{11} - d_{12} S_1 - d_1 S_2,\ \Omega_{16} = M_6 + M_{12}\\
\Omega_{17} &= -Q_2 - \langle M_9 \rangle\\
\gamma &= [k_q y(k) - f(y(k))]^T G [f(y(k)) - k_o y(k)]
\end{aligned}$$

으로 정의된다. 여기서, G는 양의 정부호 대각행렬이다. 식 (5)에 의해서 $\gamma \ge 0$이므로 식 (12)는

$$\Delta V(x(k)) \le \zeta(k)^T \left\{ \Omega_1 + d_2 Y_1 S_1^{-1} Y_1 + d_1 Y_2^T (S_2 - S_1)^{-1} Y_2 \right\} \zeta(k) < 0 \tag{13}$$

의 조건을 만족하는 충분조건으로 표현할 수 있다. Finsler's lemma인 보조정리 1의 ⅰ)과 ⅳ)를 이용하면, 식 (13)은

$$\Omega_1 + d_2 Y_1 S_1^{-1} Y_1 + d_1 Y_2^T (S_2 - S_1)^{-1} Y_2 + XB + B^T X^T < 0 \tag{14}$$

의 등가 조건이 된다. 여기서, 변수들은 보조정리 1에 의하여

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} -A & -A_d & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}\\
X &= \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T & X_3^T & X_4^T & X_5^T & X_6^T \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{15}$$

가 되고, $B\zeta(k)=0$ 을 만족한다. 폴리토픽 불확실성을 가지는 식 (2)를 식 (14)의 조건에 대입하면

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(\Omega_1 + d_2 Y_1 S_1^{-1} Y_1 + d_1 Y_2^T (S_2 - S_1)^{-1} Y_2 + XB + B^T X^T \right) < 0 \tag{16}$$

과 같이 된다. 따라서, 식 (16)의 조건은 슈어 여수(Schur complement) 정리와 식 (15)를 이용하여 정리하면 모든 변수의 견지에서 볼록최적화가 가능한 식 (7)의 선형행렬부등식 조건이 된다. 따라서, 시변 시간지연과 폴리토픽 불확실성 및 식 (5)와 (6)에서 정의되는 양자화와 오버플로우 비선형성이 존재하더라도 식 (7)을 만족하면 식 (1)의 시스템은 강인안정하다. ■

정리 1을 비롯한 기존 연구결과들[7,8]의 해의 존재는 $[k_o,k_q]$ 의 섹터 구간의 값에 따라 달라질 수 있다. 정리 1은 기존 연구결과가 가지는 양자화와 오버플로우 비선형성 구간과 시변 시간지연 더 넓은 범위에서 강인 안정성을 보장한다. 다음의 예제를 통하여 결과를 보여준다. 양자화와 오버플로우 비선형성을 가지는 폴리토픽 불확실 이산시간 지연 시스템에 대한 타당성과 우수성을 확인하기 위하여 몇 가지 예제를 다룬다.

예제 1: 제안한 강인 안정성 조건을 기존 결과와 비교하기 위하여 Kandanvli와 Kar[8]과 동일한 불확실성 구간의예제를 가지도록

$$A=\begin{bmatrix}0.8 & 0\\ 0.05+\alpha_1 & 0.9\end{bmatrix},\quad A_d=\begin{bmatrix}-0.1 & 0\\ -0.2 & -0.1+\alpha_2\end{bmatrix} \tag{17}$$

$|\alpha_1|<0.001,\quad |\alpha_2|<0.001,\quad [k_o,k_q]=[0,1]$

과 같은 시스템을 고려한다. Kandanvli와 Kar[8]의 논문에서는 불확실성이 정합조건의 형태이므로 본 논문에서 다루는 폴리토픽 불확실성에서 α_1과 α_2를 식 (17)로 잡으면 동일한 불확실성을 가지게 된다. $d_1=2$로 두면 Kandanvli와 Kar[8]의 결과는 $2\le d(k)\le 8$ 의 경우에 강인 안정성을 만족하지만 제안한 정리 1은 $d_2=8$보다 큰 값에도 안정성을 만족한다. 시변 시간지연의 값이 $d_1=2$이고 $d_2=15$인 경우에도 정리 1을 만족하는 변수는

$$P=\begin{bmatrix}34.5929 & 10.5618\\ 10.5618 & 98.0100\end{bmatrix},\ S_1=\begin{bmatrix}1.4576 & -0.2164\\ -0.2164 & 1.1889\end{bmatrix}$$
$$S_2=\begin{bmatrix}13.1478 & -1.7345\\ -1.7345 & 11.1156\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}58.7213 & 0\\ 0 & 88.3881\end{bmatrix}$$
$$Q_1=\begin{bmatrix}32.8374 & -7.4717\\ -7.4717 & 9.0171\end{bmatrix},\ Q_2=\begin{bmatrix}33.3143 & -4.6237\\ -4.6237 & 23.3409\end{bmatrix}$$
$$Q_3=\begin{bmatrix}34.0912 & -4.2901\\ -4.2901 & 24.9696\end{bmatrix},\ M_1=\begin{bmatrix}0.0296 & -0.0103\\ -0.0127 & 0.0026\end{bmatrix}$$
$$M_2=\begin{bmatrix}-0.0481 & 0.0195\\ -0.0074 & -0.0204\end{bmatrix},\ M_3=\begin{bmatrix}0.0030 & -0.0016\\ -0.0017 & -0.0007\end{bmatrix}$$
$$M_4=\begin{bmatrix}0.0097 & 0.0056\\ 0.0070 & 0.0261\end{bmatrix},\ M_5=\begin{bmatrix}0.0212 & -0.0148\\ -0.0123 & -0.0110\end{bmatrix}$$
$$M_6=\begin{bmatrix}0.0308 & 0.0075\\ -0.0081 & 0.0155\end{bmatrix},\ M_7=\begin{bmatrix}1.5748 & -0.5290\\ -0.6298 & 0.1948\end{bmatrix}$$
$$M_8=\begin{bmatrix}-2.5836 & 0.9712\\ -0.5417 & -1.1046\end{bmatrix},\ M_9=\begin{bmatrix}0.6986 & 0.2801\\ 0.3469 & 1.4961\end{bmatrix}$$
$$M_{10}=\begin{bmatrix}0.0025 & -0.0015\\ -0.0015 & -0.0008\end{bmatrix},\ M_{11}=\begin{bmatrix}1.1086 & -0.8050\\ -0.6561 & -0.6856\end{bmatrix}$$
$$M_{12}=\begin{bmatrix}1.6447 & 0.4520\\ -0.3566 & 1.0203\end{bmatrix},\ X_1=\begin{bmatrix}373.6322 & -68.7388\\ -97.6063 & 85.4056\end{bmatrix}$$
$$X_2=\begin{bmatrix}0.1637 & -0.4210\\ 0.9381 & -1.4767\end{bmatrix},\ X_3=\begin{bmatrix}0.4221 & 0.1990\\ 0.0975 & 0.8976\end{bmatrix}$$
$$X_4=\begin{bmatrix}0.0074 & 0.0032\\ 0.0013 & 0.0152\end{bmatrix},\ X_5=\begin{bmatrix}-44.9376 & 0.8942\\ 1.4653 & -50.3344\end{bmatrix}$$
$$X_6=\begin{bmatrix}491.0023 & -110.5443\\ -86.6980 & 105.5063\end{bmatrix}$$

와 같이 존재하므로 기존의 결과보다 덜 보수적(less conservative)임을 알 수 있다.

예제 2: 시불변 시간지연을 가지는 시스템[7]

$$A=\begin{bmatrix}0.8 & -2.6\\ 0.1+\delta_1 & 0\end{bmatrix},\quad A_d=\begin{bmatrix}0.001 & 0\\ 0 & 0.002+\delta_2\end{bmatrix} \tag{18}$$

$|\delta_1|<0.001,\quad |\delta_2|<0.001$

을 다룬다. 식 (4)에서 $d_1=d_2$로 두면 시불변 시간지연을 가지는 시스템이 된다. Kandanvli와 Kar[7]의 정리 1은 양자화와 오버플로우가 가지는 비선형 섹터 구간 $[k_o,k_q]\in\{[-1,1],[0,2],[-1,2],[-1/3,2]\}$에서 강인 안정성을 보장하지 못한다. 하지만, 본 논문의 정리 1에서는 $[k_o,k_q]\in\{[-1,1],[-1,2]\}$의 비선형성 섹터 구간 이외에는 양자화와 오버플로우의 합성 비선형을 가지는 시스템에 대해서 강인 안정성을 보장한다. 예제 1의 시스템에 대해서도 동일한 결과를 얻기 때문에 제안한 정리 1은 기존의 결과보다 훨씬 넓은 비선형 영역에 대해서도 강인 안정성을 만족함을 보여준다.

예제 3: 예제 1에서의 시스템에서 $|\alpha_1|<0.5$과 $|\alpha_2|<0.5$같은 불확실성 구간과 $d_1=5$를 가지는 경우의 시스템에 대하여 비선형성 섹터별 구간에 따라 가질 수 있는 시변 시간지연의 상한치를 구하면 표 1과 같은 결과가 나온다. 예제 3에서 다루고자 하는 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 시스템에서, 기존의 결과[6-8]를 가지고는 모든 비선형성 섹터에서 강인 안정성을 만족하지 못하지만 제안하는 정리 1은 4가지의 비선형성 섹터에서 강인 안정성을 만족하는 시변 시간지연의 상한치를 구할 수 있다.

표 1 $d_1=5$일 때 강인 안정성을 만족하는 d_2의 상한치
Table 1 The value of d_2 when $d_1=5$.

$[k_o\ \ k_q]$	$[0\ \ 1]$	$[0\ \ 2]$	$[-1/3\ \ 1]$	$[-1/3\ \ 2]$
d_2	67	10	26	7

참조 1: 예제 1은 기존의 변수 불확실성 시스템의 불확실성과 동일한 불확실성 범위를 가지도록 폴리토픽 불확실성을 정의하여 동일한 불확실성 범위에서 제안한 정리 1은 더 넓은 범위의 시변 시간지연과 다양한 비선형 섹터 구간에서 안정성 보장을 보임을 보였다. 예제 2에서는 시불변 시간지연을 가지는 기존 시스템과의 비교에서 기존의 결과가 2개의 비선형 섹터 구간에서 강인안정성을 만족하는 것을 보이는 반면에 제안하는 정리 1은 4개의 비선형 섹터 구

간에서 강인 안정성을 만족하고 있으므로 덜 보수적임을 보였다. 정리 3에서는 제안하는 정리 1에서 비선형성 섹터별로 강인 안정성을 만족하는 시변 시간지연의 상한치를 비교하였다.

4. 결 론

본 논문에서는 양자화와 오버플로우의 합성 비선형성과 구간 시변 시간지연을 가지는 폴리토픽 불확실 지연 시스템에 대하여 강인 안정성 조건을 선형행렬부등식 기법으로 제안하였다. 기존 결과의 보수성을 해결하기 위하여 적절한 리아푸노프 함수와 Finsler's lemma 및 유한 합 부등식을 이용하여 강인 안정성 조건의 해가 존재할 충분조건을 구하였다. 기존에서 다루는 변수 불확실성보다 덜 보수적인 폴리토픽 불확실성을 가지는 시스템으로 확장하여서 기존결과보다 강인 안정성을 만족하는 합성 비선형성의 범위와 시변 시간지연의 범위를 넓혔다. 마지막으로 예제를 통하여 기존결과보다 덜 보수적임을 보였고 제안한 정리의 타당성을 보였다.

References

[1] H. Kar and V. Singh, "Stability analysis of 1-D and 2-D fixed-point state -space digital filters using any combunation of overflow and quantization nonlinearities," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 5, pp. 1097-1105, 2001.

[2] V. Singh, "Stability analysis of discrete-time systems in a state-space realisation with state saturation nonlinearities: linear matrix inequlaity approach," *IEE Proc. Control Theory & Applications*, vol. 152, pp. 9-12, 2005.

[3] H. Kar, "A novel criterion for the global asymptotic stability of 2-D discrete systems described by Roesser model using saturation arithmetic," *Digital signal Processing*, vol. 20, pp. 1505-1510, 2010.

[4] L. J. Leclerc and P. H. Bauer, "New criteria for asymptotic stability of one- and multi dimensional state-space digital filters in fixed-point arithemetic," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no. 1, pp. 46-53, 1994.

[5] H. Kar and V. Singh, "Robust stability of 2-D discrete systems described by the Fornasini-Marchesini second model employing quantization/overflow nonlinearities," *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, vol. 51, no. 11, pp. 598-602, 2004.

[6] V. K. R. Kandanvli and H. Kar, "Robust stabilityof discrete-time state-delayed systems with saturation nonlinearities: linear matrix inequality approach," *Signal Processing*, vol. 89, pp. 161-173, 2009.

[7] V. K. R. Kandanvli and H. Kar, "An LMI condition for robust stability of discrete-time state-delayed systems using quantization/overflow nonlinearities," *Signal Processing*, vol. 89, pp. 2091-2102, 2009.

[8] V. K. R. Kandanvli and H. Kar, "Delay-dependent LMI condition for global asymptotic stability of discrete-time uncertain state-delayed systems using quantization/overflow nonlinearities," *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, vol. 21, pp. 1611-1622, 2011.

[9] M. S. Mahmoud, *Robust Control and Filtering for Time-delay Systems*, New York, Marcel Dekker, Inc., 2000.

[10] S. Ma, C. Zhang, and Z. Zhang, "Delay-dependent robust stability and stabilization for uncertain discrete singular systems with time-varying delays," *Journal of Comput. & Applied Math.*, vol. 217, no. 1, pp. 194-211, 2008.

[11] Z. Wu, H. Su, and J. Chu, "Robust stabilization for uncertain discrete singular systems with state delay," *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, vol. 18, pp. 1532-1550, 2008.

[12] W. Li, E. Todorov, and R. E. Skelton, "Estimation and control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities," *American Control Conference*, Portland, OR, USA, pp. 1811-1816, 2005.

[13] X. M. Zhang and Q. L. Han, "Robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems with time-varying delay based on a finite sum inequality," *IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Express Briefs,* vol. 53, no. 12, pp. 1466-1470, 2006.

저 자 소 개

김 종 해 (金 鍾 海)

1993년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전자공학과 졸업(공박). 1998년～2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년～2001년 일본 오사카대학 객원연구원. 2010년～2011년 미국 조지아텍 방문연구원. 2002년～현재 선문대학교 전자공학과 부교수.

Tel : 041-530-2352

E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr