The Korean Journal of Applied Statistics (2012) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2012.25.5.757
25(5), 757–773

Performance Analysis of Economic VaR Estimation using Risk Neutral Probability Distributions

Se Jeong Heo[1] · Sung Chil Yeo[2] · Tae Hun Kang[3]

[1]Department of Applied Statistics, Konkuk University
[2]Department of Applied Statistics, Konkuk University
[3]School of Business Administration, Kyungsung University

(Received July 31, 2012; Revised September 3, 2012; Accepted September 12, 2012)

Abstract

Traditional value at risk(S-VaR) has a difficulity in predicting the future risk of financial asset prices since S-VaR is a backward looking measure based on the historical data of the underlying asset prices. In order to resolve the deficiency of S-VaR, an economic value at risk(E-VaR) using the risk neutral probability distributions is suggested since E-VaR is a forward looking measure based on the option price data. In this study E-VaR is estimated by assuming the generalized gamma distribution(GGD) as risk neutral density function which is implied in the option. The estimated E-VaR with GGD was compared with E-VaR estimates under the Black-Scholes model, two-lognormal mixture distribution, generalized extreme value distribution and S-VaR estimates under the normal distribution and GARCH$(1,1)$ model, respectively. The option market data of the KOSPI 200 index are used in order to compare the performances of the above VaR estimates. The results of the empirical analysis show that GGD seems to have a tendency to estimate VaR conservatively; however, GGD is superior to other models in the overall sense.

Keywords: E-VaR, S-VaR, generalized gamma distribution, risk neutral probability distribution, back-testing.

1. 서론

오늘날 금융공학의 발달로 다양한 금융상품들이 개발되면서 이들 금융상품을 이용한 위험관리는 금융기관은 물론 일반 기업들에까지 보편화되어있다. 특히 무역거래가 많은 우리나라 기업들의 경우 환율 및 원자재 가격 등의 변동 위험을 제거하기 위해 관련 파생상품을 이용하여 위험관리를 하는 것이 일반적이다. 수출업체는 선물환거래를 통해 결제대금으로 받아 올 달러의 환율이 떨어질 위험을 헤지할 수 있고, 원자재 수업업체는 선물환거래 및 원자재에 대한 선물거래를 통해 원자재 값 상승에 따른 위험을 헤지할 수 있다. 이렇듯 정상적인 시장여건 하에서 파생상품을 이용한 위험관리방법은 꽤 유용하며 그만큼 널리 이용되고 있다. 그러나 시장상황이 비정상적이라면 파생상품을 이용한 위험관리는 오히려 더 큰 위험을 초래할 수도 있다. 2008년 발생한 KIKO사태가 그 예이다. 당시 미국의 서브프라임 모기지사태로

This paper was supported by Konkuk University in 2010.
[2]Corresponding author: Professor, Department of Applied Statistics, Konkuk University, 120 Neungdong-ro, Gwangjin-gu, Seoul 143-701, Korea. E-mail: scyeo@konkuk.ac.kr

주가는 폭락하고 외환시장에서 달러의 가치는 급등했다. 사건 발생 이전까지의 원화강세로 추가적인 달러가치 하락 위험에 대비하기 위해 KIKO에 가입했던 수많은 기업들은 예상 밖의 환율 급등으로 큰 손실을 입었다. 미국의 서브프라임 모기지사태가 발생하면서 환율의 변동성이 급격히 커진데다 파생상품의 큰 레버리지로 인해 손실이 더욱 확대되었기 때문이다.

최근 금융시장의 자율화와 국제화로 시장변수들의 변동성이 점차 커지고 있어 이러한 금융위기는 언제든지 재발 가능하다. 이와 같은 변동성의 증가에 따른 위험에 대비하기 위해 미래에 발생할 수 있는 손실위험에 대한 측정방법들을 고려해 볼 수 있는데, VaR(Value at Risk)는 그러한 위험측정시스템 중 하나이다. VaR는 정상적인 시장 상황에서 주어진 신뢰수준으로 보유기간 동안에 보유한 자산포트폴리오에 대해 발생할 수 있는 최대손실금액을 의미한다. 신뢰수준과 보유기간 등은 사용자의 필요에 따라 적절하게 이용가능한데, 바젤위원회는 99%의 신뢰수준과 10일의 보유기간을 이용하여 VaR를 추정하도록 권장하고 있다. 그런데 통상적으로 이용되는 Statistical-VaR(S-VaR)는 과거의 기초자산 수익률 자료를 이용하여 분포의 모수와 VaR를 추정한다. 이 방법은 자료의 수집과 계산이 비교적 간단하다는 장점이 있지만, 과거의 자료에서 추정한 모수와 VaR의 값을 이용하여 미래의 사건을 과연 정확하게 예측할 수 있는가하는 문제점이 제기되고 있다. Aït-Sahalia와 Lo (2000)는 이러한 S-VaR의 문제점을 보완하기 위하여 과거의 자료가 아닌 시장가격을 이용해 VaR를 추정하는 Economic-VaR(E-VaR)를 제안하였다. 옵션가격에는 미래에 발생할 수 있는 변동에 대한 시장의 기대가 반영되어있으므로 옵션가격을 이용하여 추정된 E-VaR가 기초자산에 대한 과거의 자료를 바탕으로 추정된 S-VaR에 비해 우수할 것으로 기대할 수 있다.

한편, 옵션가격에 내재된 분포에 대한 가정으로는 정규분포가 가장 널리 이용되고 있다. 그러나 금융자산의 분포는 두터운 꼬리와 비대칭적인 분포형태의 특징을 가지고 있어 내재분포로 정규분포를 가정할 경우 VaR를 과소평가할 위험이 있다. 따라서 정규분포를 가정한 VaR추정방법이 가진 문제점을 보완하기 위해 여러 가지 다른 확률분포들을 이용한 VaR의 추정방법들이 제시되고 있다. Ritchey (1990)와 Bahra (1997)는 Black-Scholes(BS)모형의 확장된 개념인 Two-Lognormal Mixture(TLM)분포를 이용한 옵션가격결정모형을 제시하였으며, Bali (2007), Markose와 Alentorn (2010) 등은 일반화극단치(generalized extreme value; GEV)분포를 내재분포로 이용하여 옵션가격결정모형을 제시하고 VaR에 대한 성과를 연구하였다. 특히 Kim과 Kang (2010)은 Markose와 Alentorn (2010)의 연구결과를 KOSPI 200 지수옵션시장자료에 적용하여 GEV의 유용성을 실증분석 하였다. 또한, Savickas (2002)는 Weibull분포를 이용한 옵션가격결정모형이 BS모형처럼 단순하면서도 BS모형에 비해 정확한 가격적합성과가 있음을 보였다.

본 논문에서는 금융자산에 대한 내재확률분포로 일반화감마분포(generalized gamma distribution; GGD)를 이용하여 옵션가격결정모형을 소개하고, 이를 바탕으로 E-VaR를 추정하여 그 성과를 위에서 언급한 내재분포를 갖는 모형들과 비교분석하였다. 일반화감마분포(GGD)는 지수분포, Weibull분포, 감마분포를 비롯하여 대수정규분포 등을 포함하는 분포로서 GGD를 옵션가격의 내재확률분포로 이용함으로써 다양한 금융자료에 더욱 유연하게 적합되는 모형을 추정할 수 있을 것으로 기대할 수 있다. 일반화감마분포와 관련한 옵션가격결정모형에 관한 주요 논문으로는 Fabozzi 등 (2009), Grith와 Kratschmer (2010) 등이 있는데, 이들 논문은 내재확률분포로 GGD를 사용하여 옵션가격을 나타내는데 대해 언급하고 있을 뿐 E-VaR에 대해서는 논의하지 않았다.

본 논문의 구성은 다음과 같이 이루어지고 있다. 먼저 1장의 서론에 이어 2장의 연구방법론에서는 위험중립 확률분포모형으로 GGD, BS, TLM, GEV 등을 포함하는 분포모형들에 대해 옵션가격결정모형과 내재모수의 추정에 대해 설명하고 이를 바탕으로 E-VaR의 추정과 사후검증방법에 대해 논의하였다. 그리고 3장의 실증분석에서는 2000년 1월부터 2007년 12월까지의 KOSPI 200 지수옵션시장 자료를

이용해 내재모수를 추정하고, 각 모형별로 추정된 E-VaR의 성과를 정규분포와 GARCH$(1,1)$모형하에서 얻어진 S-VaR와 함께 비교분석하였다. 마지막으로 제 4장에서는 본 논문의 결론과 함께 추후 연구 방향에 대해 언급하였다.

2. 연구방법론

2.1. 옵션가격결정모형과 내재모수의 추정

Harrison과 Pliska (1981)은 위험중립 확률분포를 포함하는 무차익 유러피언(European) 콜옵션 가격결정모형을 다음과 같이 제시하였다. S_t를 t시점에서의 기초자산가격, C_t를 행사가격 K와 만기 T를 갖는 유러피언 콜옵션 가격 그리고 이자율을 상수 r이라고 할 때 무차익 유러피언 콜옵션 가격결정모형은 식 (2.1)과 같다.

$$\begin{aligned} C_t(K) &= E_t^Q\left[e^{-r(T-t)}\max(S_T-K,0)\right] \\ &= e^{-r(T-t)}\int_K^\infty (S_T-K)g(S_T)dS_T, \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서 E_t^Q는 t시점에서의 모든 정보가 반영된 조건 하에서 위험중립기대값을 의미한다. 또한 $g(S_T)$는 만기시점에서 위험중립 확률밀도함수이다. 그리고 무차익 유러피언 풋옵션 가격결정모형은 식 (2.2)와 같다.

$$\begin{aligned} P_t(K) &= E_t^Q\left[e^{-r(T-t)}\max(K-S_T,0)\right] \\ &= e^{-r(T-t)}\int_0^K (K-S_T)g(S_T)dS_T. \end{aligned} \tag{2.2}$$

한편, t시점에서의 기초자산가격 S_t는 무차익 거래에서 마팅게일(martingale) 조건으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$S_t = e^{-r(T-t)}E_t^Q(S_T).$$

또한, 위험중립 확률분포에 내포된 모수의 추정을 위해서는 식 (2.3)에서와 같이 비선형최소제곱법을 이용하여 옵션의 시장가격과 추정된 이론가격의 차의 제곱합을 최소로 하는 모수를 찾는다.

$$\min\sum_{i=1}^n\left[C_t^M - C_t^Q\right]^2, \tag{2.3}$$

여기서 C_t^M는 t시점에서의 콜옵션 시장가격, C_t^Q는 위험중립 확률분포를 이용해 추정된 T시점에서의 콜옵션 가격을 나타낸다.

2.1.1. 일반화감마분포 금융자산수익률의 분포가 갖는 비대칭성을 설명하기 위해 Weibull분포와 대수정규분포를 내재분포로 이용하는 연구들이 진행되어왔다. Weibull분포와 대수정규분포는 모수에 따라 다양한 분포형태를 보이므로 자료에 대한 적합도가 높다는 장점을 가지고 있다. 그런데 일반화감마분포(GGD)는 이러한 Weibull분포와 대수정규분포를 비롯하여 지수분포, 감마분포 등을 포함하는 분포로서 GGD를 옵션가격의 내재확률분포로 이용할 경우 이들 분포에 비해 더욱 유연하게 자료가 적합될 수 있을 것으로 기대된다.

GGD는 척도모수(scale parameter) α, 멱모수(power parameter) β, 지표모수(index parameter) k의 세 모수를 포함하는데, 이때 세 모수는 모두 양의 값을 갖는다. GGD의 확률밀도함수 $g(x;\alpha,\beta,k)$는 식 (2.4)와 같다.

$$g(x;\alpha,\beta,k)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\beta k-1}\exp\left[-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], & x>0,\\ 0, & x\leq 0,\end{cases} \tag{2.4}$$

여기서 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$이다.

식 (2.4)에서 $k=1$이면 GGD는 Weibull분포, $\beta=1$이면 감마분포, $k=\beta=1$이면 지수분포를 각각 따르며, $k\to\infty$이면 대수정규분포로 수렴하는 것을 알 수 있다. GGD의 분포함수는 식 (2.5)와 같다.

$$G(x;\alpha,\beta,k)=I\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], \tag{2.5}$$

여기서 Γ는 불완전감마함수(incomplete gamma function)로 다음과 같이 정의된다.

$$I(k,y)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^y x^{k-1}e^{-x}dx.$$

Fabozzi 등 (2009)는 GGD를 만기시점에 주가 S_T의 위험중립확률분포로 가정하고 무차익 유러피언 콜옵션 가격결정모형을 식 (2.6)과 같이 유도하였다.

$$C_t^{GGD}=e^{-r(T-t)}\left[F-K-FI\left(k+\frac{1}{\beta},\left(\frac{K}{\alpha}\right)^{\beta}\right)+KI\left(k,\left(\frac{K}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right]. \tag{2.6}$$

여기서 F는 무차익조건 하에서 S_T의 기대값으로 다음과 같다.

$$F=E_t^Q(S_T)=\alpha\frac{\Gamma\left(k+\dfrac{1}{\beta}\right)}{\Gamma(k)}.$$

그리고 무차익 유러피언 풋옵션 가격결정모형은 식 (2.7)과 같다.

$$P_t^{GGD}=e^{-(T-t)}\left[KI\left(k,\left(\frac{K}{\alpha}\right)^{\beta}\right)-FI\left(k+\frac{1}{\beta},\left(\frac{K}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right]. \tag{2.7}$$

따라서 식 (2.6)과 식 (2.7)로부터 아래의 풋-콜 패리티(parity) 관계를 얻는다.

$$C_t^{GGD}-P_t^{GGD}=e^{-r(T-t)}(F-K).$$

2.1.2. Black-Scholes 모형 Black과 Scholes (1973)가 제시한 옵션가격결정모형은 주가가 대수정규분포를 따르며, 주식과 주식의 파생상품인 옵션으로 무위험포트폴리오를 구성할 수 있고, 차익거래기회가 존재하지 않을 때 무위험포트폴리오의 수익률은 무위험이자율과 같아진다는 것을 기본 가정으로 하고 있다. 이러한 가정을 바탕으로 유도된 무배당주식에 대한 유러피언 콜옵션가격결정모형은 C_t^{BS}를 t시점에서 콜옵션의 이론가격이라 할 때 다음과 같이 주어진다.

$$C_t^{BS}=S_tN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{2.8}$$

여기서

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

이고 S_t: t시점에서의 기초자산가격, K: 행사가격, r: 무위험이자율, T: 만기, σ: 기초자산의 변동성, $N(x)$: 누적정규분포의 함수이다.

한편, 풋옵션 가격결정모형은 아래와 같다.

$$P_t^{BS} = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t(N(-d_1). \tag{2.9}$$

2.1.3. Two-Lognormal Mixture 분포모형 금융시계열자료의 비대칭과 첨예도에 대한 BS모형의 단점을 보완하기 위해 위험중립확률분포로 k-lognormal mixture분포를 이용하는 것을 고려해 볼 수 있다. k-lognormal mixture분포는 BS모형을 포함하면서 분포의 비대칭과 첨예도를 반영하는 장점을 가진 본포모형이라 할 수 있다. 본 연구에서는 k-lognormal mixture분포 중에서도 BS모형을 대신하여 가장 빈번하게 고려되는 Two-Lognormal Mixture(TLM)분포를 실증분석에 이용하였다.

TLM의 분포함수를 $f(S_T)$라고 할 때, $f(S_T)$는 식 (2.10)과 같이 두 개의 로그정규분포함수 $L(\alpha_i, \beta_i : S_T)$의 가중평균으로 나타낼 수 있다.

$$f(S_T) = \sum_{i=1}^{2} \left[\theta_i L\left(\alpha_i, \beta_i; S_T\right)\right], \tag{2.10}$$

여기서

$$L(\alpha_i, \beta_i; S_T) = \frac{1}{S_T\beta_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln S_T - \alpha_i)^2}{2\beta_i^2}\right]$$

이고, θ_i는 가중치를 의미하며 α_i와 β_i는 다음과 같다.

$$\alpha_i = \ln(S_T)\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T, \qquad \beta_i = \sigma_i\sqrt{T}, \quad i = 1, 2.$$

Ritchey (1990)와 Bahra (1997)는 위험중립확률분포로 TLM을 이용하여 닫힌 해 형태의 유러피언 콜옵션 가격결정모형을 다음과 같이 유도하였다.

$$C_t^{TLM} = e^{-rT}\left[\theta\left\{\exp\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2\right)N(d_1) - KN(d_2)\right\} + (1-\theta)\left\{\exp\left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right)N(d_3) - KN(d_4)\right\}\right], \tag{2.11}$$

여기서

$$d_1 = \frac{-\ln K + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1}, \qquad d_2 = d_1 - \beta_1, \qquad d_3 = \frac{-\ln K + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2}, \qquad d_4 = d_3 - \beta_2$$

이다.

한편, TLM을 이용한 유러피언 풋옵션 가격결정모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_t^{TLM} = e^{-rT}\Bigg[&\theta\left\{-\exp\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2\right)N(-d_1) - KN(-d_2)\right\} \\ &+ (1-\theta)\left\{-\exp\left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right)N(-d_3) - KN(-d_4)\right\}\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.1.4. 일반화극단치분포 비대칭적이고 꼬리부분이 두터운 형태를 가지는 금융시계열 분포의 특성을 반영하기 위해 분포의 꼬리부분에 해당하는 극단의 데이터만을 이용하여 모형화하는 극단치이론(extreme value theory; EVT)이 주목받고 있다. EVT에서는 전체 데이터의 분포를 이용하는 것이 아니라 꼬리부분의 데이터를 전체 데이터에서 분리해 VaR를 추정한다. 이를 통해 데이터의 많은 부분을 차지하고 있는 중심부분의 분포영향을 줄일 수 있으며 또한 데이터에 대해 특정한 분포를 가정하지 않고 VaR를 추정함으로써 가정한 분포와 실제 분포사이에 발생할 수 있는 오차를 줄일 수 있는 장점이 있다. EVT를 통해 얻어지는 확률분포에는 일반화극단치(GEV)분포와 일반화파레토분포(generalized Pareto distribution; GPD)가 있다. 본 연구에서는 GGD의 성과와 비교하기 위해 GEV를 위험중립확률분포에 적용하였다.

GEV의 분포함수와 확률밀도함수는 각각 아래의 식 (2.13)과 (2.14)와 같다.

$$F_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left\{1+\dfrac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right\}^{-\frac{1}{\xi}}\right], \quad 1+\dfrac{\xi(x-\mu)}{\sigma}>0, & \xi\neq 0, \\ \exp\left[-e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}\right], & \xi=0, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$f_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\left[1+\dfrac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right]^{-1-\frac{1}{\xi}} \exp\left[-\left\{1+\dfrac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right\}^{-\frac{1}{\xi}}\right], & \xi\neq 0, \\ \dfrac{1}{\sigma}\exp\left[-\dfrac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\exp\left[-e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}\right], & \xi=0, \end{cases} \tag{2.14}$$

여기서 ξ는 GEV의 형태를 결정짓는 모수로 형태모수(shape parameter) 또는 꼬리지수(tail index)라고 한다. 이 때 $\xi>0$이면 GEV는 Fréchet분포족에, $\xi=0$이면 Gumbel분포족에, $\xi<0$이면 Weibull분포족에 각각 속한다. 그리고 μ는 위치모수(location parameter), σ는 척도모수(scale parameter)를 나타낸다.

Markose와 Alentorn (2010)은 식 (2.14)를 기초자산의 손실률 $L_T(=1-S_T/S_t)$에 대한 위험중립확률분포로 가정하고 유러피언 콜옵션 가격결정모형을 다음과 같이 유도하였다.

$$C_t^{GEV} = e^{-r(T-t)}\left[S_t\left\{\left(1-\mu+\frac{\sigma}{\xi}\right)e^{H^{-\frac{1}{\xi}}} - \frac{\sigma}{\xi}\Gamma\left(1-\xi, H^{-\frac{1}{\xi}}\right)\right\} - Ke^{-H^{-\frac{1}{\xi}}}\right], \tag{2.15}$$

여기서 $H=1+\xi/\sigma(1-K/S_t-\mu)$이고 Γ는 불완전감마함수(incomplete gamma function)로서 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(\alpha,x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$$

한편, 풋옵션에 관해 유도된 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_t^{GEV} = e^{-r(T-t)}&\left[K\left(e^{-h^{-\frac{1}{\xi}}} - e^{-H^{-\frac{1}{\xi}}}\right)\right. \\ &\left. - S_t\left\{\left(1-\mu+\frac{\sigma}{\xi}\right)\left(e^{-h^{-\frac{1}{\xi}}} - e^{-H^{-\frac{1}{\xi}}}\right) - \frac{\sigma}{\xi}\Gamma\left(1-\xi, h^{-\frac{1}{\xi}}, H^{-\frac{1}{\xi}}\right)\right\}\right], \end{aligned} \tag{2.16}$$

여기서 $h=1+\xi/\sigma(1-\mu)>0$이고 Γ는 일반화불완전감마함수(generalized incomplete gamma function)로서 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(\alpha,x_1,x_2) = \int_{x_1}^{x_2} t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$$

2.2. E-VaR의 추정과 사후검증

2.2.1. E-VaR의 추정 VaR는 신뢰수준 p에서 주어진 확률분포의 p번째 분위값을 나타낸다. 따라서 GGD, BS, TLM, GEV 모형의 경우 각 모형에 대응하는 VaR는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E-\mathrm{VaR}_t^{GGD}(q)=G^{-1}\left(q|\alpha,\beta,k\right),\quad q=1-p, \tag{2.17}$$

$$E-\mathrm{VaR}_t^{BS}(q)=N^{-1}\left(q|d_2^{BS}\right),\quad d_2^{BS}=d_1^{BS}-\sigma^{BS}\sqrt{\tau},\ q=1-p, \tag{2.18}$$

$$E-\mathrm{VaR}_t^{TLM}(q)=\left[\theta N^{-1}(q|d_2)+(1-\theta)N^{-1}(q|d_4)\right], \tag{2.19}$$

$$E-\mathrm{VaR}_t^{GEV}(q)=\mu-\frac{\sigma^{GEV}}{\xi}\left[1-\{-\ln(1-q)\}^{-\xi}\right],\quad \xi\neq 0, \tag{2.20}$$

여기서 G^{-1}와 N^{-1}는 각각 GGD와 표준정규분포의 분포함수의 역함수를 의미한다. 그리고 식 (2.17)–(2.20)에 내포된 내재모수들은 바젤위원회의 내부모형접근법에 따라 10일 동안의 VaR를 추정하기 위하여 잔여만기가 10일인 옵션의 시장가격들을 이용하여 추정하였다.

한편, GGD에 포함된 감마함수 안에서 음수는 계산될 수 없다. 따라서 GGD는 다른 분포들이 자산의 손실률에 대한 위험중립확률분포로 적용된 것과 달리 기초자산(S_T)에 대한 위험중립확률분포로 적용되었다. 자산의 손실률은 $L_T=-\ln(S_T/S_t)$로 $S_T>S_t$일 때 음의 값을 가질 수 있지만 기초자산의 가격은 항상 양의 값을 가지기 때문이다. 따라서 기초자산의 만기 가격 S_T의 분포로 추정된 GGD의 VaR값을 다른 분포들의 VaR와 비교하기 위하여 GGD의 VaR에 대해 다음과 같이 변환 작업을 실시한다. 손실률 L_T의 분포함수를 G_L, 기초자산의 만기가격 S_T의 분포함수를 G_S라 하면 두 분포함수 사이에는 아래의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}1-G_L(x)&=P(L_T>x)\\&=P\left(S_T<S_te^{-x}\right)=G_S\left(S_te^{-x}\right)=q.\end{aligned} \tag{2.21}$$

L_T는 손실률을 나타내므로 VaR는 L_T의 분포하에서 오른쪽 분위값을 나타낸다. 따라서 신뢰수준 $p(=1-q)$에서 VaR는 식 (2.21)로부터 $x=\ln S_t-\ln(G_S^{-1}(q))$로 주어진다.

GGD를 S_T의 분포로 가정하고 추정된 VaR를 $E-\mathrm{VaR}_{S_T}^{GGD}$라 하고, G_S와 G_L과의 관계식에 의해 L_T의 분포에서의 VaR로 수정된 VaR를 $E-\mathrm{VaR}_{L_T}^{GGD}$라 하면 $E-\mathrm{VaR}_{S_T}^{GGD}$와 $E-\mathrm{VaR}_{L_T}^{GGD}$의 관계는 다음과 같다.

$$E-\mathrm{VaR}_{L_T}^{GGD}=\ln S_t-\ln\left(E-\mathrm{VaR}_{S_T}^{GGD}\right). \tag{2.22}$$

실증분석에서는 식 (2.22)에 의해 추정된 $E-\mathrm{VaR}_{L_T}^{GGD}$를 이용하여 다른 분포들의 성과와 비교한다.

2.2.2. 사후검증방법 VaR에 대한 사후검증은 실패율에 기초한 빈도검정과 사전적 분포와 사후적 분포의 차이에 대한 검정으로 나누어 실시한다. 먼저, 실패율에 기초한 빈도검정은 VaR의 성과를 검증하는 가장 간단한 방법으로, 여기서 실패율 $\hat{q}$은 실제 자료에서 VaR를 초과하는 손실이 발생하는 비율을 의미한다. 실증분석에서는 이 비율을 알아보기 위해 모형별로 추정된 VaR를 초과하는 손실이 발생한 거래일수를 알아보고, 이와 함께 평균초과손실률과 최대초과손실률을 추정한다. 또한 모형별로 추정된 실패율 $\hat{q}$이 주어진 유의수준 q와 통계적으로 동일한지와 관측된 실패사건들이 독립적인지를 파악하기 위해 Christoffersen (1998)에 의한 조건부 사후검증절차를 적용한다.

먼저 실패율과 유의수준이 동일한지를 알아보기 위한 비조건부 커버리지 검정(unconditional coverage tests)의 귀무가설 $H_0 : \hat{q} = q$하에서의 우도비 검정통계량은 다음과 같다.

$$\mathrm{LR}_{uc} = -2\ln\left[(1-q)^{n-x}q^{x}\right] + 2\ln\left[(1-\hat{q})^{n-x}\hat{q}^{x}\right] \sim \chi^2(1), \tag{2.23}$$

여기서, $\hat{q} = \hat{x}/n$, n: 분석기간의 거래일수, $\hat{x}$: 관측된 초과일수이다.

실패사건들의 독립성 검정(independence prediction tests)을 위한 귀무가설은 'H_0: VaR를 초과하는 실패사건의 발생은 서로 독립이다'이며, 이를 검정하기 위한 우도비 검정통계량은 다음과 같다.

$$\mathrm{LR}_{ind} = -2\ln\Big[(1-\hat{\pi}_2)^{\hat{n}_{00}+\hat{n}_{10}}\hat{\pi}_2^{\hat{n}_{01}+\hat{n}_{11}}\Big] + 2\ln\Big[(1-\hat{\pi}_{01})^{\hat{n}_{00}}\hat{\pi}_{01}^{\hat{n}_{01}}\,(1-\hat{\pi}_{11})^{\hat{n}_{10}}\,\hat{\pi}_{11}^{\hat{n}_{11}}\Big] \sim \chi^2(1), \tag{2.24}$$

여기서

$$\hat{\pi}_2 = \frac{\hat{n}_{01}+\hat{n}_{11}}{\hat{n}_{00}+\hat{n}_{10}+\hat{n}_{01}+\hat{n}_{11}},$$

$$\hat{\pi}_{ij} = P(I_t = j | I_{t-1} = i)$$

: $t-1$시점에 i가 발생하고 t시점에 j가 발생한 전이확률(transition probability),

$\hat{n}_{ij}$: $t-1$시점의 i값 이후 t시점에 j값을 가지는 관찰 거래일 수

(초과사건이 발생하지 않을 경우 0, 발생할 경우 1).

식 (2.23)과 식 (2.24)의 결과로부터 비조건부 커버리지와 독립성의 귀무가설 하에서 결합검정을 위한 우도비 검정통계량은 다음과 같다.

$$\mathrm{LR}_{cc} = \mathrm{LR}_{uc} + \mathrm{LR}_{ind} \sim \chi^2(2). \tag{2.25}$$

한편, 분포의 차이에 대한 사후검증을 위해 Rosenblatt (1952)가 제시한 다음의 확률적분변환(probability integral transformation)을 이용할 수 있다.

$$x_t = \int_{-infty}^{y_t} \hat{f}(\mu)d\mu = \hat{F}(y_t), \tag{2.26}$$

여기서 y_t는 보유기간동안의 KOSPI 200 지수의 실현수익률, $\hat{f}(\cdot)$는 사전적으로 예측된 추정확률분포를 나타낸다.

만일 식 (2.26)에서 실현수익률 y_t의 확률적분변환 x_t가 서로 독립적이고 균등분포 $U(0,1)$을 따른다면, 실현수익률 y_t는 서로 독립적이며, 또한 사전적으로 예측된 추정확률분포 $\hat{f}(\cdot)$와 사후적으로 실현된 확률분포 $f(\cdot)$가 동일하다는 귀무가설을 기각할 수 없다. 이제 x_t의 독립성과 균등성을 검정하기위해 Berkowitz (2001)가 제안한 검정절차를 이용할 수 있다. 식 (2.26)이 성립하면 x_t를 표준정규분포 함수의 역함수 Φ^{-1}에 대입하여 전환한 $z_t\,(=\Phi^{-1}(x_t))$는 평균이 0이고 분산이 1인 표준정규분포를 따른다. 이에 따라 z_t의 독립성과 표준정규성은 아래의 식 (2.27)의 자기회귀모형(AR(1)모형)을 최우추정(maximum likelihood estimation)함으로써 검정될 수 있다.

$$z_t - \mu = \rho(z_{t-1} - \mu) + \epsilon_t. \tag{2.27}$$

식 (2.27)로부터 z_t의 독립성과 표준정규성에 대한 결합검정의 귀무가설은 $H_0 : \mu = 0,\ \rho = 0,\ \mathrm{Var}(\epsilon_t)$이고 검정통계량은 아래의 식 (2.28)과 같다. 그리고 독립성에 대한 검정은 자료의 자기상관관계가 높아 모형이 옳은데도 모형을 기각하는 경우가 발생하는 것에 대비해 실시한다. 독립성에 대한 검정통계량은

식 (2.29)와 같고 이 때 귀무가설은 $H_0 : \rho = 0$이다.

$$\mathrm{LR} = -2\left[L(0,1,0) - L\left(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}\right)\right] \sim \chi^2(3), \tag{2.28}$$
$$\mathrm{LR}_{ind}^{BK} = -2\left[L\left(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, 0\right) - L\left(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}\right)\right] \sim \chi^2(1), \tag{2.29}$$

여기서 로그우도함수 $L(\mu, \sigma^2, \rho)$는 다음과 같이 주어진다.

$$L\left(\mu, \sigma^2, \rho\right) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right) - \frac{\left(z_t - \dfrac{\mu}{1-\rho}\right)^2}{\dfrac{2\sigma^2}{1-\rho^2}}$$
$$- \frac{N-1}{2}\ln(2\pi) - \frac{N-1}{2}\ln(\sigma^2) - \sum_{t=2}^{N}\frac{(z_t - \mu - \rho z_{t-1})^2}{2\sigma^2}.$$

3. 실증분석

3.1. 자료

본 연구의 실증분석을 위하여 이용된 자료는 2000년 1월 5일부터 2007년 12월 28일까지의 KOSPI 200 주가지수옵션 자료이다. 총 1,506거래일 21,129개의 옵션가격이 이용되었다. 옵션자료는 잔여만기가 7일 이상, 34일 이내인 외가격 옵션만을 이용하였다. 잔여만기가 7일 이내인 자료를 이용하지 않은 이유는 통계적 유의성을 확보하기 어렵기 때문이다. 또한 풋-콜 패리티(put-call parity)를 이용하여 외가격 풋옵션의 시장가격을 내가격 콜옵션의 가격으로 전환하여 이용하였다. 그리고 0.2 미만과 이론적인 상·하한가를 벗어나는 옵션가격을 배제하고, 토요일은 표본거래일에서 제외하였다.

KOSPI 200 현물시장의 마감시간은 오후 3시이나 KOSPI 200 옵션시장의 마감시간은 오후 3시 15분으로 15분의 차이가 있다. 이러한 마감시간의 차이로 인해 발생할 수 있는 편의를 제거하기 위하여 동일하게 오후 3시의 KOSPI 200 지수옵션 거래가격과 KOSPI 200 지수의 종가를 이용하였다. 무위험이자율로는 CD 91일물의 연수익률을 이용하며, 배당액지수는 배당이 전년도와 동일하게 이루어진다고 가정하고 전년도 현금배당액의 합계액을 현재가치로 환산하여 이용하였다.

3.2. 실증분석 결과

3.2.1. 내재모수추정결과 분포의 내재모수를 추정하기 위한 방법으로는 비선형최소제곱법을 이용하였다. Table 3.1은 각 분포별로 추정된 내재모수들의 평균과 표준편차, 변동계수를 연도별로 요약하여 나타낸 것이다. Table 3.1에서 BS, TLM, GEV의 내재모수는 손실률의 함수에서 추정된 내재모수이지만, GGD의 내재모수는 만기시주가의 함수에서 추정된 모수이다. 따라서 표준편차만으로는 산포에 대한 분포 간 비교가 타당하다고 할 수 없으므로, 분포 간 비교가 가능하도록 표준화 된 통계량이 필요하다. Table 3.1에 나타나있는 변동계수는 서로 다른 단위를 갖는 분포의 산포를 비교하는데 유용한 통계량으로, 추정된 내재모수의 평균을 $\hat{\mu}$, 표준편차를 $\hat{\sigma}$라고 할 때 변동계수는 $\mathrm{cv}(= \hat{\sigma}/\hat{\mu})$로 정의된다.

Table 3.1의 내재모수 추정결과는 일별로 추정된 모수들의 연도별 평균과 표준편차, 변동계수를 나타낸 것이다. 본 연구의 실증분석에 이용한 KOSPI 200 자료는 일별로 최소 3개부터 최대 42개의 데이터를 가지고 있는데, 이는 다시 말하면 모수추정을 할 때 이용된 데이터가 일별로 최소 3개에서 최대 42개라는 것을 의미한다. 데이터의 수가 3개와 같이 적은 날에는 추정해야하는 모수가 많을 경우 모수 추정의 정확도가 떨어질 수 있다. 실제로 Table 3.1에서 모수가 1개인 BS와 모수가 5개인 TLM을 비교

Table 3.1. Parameter estimates

연도	통계량	BS	TLM					GEV			GGD		
		σ	θ	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	μ	ξ	σ	α	β	k
2000	평 균	0.4761	0.3557	0.2067	0.0116	0.3422	0.4501	−0.0338	−0.2083	0.0966	44.3302	4.7142	13.1971
	표준편차	0.0917	0.2486	1.2568	1.3942	0.2563	0.2492	0.0213	0.1609	0.0383	27.3409	6.2314	7.9450
	변동계수	0.1926	0.6990	6.0800	119.8223	0.7489	0.5538	−0.6296	−0.7723	0.3959	0.6168	1.3219	0.6020
2001	평 균	0.3588	0.3699	0.1300	0.0835	0.2490	0.3382	−0.0250	−0.2571	0.0742	41.4670	7.1591	11.6220
	표준편차	0.0806	0.2882	1.1933	0.9421	0.2065	0.2420	0.0099	0.1756	0.0199	16.1752	8.4438	6.9109
	변동계수	0.2246	0.7789	9.1781	11.2816	0.8293	0.7156	−0.3974	−0.6829	0.2681	0.3901	1.1794	0.5946
2002	평 균	0.3759	0.3281	0.0665	0.0734	0.2523	0.3413	−0.0267	−0.2425	0.0775	48.1667	4.6552	13.4618
	표준편차	0.0423	0.2918	0.8192	0.3606	0.1715	0.1411	0.0066	0.1043	0.0173	17.0599	7.1473	6.3134
	변동계수	0.1124	0.8894	12.3270	4.9107	0.6795	0.4135	−0.2477	−0.4301	0.2230	0.3542	1.5354	0.4690
2003	평 균	0.2952	0.3699	0.0904	−0.0981	0.2286	0.2888	−0.0179	−0.3416	0.0645	64.7776	8.7004	8.0987
	표준편차	0.0627	0.2918	0.5954	0.6340	0.1074	0.1093	0.0062	0.1106	0.0205	14.4715	8.1506	5.0969
	변동계수	0.2123	0.7888	6.5867	−6.4608	0.4699	0.3784	−0.3445	−0.3238	0.3175	0.2234	0.9368	0.6293
2004	평 균	0.2527	0.3654	−0.0540	0.0131	0.1972	0.2341	−0.0115	−0.4839	0.0585	100.8532	19.2698	3.6589
	표준편차	0.0545	0.2359	0.7190	0.4888	0.1186	0.1209	0.0035	0.1418	0.0177	12.5427	13.7886	4.3416
	변동계수	0.2157	0.6455	−13.3253	37.4140	0.6013	0.5165	−0.3089	−0.2929	0.3030	0.1244	0.7156	1.1866
2005	평 균	0.1928	0.4434	−0.0853	−0.0431	0.1637	0.1730	−0.0089	−0.4681	0.0438	126.7043	19.9628	4.3970
	표준편차	0.0304	0.2699	0.5391	0.5081	0.0836	0.0800	0.0034	0.1294	0.0113	20.1087	14.6429	4.3007
	변동계수	0.1575	0.6086	−6.3164	−11.7900	0.5108	0.4623	−0.3830	−0.2765	0.2571	0.1587	0.7335	0.9781
2006	평 균	0.1956	0.4024	−0.1953	−0.0537	0.1734	0.1717	−0.0082	−0.4633	0.0451	160.6903	19.4347	6.1173
	표준편차	0.0431	0.2495	0.8432	0.5990	0.0932	0.0928	0.0024	0.1458	0.0157	22.2667	10.2324	8.8946
	변동계수	0.2206	0.6199	−4.3165	−11.1594	0.5377	0.5402	−0.2877	−0.3147	0.3480	0.1386	0.5265	1.4540
2007	평 균	0.2432	0.4163	−0.2019	−0.0640	0.1830	0.2178	−0.0099	−0.5495	0.0591	198.9308	21.1871	5.8728
	표준편차	0.0749	0.2300	1.0776	0.8938	0.1006	0.1094	0.0064	0.1653	0.0261	45.2337	14.6645	11.6554
	변동계수	0.3080	0.5524	−5.3366	−13.9766	0.5498	0.5022	−0.6498	−0.3009	0.4419	0.2274	0.6921	1.9846
전 체	평 균	0.2984	0.3814	−0.0057	−0.0099	0.2235	0.2765	−0.0177	−0.3769	0.0648	98.2398	13.1459	8.2895
	표준편차	0.1115	0.2660	0.9224	0.7900	0.1625	0.1793	0.0130	0.1879	0.0275	60.2709	12.9115	8.1743
	변동계수	0.3738	0.6974	−163.2093	−79.9589	0.7271	0.6483	−0.7345	−0.4986	0.4248	0.6135	0.9822	0.9861

Table 3.2. In-sample pricing errors

		통계량	BS	TLM	GEV	GGD
2000	186	평 균	0.6179	0.2153	0.3145	0.3747
		표준편차	1.0834	0.4153	0.6194	0.5956
2001	186	평 균	0.0990	0.0315	0.0473	0.0794
		표준편차	0.1223	0.0419	0.0570	0.1140
2002	189	평 균	0.1365	0.0550	0.0727	0.1105
		표준편차	0.1806	0.0859	0.0940	0.1142
2003	191	평 균	0.0876	0.0263	0.0246	0.0235
		표준편차	0.1300	0.0671	0.0448	0.0420
2004	190	평 균	0.3315	0.0821	0.0656	0.0600
		표준편차	0.5161	0.1734	0.1347	0.1262
2005	188	평 균	0.2250	0.0484	0.0411	0.0354
		표준편차	0.2893	0.1475	0.0664	0.0624
2006	190	평 균	0.7356	0.1308	0.1459	0.1352
		표준편차	0.9696	0.2250	0.2580	0.2508
2007	186	평 균	4.5326	0.6612	1.5815	0.6949
		표준편차	8.2502	2.5583	4.5017	2.7879
전체	1507	평 균	0.8393	0.1553	0.2832	0.1878
		표준편차	3.2643	0.9380	1.6684	1.0295

해보면 모수의 수가 적은 BS의 표준편차(변동계수)가 TLM의 표준편차(변동계수)보다 훨씬 작은 것을 알 수 있다. 표준편차(변동계수)가 작다는 것은 그만큼 추정된 모수에 대해 신뢰할 수 있다는 것이므로 TLM에서 추정된 모수에 대한 신뢰도는 낮은 편이라고 할 수 있다. 한편, 동일하게 3개의 모수를 갖는 GEV와 GGD를 비교해보면, 두 모형 모두 변동계수가 작은 편이지만 GEV의 변동계수가 대체적으로 더 작고 안정적임을 알 수 있다.

다음 Table 3.2는 옵션의 시장가격과 이론가격의 최소 오차제곱합의 평균과 표준편차를 연도별로 요약한 자료이다. Table 3.2의 내표본 적합성과를 살펴보면 전체기간에 대한 오차제곱합의 평균은 TLM이 0.1553으로 4개의 모형 중 가장 작은 것을 알 수 있다. 내표본 적합성과는 추정모수의 개수가 많을수록 우수하게 나타나는 경향이 있는데, 5개의 모수를 갖는 TLM이 1∼3개의 모수를 갖는 다른 모형들에 비해 뛰어난 적합성을 보인 것도 이런 맥락에서 해석가능하다. 같은 맥락에서 1개의 모수를 갖는 BS의 적합성과가 가장 열등한 것을 확인할 수 있으며, 동일하게 3개의 모수를 갖는 GEV와 GGD 중에서는 전체기간을 기준으로 GGD의 적합성과가 더욱 우수한 것을 알 수 있다.

전체기간에서 TLM 다음으로 우수한 적합성과를 보인 GGD는 전체기간에서의 오차제곱합 뿐만 아니라 연도별 오차제곱합에서도 TLM 못지않게 고른 성과를 보이고 있다. 특히 2003년∼2005년의 경우에는 GGD에서의 오차제곱합의 평균과 표준편차가 TLM에서보다 더 작게 나타나는데, TLM보다 적은 모수를 가지고도 더 우수한 성과를 낸 것은 GGD가 옵션시장가격에 그만큼 효율적으로 잘 적합되었기 때문으로 판단할 수 있다.

3.2.2. VaR추정 및 사후검증결과 본 연구에서는 파생자산인 옵션의 횡단면 자료를 이용한 내재모형들과 단순히 기초자산의 역사적 시계열 자료를 이용한 시계열모형들에 대해 99%에서 95%까지의 신뢰수준 하에서 보유기간 10일 동안의 VaR에 대한 예측성과를 실시하였으며, 그 결과는 Table 3.3에 정리되어있다. 내재모형을 위한 위험중립확률분포로는 위에서 언급한 BS, TLM, GEV, GGD를 사용

Table 3.3. Backtesting performance of VaR

초과	유의수준				
빈도율(%)	1%	2%	3%	4%	5%
BS	2.4691	2.4691	3.7037	3.7037	7.4074
TLM	1.2346	2.4691	3.7037	3.7037	3.7037
GEV	1.2346	1.2346	3.7037	3.7037	6.1728
GGD	0.0000	1.2346	1.2346	3.7037	3.7037
S	2.4691	2.4691	2.4691	2.4691	2.4691
GJR	1.2346	2.4691	2.4691	3.7037	3.7037
평균	유의수준				
초과손실률	1%	2%	3%	4%	5%
BS	0.0023	0.0131	0.0145	0.0197	0.0133
TLM	0.0018	0.0073	0.0117	0.0174	0.0219
GEV	0.0098	0.0193	0.0123	0.0181	0.0153
GGD	0.0000	0.0062	0.0149	0.0105	0.0166
S	0.0084	0.0161	0.0219	0.0254	0.0270
GJR	0.0038	0.0184	0.0281	0.0252	0.0310
최대	유의수준				
초과손실률	1%	2%	3%	4%	5%
BS	0.0045	0.0144	0.0206	0.0252	0.0293
TLM	0.0018	0.0135	0.0207	0.0262	0.0307
GEV	0.0098	0.0193	0.0255	0.0302	0.0340
GGD	0.0000	0.0062	0.0149	0.0213	0.0265
S	0.0111	0.0181	0.0223	0.0263	0.0292
GJR	0.0038	0.0217	0.0311	0.0380	0.0428

하였고, 시계열모형으로는 정규분포를 가정한 경우(S)와 이분산과 변동성군집을 통해 비대칭과 급첨분포를 반영할 수 있는 Glosten 등 (1993)에 의한 GJR GARCH$(1,1)$모형을 사용하였다. 구체적으로 S모형의 경우 정규분포를 가정하여 추정한 역사적 1일 VaR에 $\sqrt{10}$을 곱하여 계산하였으며, GJR-VaR의 경우에는 GJR GARCH$(1,1)$모형을 이용하여 매 거래일 마다 생성된 수익률에 비모수 가우시안 커널(gaussian kernel)을 적용하여 분포를 산출하고 주어진 신뢰수준 하에서 VaR를 계산하였다.

Table 3.3에 나타나있는 초과 빈도율(단위: %)은 주어진 신뢰수준 하에서 추정된 VaR를 초과하는 손실이 발생한 비율을 의미한다. 평균초과 손실률은 VaR를 초과하는 손실률들의 초과평균을 의미하고, 최대초과 손실률은 VaR를 초과한 손실률 중 최대값을 의미한다. 바젤위원회는 99%의 신뢰수준 하에서 10일 동안의 VaR를 추정하도록 하고 있는데, 이는 분석기간 동안 추정된 VaR를 초과하는 손실이 발생하는 거래일의 비율이 1%가 됨을 의미한다. 만약 이 초과비율이 1%를 넘는다면 추정된 VaR는 실제로 발생할 수 있는 손실을 과소평가하게 되는 것이고, 반대로 1%를 넘지 않는다면 손실을 너무 과대평가한 것이 된다.

실증분석결과 99%의 신뢰수준 하에서는 TLM과 GEV, GJR의 초과 빈도율이 각각 1.2346%로 동일하게 유의수준 1%에 가장 근접한 성과를 보이고 있다. BS와 S의 초과 빈도율은 각각 2.4691%로 신뢰수준 99% 하에서 VaR를 초과할 것으로 기대되는 손실률의 빈도율 보다 각각 1.4691%p 큰 초과 빈도율을 보이고 있다. GGD는 0%의 초과 빈도율을 보이고 있는데 이는 1% 유의수준 하에서는 GGD를 통해 추정된 VaR를 초과하는 손실이 발생하지 않았음을 의미한다. GGD를 제외한 나머지 모든 모형들의 초과 손실률이 주어진 유의수준 1%를 모두 초과하여 손실을 과소평가한 결과를 나타낸 반면, GGD는

손실을 지나치게 과대평가하였다고 할 수 있다.

98% 신뢰수준 하에서 BS와 TLM, S, GJR의 초과 빈도율은 각각 2.4691%로 주어진 유의수준 2%에 근접한 결과를 보이고 있다. GEV와 GGD의 초과 빈도율은 1.2346%로 유의수준보다 적은 초과 빈도율을 보이고 있다. 따라서 유의수준 2%에서 GEV와 GGD의 VaR는 보수적으로 추정되었음을 알 수 있다. VaR가 보수적으로 추정되었을 경우 위험관리를 위한 준비금이 과다 책정되어 기회비용의 손실이 발생 할 수 있다. 반대로 유의수준 2%를 초과한 초과 빈도율을 보인 BS, TLM, S, GJR과 같이 손실을 과소평가한 VaR를 위험관리에 이용할 경우에는 발생 가능한 손실에 대한 준비금 부족으로 추가적인 손실이 발생할 위험이 있다. 97% 신뢰수준 하에서는 BS, TLM, GEV가 각각 3.7037%의 초과 빈도율을 보였다. GGD의 초과 빈도율은 1.2346%로 VaR를 가장 보수적으로 추정하였다. S와 GJR의 초과 빈도율도 2.4691%로 다른 모형들에 비해 보수적으로 VaR를 추정하였지만 주어진 유의수준 3%에 가장 근접한 성과를 보였다. 96% 신뢰수준 하에서 BS, TLM, GEV, GGD, GJR의 초과 빈도율은 각각 3.7037%로 유의수준 4%에 근접한 성과를 나타냈다. S의 초과 빈도율은 2.4691%로 상대적으로 손실의 위험을 가장 과대평가했음을 알 수 있다. 95% 신뢰수준 하에서 TLM과 GGD, GJR의 초과 빈도율은 각각 3.7037%이고, S의 초과 빈도율은 2.4691%이다. S는 모든 유의수준 하에서 동일한 초과 빈도율을 보이고 있는데 이는 유의수준 1% 하에서 발견된 초과 빈도 외에 유의수준 2∼5% 하에서 추가로 발견되는 초과 빈도가 존재하지 않음을 의미한다. 한편, BS의 초과 빈도율은 7.4074%이고, GEV의 초과 빈도율은 6.1728%이다. GEV의 초과 빈도율이 유의수준 5%에 가장 근접하나 BS와 함께 손실의 위험을 과소평가한 것을 알 수 있다.

초과 빈도율을 기준으로 했을 때, 다른 모든 모형들보다 항상 우수하다고 말할 수 있는 압도적인 모형은 존재하지 않았다. 주어진 유의수준에 따라 우수한 성과를 보이는 모형들이 있었는데 대체적으로 TLM과 GJR, GEV의 성과가 우수했다고 할 수 있다. BS도 2%와 4%에서는 우수한 성과를 보였으나 1%와 5%에서 지나치게 손실 위험을 과소평가하여 안정적인 성과를 보였다고 하기 어렵다. 또한 S는 모든 유의수준에서 동일한 초과 손실률을 보여 위험관리수단으로써 신뢰수준에 따라 적절하게 이용할 수 있는지에 대한 문제점을 남겼다.

한편, GGD의 성과는 전반적으로 손실 위험을 과대평가하는 모습을 보였다. 특히 유의수준 1% 하에서는 초과 빈도율이 0%로 나머지 모형들이 모두 1%를 넘는 초과 빈도율을 보인 것과 대조적이다. Table 3.2의 내표본 적합성과에서는 GGD가 TLM과 함께 가장 뛰어난 성과를 보였지만 초과 빈도율에서는 두드러진 성과를 내지 못한 것은 GGD가 꼬리부분보다는 분포의 중심부에서 더욱 잘 적합하기 때문으로 생각할 수 있다. 반대로 GEV는 분포의 중심부보다 분포의 꼬리부분에서 더욱 좋은 적합성과를 보인다고 할 수 있다.

Table 3.4는 VaR의 성과를 비교하기 위해 비조건부 커버리지 검정을 실시한 결과를 요약한 것이다. Table 3.4에서 는 비조건부 커버리지 검정에서의 우도비 검정통계량을 의미한다. 비조건부 커버리지 검정을 위한 귀무가설은 'H_0:VaR의 정의에서 주어진 유의수준 q와 추정된 VaR를 초과하는 사건이 발생하는 비율 $\hat{q}$은 동일하다'이다. 이 귀무가설을 검정하기 위해 각 유의수준별 p-값을 살펴보면, 유의수준이 1∼5%일 때에 모든 모형에서 p-값이 유의수준보다 크므로 귀무가설을 기각할 수 없다. 따라서 모든 모형이 1∼5%의 유의수준 하에서 통계적으로 유용한 VaR를 추정하였다고 할 수 있다.

Table 3.5는 추정된 VaR를 초과하는 사건들의 발생이 서로 독립이라는 귀무가설에 대한 독립성 검정 결과이다. GGD를 제외한 모든 모형이 1∼5%의 유의수준에서 귀무가설을 기각하지 못함을 알 수 있다. GGD의 검정결과 중 1%의 결과로 나타나있는 NaN은 Not a Number의 약자로 계산된 결과가 숫자가 아님을 뜻한다. 독립성 검정은 추정된 VaR를 초과하는 사건들 간의 독립성을 검정하는 것인데, GGD의 경우 Table 3.3의 초과 빈도율 항목에서 보았듯이 1% 유의수준 하에서는 추정된 VaR를 초과

Table 3.4. Performance of unconditional coverage test

LR_{uc}	유의수준				
	1%	2%	3%	4%	5%
BS	1.2532	0.0847	0.1285	0.0190	0.8663
TLM	0.0419	0.0847	0.1285	0.0190	0.3136
GEV	0.0419	0.2800	0.1285	0.0190	0.2190
GGD	1.6282	0.2800	1.1101	0.0190	0.3136
S	1.2532	0.0847	0.0834	0.5700	1.3319
GJR	0.0419	0.0847	0.0834	0.0190	0.3136
p-값	유의수준				
	1%	2%	3%	4%	5%
BS	0.2629	0.7710	0.7200	0.8904	0.3520
TLM	0.8378	0.7710	0.7200	0.8904	0.5755
GEV	0.8378	0.5967	0.7200	0.8904	0.6398
GGD	0.2020	0.5967	0.2921	0.8904	0.5755
S	0.2629	0.7710	0.7728	0.4503	0.2485
GJR	0.8378	0.7710	0.7728	0.8904	0.5755

Table 3.5. Performance of independence test

LR_{ind}	유의수준				
	1%	2%	3%	4%	5%
BS	0.1026	0.1026	0.2338	0.2338	0.9740
TLM	0.0253	0.1026	0.2338	0.2338	0.2338
GEV	0.0253	0.0253	0.2338	0.2338	0.6672
GGD	NaN	0.0253	0.0253	0.2338	0.2338
S	0.1026	0.1026	0.1026	0.1026	0.1026
GJR	0.0253	0.1026	0.1026	0.2338	0.2338
p-값	유의수준				
	1%	2%	3%	4%	5%
BS	0.7488	0.7488	0.6287	0.6287	0.3237
TLM	0.8736	0.7488	0.6287	0.6287	0.6287
GEV	0.8736	0.8736	0.6287	0.6287	0.4140
GGD	NaN	0.8736	0.8736	0.6287	0.6287
S	0.7488	0.7488	0.7488	0.7488	0.7488
GJR	0.8736	0.7488	0.7488	0.6287	0.6287

하는 사건이 존재하지 않았다. 따라서 검정 대상이 존재하지 않으므로 이러한 결과가 나타난 것이다. 1%를 제외한 나머지 유의수준에서는 GGD 역시 귀무가설을 기각하지 못하므로 추정된 VaR를 초과하는 사건들의 발생이 서로 독립이라고 할 수 있다.

Table 3.6은 비조건부 커버리지 검정과 독립성 검정의 결합 검정 결과를 요약한 것이다. 모든 모형이 5%의 유의수준 하에서도 위의 두 귀무가설을 기각하지 못함을 알 수 있다. GGD의 유의수준 1% 하에서의 결과로 나온 NaN은 Table 3.5의 경우와 동일하다. 앞에서 살펴보았던 사후검증들은 분포의 꼬리부분에서의 성과를 알아보기 위한 것이었지만, Berkowitz (2001)검정방법은 추정된 분포가 실제분포에 얼마나 적합한지 분포의 전체적인 적합성과를 알아보는 것이 목적이다. Table 3.7은 Berkowitz (2001)방법의 결과를 요약한 것이다. LR은 'H_0: 사전적으로 예측된 추정확률분포와 사후적으로 실현

Table 3.6. Performance of unconditional coverage and independence tests

LR_{cc}	유의수준				
	1%	2%	3%	4%	5%
BS	1.3558	0.1873	0.3623	0.2528	1.8404
TLM	0.0672	0.1873	0.3623	0.2528	0.5475
GEV	0.0672	0.3053	0.3623	0.2528	0.8861
GGD	NaN	0.3053	1.1354	0.2528	0.5475
S	1.2532	0.0847	0.0834	0.5700	1.3319
GJR	0.0672	0.1873	0.1859	0.2528	0.5475
p-값	유의수준				
	1%	2%	3%	4%	5%
BS	0.5077	0.9106	0.8343	0.8813	0.3984
TLM	0.9670	0.9106	0.8343	0.8813	0.7605
GEV	0.9670	0.8584	0.8343	0.8813	0.6421
GGD	NaN	0.8584	0.5668	0.8813	0.7605
S	0.2629	0.7710	0.7728	0.4503	0.2485
GJR	0.9670	0.9106	0.9112	0.8813	0.7605

Table 3.7. Performance of Berkowitz method

	LR (p-값)	LR_{ind}^{BK} (p-값)	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\rho}$
BS	1.8469 (0.6048)	0.0888 (0.7657)	0.1372	1.0232	0.0333
TLM	4.7383 (0.1920)	0.0527 (0.8184)	0.1878	1.1122	−0.0250
GEV	4.6172 (0.2008)	0.1335 (0.6541)	0.1698	1.1089	0.0461
GGD	3.0878 (0.3783)	0.1808 (0.6707)	−0.1571	1.0655	0.0465
S	16.5439 (0.0009)	3.4784 (0.0622)	0.0559	1.2567	0.0228
GJR	0.7497 (0.8614)	0.0008 (0.9769)	0.0780	1.0398	−0.0012

된 확률분포가 동일하다’는 귀무가설과 ‘H_0: 사전에 예측된 실현수익률의 누적확률은 독립적이다’라는 두 귀무가설을 결합한 결합귀무가설 $H_0 : \mu = 0,\ \rho = 0,\ \mathrm{Var}(\epsilon_t) = 1$에 대한 검정통계량이고, LR_{ind}는 독립성($\rho = 0$)을 알아보기 위한 검정통계량이다. LR과 LR_{ind}에서 모두 귀무가설이 기각된다면, 추정된 확률분포가 실제분포를 제대로 예측하고 있다고 해석할 수 있다.

먼저 LR의 p-값을 살펴보면 유의수준 1% 하에서 S를 제외한 모든 모형이 귀무가설을 기각하지 못함을 알 수 있다. S는 p-값이 0.0009로 유의수준 1% 하에서도 결합귀무가설을 기각한다. 이 결과를 해석하기 위해 S의 독립성 검정에 대한 결과를 함께 살펴보면 독립성 검정에서는 S의 p-값이 0.0622로 유의수준 5% 하에서도 귀무가설을 기각할 수 없음을 알 수 있다. 이와 같이 결합귀무가설은 기각하면서, 독립성에 대한 귀무가설을 기각하지 못하는 경우 추정된 확률분포가 실제분포를 제대로 예측하지 못한다고 볼 수 있다. 따라서 S는 실제분포에 대해 통계적으로 유의한 추정확률분포를 제공하지 못한다는 것을 알 수 있다. 반면에 나머지 분포들은 LR과 LR_{ind}에서 p-값이 모두 0.1이상으로 유의수준 10% 하에

서도 귀무가설을 기각할 수 없음을 알 수 있다. 따라서 S를 제외한 모든 분포들은 실제분포에 대한 좋은 예측을 하고 있음을 알 수 있다.

한편, LR의 p-값이 가장 큰 모형은 GJR인데 GJR의 경우 LR_{ind}의 p-값도 크기 때문에 결합검정결과가 독립성검정결과에 의한 영향을 받았다고 추측할 수 있다. TLM은 LR_{ind}에서의 상당히 높은 p-값에도 불구하고 LR에서는 상대적으로 낮은 p-값을 갖는데 이는 분포의 예측성과가 다른 모형에 비해 크게 뛰어나지 않기 때문으로 생각해볼 수 있다. GEV 또한 TLM과 비슷한 결과를 보이고 있는데 이는 두 모형이 꼬리부분의 성과비교에서 좋은 결과를 보인 것과 대조되는 모습이다. 이는 두 모형이 전체적인 분포에 대한 추정보다는 꼬리부분의 추정에 더욱 적합하기 때문으로 해석될 수 있을 것이다. 반면 Table 3.7에서 GGD의 성과를 살펴보면 TLM이나 GEV와는 반대로 꼬리부분에서 나타났던 성과보다 분포의 동일성 검정에서 더 좋은 성과를 보이고 있음을 알 수 있다. GGD는 Table 3.2의 내표본 적합성과에서도 우수한 성과를 보였었는데 이런 결과들을 종합적으로 살펴보았을 때 결국 GGD는 꼬리부분에 국한한 분포의 추정보다는 전체적인 분포에 대한 추정에서 더욱 우수한 성과를 보인다고 판단내릴 수 있다.

4. 결론

본 연구는 내재확률분포로 일반화감마분포를 제안하고 그 성과를 알아보기 위해 KOSPI 200 지수옵션시장의 자료를 이용하여 실증분석을 실시하고, 그 결과를 다른 모형들의 성과와 비교하였다. 분석결과 GGD의 내표본 적합성과가 매우 우수한 것으로 발견되었는데, GGD는 동일하게 3개의 모수를 갖는 GEV보다 좋은 성과를 보여줄 뿐만 아니라 특정연도에서는 5개의 모수를 갖는 TLM과 비교해도 우수한 성과를 보였다. 반면 BS는 4개의 모형 중 가장 큰 추정오차를 나타내었다.

VaR의 사후검정에서는 먼저 초과 빈도율을 이용한 성과비교를 실시하였는데, 모든 신뢰수준에서 다른 모형에 비해 월등하다고 할 수 있는 성과를 나타낸 모형은 없었지만 상대적으로 TLM과 GEV의 성과가 우수하였다. BS는 2%와 4%의 VaR 유의수준에서는 성과가 우수하였으나 나머지 유의수준 하에서는 손실을 과소평가하는 모습을 보였다. GGD는 모든 모형 중 가장 보수적으로 VaR를 추정하였고, S는 모든 유의수준 하에서 동일한 초과 빈도율을 보이고 있다. Christoffersen (1998)에 의한 사후검정에서도 TLM과 GEV의 성과가 가장 우수했는데, 실제분포에 대한 적합성을 알아보는 Berkowitz (2001) 검정에서는 BS와 GGD의 성과가 가장 우수한 것으로 나타났고, 상대적으로 TLM과 GEV의 성과는 뛰어나지 않았다. 또한 S는 Berkowitz (2001) 검정결과 실제분포에 대해 통계적으로 유용한 정보를 제공하지 못하는 것으로 나타났다.

모든 실증분석을 종합해 볼 때, GGD는 다른 내재모형에 비해 옵션의 시장가격에 내재된 정보를 보다 정확하게 반영할 수 있으며, 이러한 정보는 향후 기초자산의 전체적인 분포에 대한 추정에 특히 적합한 것으로 판단되었다. 그러나 꼬리부분에 대한 추정은 월등히 뛰어나지 않았으며, GGD를 포함한 내재모형의 VaR 예측성과는 시계열모형인 GJR의 성과와 비교하여 유사하거나 오히려 열등한 것으로 나타났다. 이와 같이, 횡단면 옵션의 시장가격을 이용하는 내재모형이 GJR을 이용한 시계열모형과 비교하여 객관적인 예측성과가 다소 우수하지 않았던 이유 중의 하나는, 아마도 E-VaR의 경우 통계적으로 추정된 시계열 VaR와는 달리, 상태가격밀도(state price density)로 측정된 기본증권(elementary securities)의 가격을 이용한 VaR이기 때문일 것이다. 즉 옵션의 시장가격에 내재된 상태가격밀도를 이용한 E-VaR는 시장참가자들의 일반적인 위험회피와 시간선호 등을 동시에 반영할 수 있지만, VaR의 사후검정에 이용되는 실현수익률은 이를 고려하지 못한다. 그리고 E-VaR를 계산하는 내재모형 중에서 가장 유연하고 정확하게 시장가격에 내재된 정보를 반영하였던 GGD가 가장 보수적으로 VaR값을 예측

하였는데, 이는 시장참가자들의 일반적인 위험회피성향을 반영한 결과로 해석될 수 있다.

따라서 GGD가 비록 꼬리부분에 대한 추정은 월등히 뛰어나지 않았지만, 전체적인 상태가격밀도의 추정에 특히 적합함으로 일반투자자의 위험에 대한 태도를 보다 정확하게 VaR 추정에 적용할 수 있을 것으로 기대된다. 그리고 GGD로부터 추론된 시장의 전반적인 위험회피성향이 반영된 VaR는 사전적으로 위험관리자의 입장에서 충분히 유용한 정보가 될 수 있다. 왜냐하면 의사결정에 직접적으로 적용할 수 있는 VaR 값을 통해 시장의 일반적인 위험회피성향을 사전적으로 파악할 수 있을 뿐만 아니라, 시장과 비교하여 상대적으로 보수적이거나 공격적인 의사결정자의 위험에 대한 성향을 VaR의 예측 값에 반영할 수 있기 때문이다. 이러한 정보유용성은 사후적인 시계열을 이용한 모형에서는 얻을 수 없으며, 시가변적(time-varying)으로 변동하며 복잡계(complex system)로 간주되는 금융자본시장에서의 위험관리를 위해 실무적으로 다양한 모형을 동시에 활용할 필요가 있음을 감안할 때, GGD는 다른 시계열모형이나 내재모형을 보완할 수 있는 증분적인 유용성을 가질 것으로 기대해 본다.

References

Aït-Sahalia, Y. and Lo, A. W. (2000). Nonparametric risk management and implied risk aversion, *Journal of Econometrics*, **94**, 9–51.

Bahra, B. (1997). Implied riskneutral probability density functions from option prices: Theory and application, Working paper, Bank of England.

Bali, T. G. (2007). An extreme value approach to estimating interest-rate volatility: Pricing implications for interest-rate options, *Management Science*, **53**, 323–339.

Berkowitz, J. (2001). Testing density forecasts, with applications to risk management, *Journal of Business and Economic Statistics*, **19**, 465–474.

Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 637–659.

Christoffersen, P. (1998). Evaluating interval forecasts, *International Economic Review*, **39**, 841–862.

Fabozzi, F. J., Tunaru, R. and Albota, G. (2009). Estimating risk-neutral density with parametric models in interest rate markets, *Quantitative Finance*, **9**, 55–70.

Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.

Grith, M. and Kratschmer, V. (2010). Parametric estimation of risk neutral density functions, SFB 649, Discussion Paper.

Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Processes Applications*, **11**, 215–260.

Kim, M. S. and Kang, T. H. (2010). Value at risk using generalized extreme value distribution implied in the KOSPI 200 index options, *Asian Review of Financial Research*, **23**, 367–404.

Markose, S. and Alentorn, A. (2010). The Generalized extreme value(GEV) distribution, implied tail index and option pricing, Forthcoming Spring 2011 in *The Journal of Derivatives*.

Ritchey, R. J. (1990). Call option valuation for discrete normal mixtures, *Journal of Financial Research*, **13**, 285–296.

Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation, *The Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 470–472.

Savickas, R. (2002). A simple option-pricing formula, *The Financial Review*, **37**, 207–226.