

論文

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2012.40.10.833>

후향계단 유동장 축약모델링 기법

이진익*, 이은석*

Reduced Order Modeling of Backward-Facing-Step Flow Field

Jin-Ik Lee* and Eun-Seok Lee*

ABSTRACT

In this paper, we analyze the reconstruction error in the modeling of flow field on BFS(Backward Facing Step). In order for the mathematical modelling of a density on the field, the spatial and temporal modes are extracted by POD(Proper Orthogonal Decomposition) method. After formulating the modeling error, we summarize the relationship between the energy strength and the reconstruction errors. Moreover the allowable modeling error limits in the flow control point of view are confined by analysing in the frequency domain as well as time domain of the reconstructed data.

초 록

본 논문에서는 후향계단 유동장 모델링 및 복원오차를 분석한다. 유동장의 밀도를 POD(Proper Orthogonal Decomposition) 기법을 통해 공간모드와 시간모드로 추출하여 수학적으로 모델링한다. 모델링 오차를 정립하여 유동에너지와 오차 사이의 관계를 정리한다. 모델링 오차를 시간영역 뿐만 아니라 주파수 영역에서의 분석을 통하여 제어측면에서 오차의 한계를 규정한다.

Key Words : Backward Facing Step(후향계단), Flow Control(유동제어), Flow Field Modeling Error(유동장 모델링 오차), POD(Proper Orthogonal Decomposition)

1. 서 론

최근 들어 유동제어[1-7]와 관련된 유동장 해석 및 모델링, 추정기, 센서 최적화 등에 관련된 연구가 국내에서도 활발히 진행되고 있다. 유동 제어에 있어서 유동장의 유동의 거동을 정확히 이해하고 해석하는 것이 무엇보다 중요하다. 하지만 유동장에서의 유동은 동역학적 구속조건이 매우 복잡하여 해석적 해를 구하기가 쉽지 않은

것으로 알려져 있다. 대부분의 경우 전산유체역학(CFD: Computational Fluid Dynamics)을 통하여 수치적으로 구한 해 또는 풍동실험을 통해 획득한 데이터를 이용하여 유동장을 분석하고 해석한다. 이때 얻어진 대용량의 데이터로부터 유동의 특성을 분석하는 기법으로는 신호 측면에서는 POD[8], Karhunen-Loeve[9] 또는 동역학 측면에서는 Balanced POD[10-11] 방법을 주로 사용한다.

유동장에서의 유동은 공간과 시간의 지배를 받는다. 따라서 유동장은 유동이 형성되는 공간 기하(spatial mode)에 의한 모드와 시간의 흐름에 따른 모드(temporal mode)로 구별할 수 있다. 이러한 물리적 현상으로부터 유동의 주요 운동모드를 추출하여 분석하는 방법이 바로 POD 기법

† 2012년 5월 15 일 접수 ~ 2012년 9월 20일 심사완료

* 정회원, 국방과학연구소

교신저자, E-mail : jilee@fdcl.kaist.ac.kr

대전시 유성구 북유성대로 488번길 160

이라 할 수 있다. 시스템 모델링 측면에서는 공간모드를 파라미터, 시간모드를 상태변수로 해석할 수도 있으며, 수학적으로 특이치 분해(SVD)를 이용하여 구할 수 있다.

이러한 기법을 이용하면 전체의 유동장을 대표하는 주요 운동모드를 추출하여 유동장을 축약할 수도 있다. 이 과정에서 잔재하게 되는 모델링 오차는 유동장에 기여하는 에너지 레벨차원에서 한정하고 있다. 즉 유동의 평균운동 차원에서 모델링 오차 한계가 규정됨을 의미한다. 이때 평균운동은 에너지의 대부분을 차지하고 있는 저주파에 주로 기인한다. 하지만 유동의 박리를 제어하는 측면에서는, 유동 박리에 해당하는 주요 모드도 추출하여 모델링해야 한다. 이러한 모드는 일반적으로 고주파 성분으로, 경우에 따라서는 유동의 평균운동에는 미치는 영향이 작더라도 유동박리에 미치는 영향은 클 수 있다.

유동제어 측면에서의 유동장 모델링의 목적은 제어 대상이 되는 유동의 운동을 수학적으로 모델링하고, 이를 기반으로 제어기를 설계하고 해석한다.

본 연구에서는 유동장 분석에 주로 사용되는 POD의 특성을 간략히 정리하며, 주요 모드로 재구성된 유동장의 특성을 고찰한다. 나아가 유동장 데이터를 축약함에 있어서 축약 시스템의 모델링 오차를 제어측면에서 검토한다.

II. 본 론

1. 유동장 모델링

1.1 유동장 구조

본 연구에서 사용된 유동장 모델은 후향계단 구조로서 Fig. 1과 같다. 길이 $L_x=4m$, 계단 높이 $H=0.15m$, CFD 모델의 총 높이 $L_y=0.85m$ 이다. 제어 수단으로 blowing/suction을 위한 슬롯은 계단 끝 부분에 45도 각도로 직경 1mm를 사용하였다. 유속은 입구에서의 마하 0.3, 계단 끝 부분에서는 $140m/s$ 이고, 레이놀즈수는 1.4×10^6 이다.

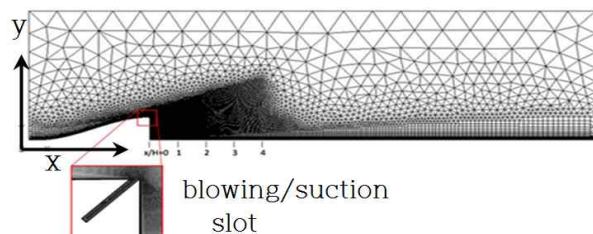


Fig. 1. Geometry of BFS

유동장 모델링은 여러 가지 방법으로 시도되고 있으며, 여기서는 그 중에서도 주로 사용되는 POD[12-15]기법에 대해 개념과 특성을 소개하기로 한다.

1.2 POD 개념

POD라 함은 유동의 “평균” 운동 측면에서 “최적”으로 유동장을 축약함을 의미한다. 이는 측정치(snapshots)를 제공 평균이 최대가 되는 방향으로 투영(largest mean square projection)한다. 즉 분산이 최대가 되는 주축(principal axis)으로 분해함을 의미한다. 이러한 주축 분해를 통해 유동을 다음과 같이 N 차원의 선형조합으로 적교 분리할 수 있다.

$$z(w, t) = \sum_{k=1}^N \phi_k(w) a_k(t) \quad (1)$$

여기서 $w(x, y)$ 는 공간상의 유동장 좌표를 의미한다. $\phi_k(w)$ 는 공간 모드(spatial mode)로서 유동장의 기하와 유동 환경에만 의존적이며 시간에 대해서는 독립적인 모드이다. 반면, $a_k(t)$ 는 시간 모드(temporal mode)라고 하며, 시간에 따른 유동장의 운동 특성을 갖는다. 이때 공간모드는 시간모드 각각 서로 직교하게 된다. 즉

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0, \langle a_i, a_j \rangle = 0 \text{ for } i \neq j$$

수학적으로는 다음과 같은 함수를 최대화하는 기저(basis) 함수 $\Phi = \{\phi_i\}$ 를 찾는 문제로 귀결된다.

$$J = \sum_{i=1}^N |(z_i, \Phi)|^2 \quad (2)$$

여기서

$$(\Phi, \Phi) = \|\Phi\|^2 = 1 \quad (3)$$

여기서 $\{z_i(x) : 1 \leq i \leq N; x \in \Omega\}$ 는 영역 Ω 상에 있는 N 개의 측정치(snapshots)를 의미하며, (\cdot, \cdot) , $\|\cdot\|$ 는 각각 L^2 -내적과 L^2 -norm을 의미한다. 따라서 식(1)의 a_i 는 주어진 Φ 에 대해서 식(2)를 최대화하면서 다음 식을 만족하는 계수이다.

$$\Phi = \sum_{i=1}^N a_i z_i \quad (4)$$

1.3 POD 특성

1.3.1 POD의 분산 특성

POD의 분산(covariance) 특성을 고찰하기 위

해 스냅 샷을 $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t)]^T$ 의 평균이 0인 이산시간 랜덤 프로세스로 가정하자. 이때 식(1)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$z(t) = \Phi a(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i a_i(t) \quad (5)$$

여기서 기저함수 행렬 $\Phi = \{\phi_i\}$, $\Phi^T \Phi = I$ 이다. 이제, 다음과 같은 분산행렬(covariance matrix)의 고유치 문제를 생각해보자.

$$R_\Phi \phi_i = \lambda_i \phi_i \quad (6)$$

여기서 $R_\Phi := E[zz^T]$ 는 $z(t)$ 의 분산행렬로서 다음과 같이 기저행렬로 표현된다.

$$R_\Phi = \Phi \Lambda \Phi^T = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i \phi_i^T \quad (7)$$

또한 $a(t)$ 의 분산행렬은 식(5), (7)로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R_a := E[a(t)a^T(t)] = \Phi^T R_\Phi \Phi = \Lambda \quad (8)$$

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$$

결과적으로 식(7), (8)로부터 다음과 같은 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$E[z^T z] = E[a^T a] = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (9)$$

위 식으로부터 POD 전후의 제곱평균은 값은 분산행렬의 고유치 합으로서 동일함을 알 수 있다.

1.3.2 POD의 최적성

고유치를 내림차로 정렬할 때 처음 $n (< N)$ 개로 표현되는 수직 분해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{z}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i a_i(t) \quad (10)$$

스냅 샷을 N 개의 선형조합으로 분해할 때, 처음 n 개까지는 오차가 없으며 n 개 이후부터 오차로 잔재하게 된다. 따라서 오차는 다음과 같이 제곱평균 측면(in the sense of the mean square)에서 최소(최적)가 됨을 알 수 있다.

$$\epsilon = E[(z - \hat{z})^T (z - \hat{z})] = \sum_{i=n+1}^N \lambda_i \quad (11)$$

1.3.3 POD 기저함수의 최적성

앞에서 스냅 샷 $z(x,t) \in L^2(\Omega, [0, T])$ 을 기저함수와 고유치 $\{\phi_i, \lambda_i: \lambda_i \geq \lambda_{i+1} > 0\}_{i=1}^\infty$ 로 식(1)과 같이 직교 분해함을 보였다.

만약 임의의 단위 기저(orthonormal) 벡터를 $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ 로 정의하여 식(1)을 다음과 같이 표현하였다고 하자.

$$z(x,t) = \sum_i b_i(t) \psi_i(x) \quad (12)$$

기저벡터의 크기가 1이고, $\langle a_i(t), a_j^*(t) \rangle = \delta_{ij} \lambda_i$ 이므로(uncorrelated) 모든 n 에 대하여 직관적으로 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{i=1}^n \langle a_i(t), a_i^*(t) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq \sum_{i=1}^n \langle b_i(t), b_i^*(t) \rangle \quad (13)$$

즉 처음 n 개의 POD 기저함수로 유동장을 캡처한 경우, 다른 기저함수로 캡처한 경우보다 유동장 에너지를 많이 포함하고 있음을 의미한다. 즉 POD의 기저함수 또한 유동에너지의 제곱평균 측면에서 최적성을 내포하고 있다.

2. 유동장 모델링 오차

POD를 통해 식(1)로 표현된 유동장을 식(10)과 같이 축약한 후 원래 신호와의 오차척도를 표현하는 방법에 대해 크게 두 가지 측면에서 정리하기로 한다.

2.1 에너지 측면에서의 모델링 오차정의

유동장을 POD를 통해 선형조합으로 표현함에 있어서 기저함수 $\phi_i(x)$ 를 무차원화 하자. 이때 시간 계수 a_i 는 $z(x,t)$ 와 같은 단위가 된다. 만약 $z(x,t)$ 를 속도라 하면 $\langle a_i(t), a_i^*(t) \rangle = \lambda_i$ 는 i -번째 모드의 평균 운동에너지가 된다. 따라서 유동장 축약 모델링을 위해 처음 n 개를 선택한 경우 축약된 에너지 비는 다음과 같이 표현된다.

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \quad (14)$$

모델링 오차 비도 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\epsilon = \left(\frac{\sum_{i=n+1}^N \lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \right) = 1 - \eta \quad (15)$$

경우에 따라서는 위 값의 제공근을 오차로 정의하여 사용하기도 한다.

2.2 L_2 -norm 오차

측정된 스냅 샷과 축약된 모델 사이의 평균 거리(L_2 -norm) 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$l_w(t) = \frac{1}{n_w} \left(\sum_{j=1}^{n_w} (z_{ij} - \hat{z}_{ij})^2 \right)^{1/2} \quad (16-a)$$

$$l_t(x, y) = \frac{1}{n_t} \left(\sum_{i=1}^{n_t} (z_{ij} - \hat{z}_{ij})^2 \right)^{1/2} \quad (16-b)$$

여기서 $n_w = n_x \times n_y$ 로 총 격자점 수이고, n_t 은 시간에 대한 샘플 수이다. 이때, 오차 비는 전체 길이(신호의 크기)에 대한 신호 복원오차로 정규화 할 수 있다.

$$\epsilon_w(t) = \frac{1}{n_w} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_w} (z_{ij} - \hat{z}_{ij})^2}{\sum_{j=1}^{n_w} z_{ij}^2} \right]^{1/2} \quad (17-a)$$

$$\epsilon_t(x, y) = \frac{1}{n_t} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_t} (z_{ij} - \hat{z}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^{n_t} z_{ij}^2} \right]^{1/2} \quad (17-b)$$

식(15)가 유동장 에너지 측면에서의 모델링 오차 정도를 나타내는 반면, 식(17)은 각 격자점에서의 오차 정도를 표현할 수 있는 척도로 사용된다.

3. BFS의 모델링 오차분석

유동장의 유동은 매우 복잡하며 비선형성이 강한 동특성을 갖고 있는 것으로 알려져 있다. 따라서 이를 모델링하기 위해서는 블랙박스 모델링 개념을 도입하여 다양한 입력을 유동장에 인가하여 유동의 변화를 고찰함으로써 그 응답특성을 수학적으로 표현한다. 이때 실험으로부터 획득된 방대한 양의 자료는 수학적 표현 과정에서 축약된 형태로 표현된다. 이러한 모델링 과정에서 오차를 최소화하는 문제는 유동의 주요 운동 모드 수 즉 시스템 차수의 선택문제로 귀결된다. 시스템 차수가 높을수록 오차는 줄어들게 되는 반면 제어기 설계과정이나 해석 과정이 복잡해지고, 특히 시뮬레이션시 신호 복원에 많은 시간이 소요된다. 반대로, 차수가 낮으면 유동장 내의 주요 운동 모드가 평균적 형태로 표현되어 모델링 오차는 상대적으로 커지게 된다.

후향계단구조를 갖는 유동장의 유동 모델링을 위해 개루프 입력을 인가하여 응답특성을 고찰하였다. 자유류(U_∞) 경우를 포함하여 400, 600 및 800Hz의 주파수와, 자유류의 5.0 및 10% 크기를

갖는 정현과 입력에 대한 실험결과(CFD)를 축약 모델링하여 오차를 분석하였다.

전체 유동장의 응답특성을 분석하기 위해 실험 데이터를 모두 확장(augment)하여 하나의 행렬로 구성하였다.

$$Z = [z_1, z_2, \dots, z_m] \quad (18)$$

확장된 데이터를 특이치 분해(SVD)로 POD를 수행함으로써 다음과 같이 공간모드, 시간모드, 그리고 모드의 에너지(고유치)로 표현할 수 있다.

$$Z = U \Sigma V^T \quad (19)$$

여기서 공간 및 시간모드는 각각 다음과 같다.

$$\phi = U \quad (20-a)$$

$$a = \Sigma V^T \quad (20-b)$$

이때 고유치 $\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N]$, $\sigma_i \geq \sigma_j$, $i < j$ 는 내림차순으로 정렬된다. 처음 $n (< N)$ 개만 선택하면 축약신호(reconstruction)는 다음과 같은 형태로 표현이 된다.

$$\hat{Z} = \sum_{k=1}^n \phi_k(x) a_k(t) \quad (21)$$

식(14)를 이용하여 모드 수에 따른 축약 에너지 비를 도시하면 Fig. 2와 같다. 참고로, 유동장 축약에는 $x=0 \sim 0.45$, $y=-0.075 \sim 0.075$ 영역의 데이터를 사용하였으며, 샘플링 시간은 $ts=50\mu s$ 이다.

오차의 한계를 5%로 설정할 경우 선택되는 모드 수는 1차 자유류 모드를 포함하여 5개(엄밀히는 4개이나 4,5차 모드가 쌍을 이룸)이다. 그림에서 자유류에 해당하는 첫 번째 모드의 에너지가 상대적으로 매우 커서 나머지 모드들은 에너지 비 측면에서는 기여도가 매우 낮은 것으로 간주된다. 하지만 실제 유동 박리는 고주파에서 발생하므로 자유류 뿐만 아니라 나머지 모드($i > 1$)들의 모델링 오차가 유동장 모델링 나아가 유동 제어에 미치는 영향이 커질 수 있다. 따라서 에너지 비의 분별력을 높이기 위해 식 (14)를 다음과 같이 재정의 한다.

$$\eta = \sum_{i=2}^n \lambda_i / \sum_{i=2}^N \lambda_i \quad (22)$$

이때 모델링 오차 비를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\epsilon = \left(\sum_{i=n+1}^N \lambda_i \right) / \left(\sum_{i=2}^N \lambda_i \right) = 1 - \eta \quad (23)$$

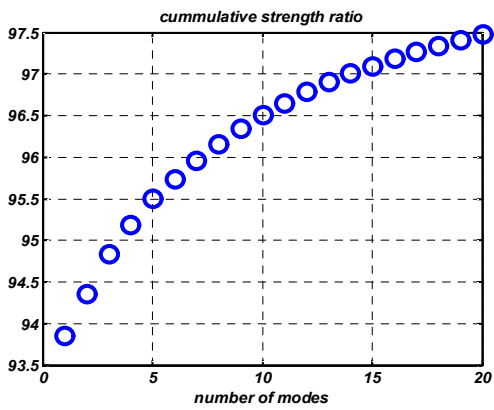
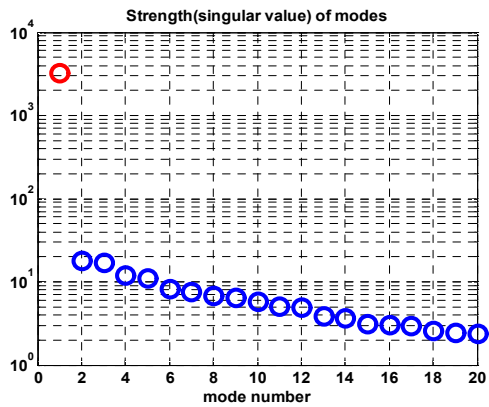


Fig. 2. Energy Strength

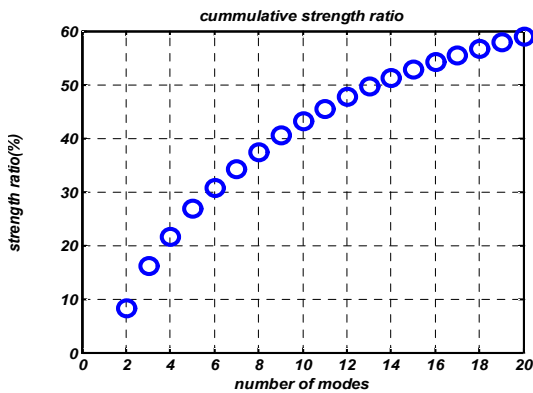
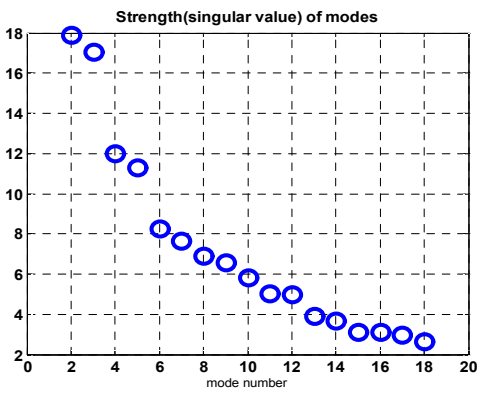


Fig. 3. Energy Strength Except to 1st Mode

Figure 3은 식(22)에 의해 자유류를 제외한 에너지 비이다. 앞에서 선택한 5개의 모드는 자유류를 제외하고 재해석할 경우 고주파 에너지의 27%에 해당하며, 2번째 모드의 약 50%에 해당하는 6번째 모드부터는 모델링에서 제외하게 됨을 의미한다.

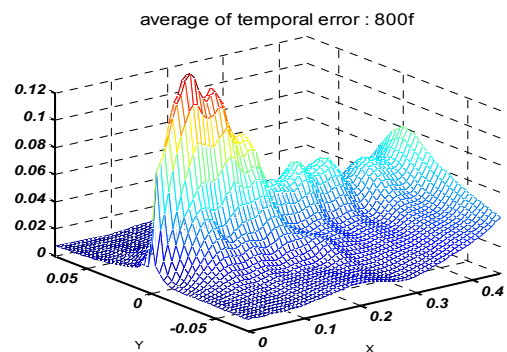
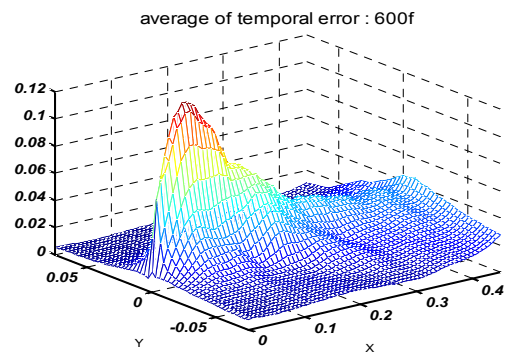
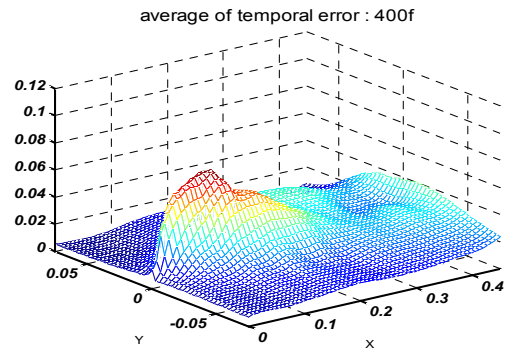
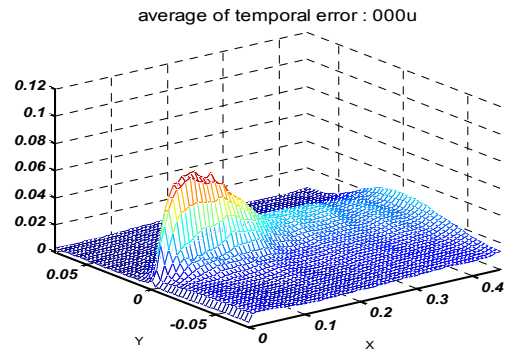


Fig. 4. Energy Strength Except to 1st Mode

한편 $n=5$ 개의 모드를 선택한 경우 10%의 입력에 대한 신호를 복원하였을 경우 원래 신호와의 오차는 Fig. 4와 같다. 그림에서 예상대로 축약 차수가 제한될수록 유동의 변화가 심한 계단(노즐) 근방일수록 그리고 고주파일수록 오차가 커짐을 알 수 있다. 또한 시험 데이터 종류가 많을수록 복원 오차가 커지는데 POD가 시험 데이터 전체의 분산 평균을 최소화하는 개념에 기인한 것이다.

오차를 보다 정량적으로 분석하기 위해 노즐 부근(0,0), 공간모드(Fig. 5)의 극점 (0.2,0.0), 유동의 wake가 떨어져 나가는 지점(0.4,0.0)에서의 시간에 따른 오차를 Fig. 6에 도시하였다.

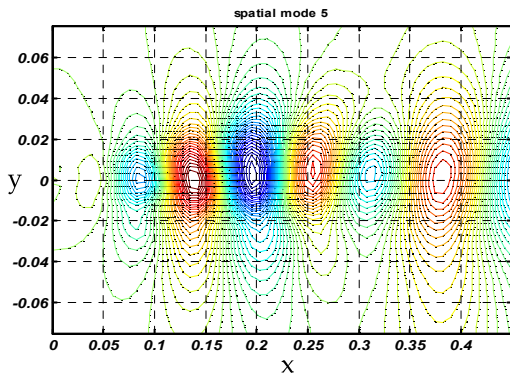


Fig. 5. Spatial Mode(5th)

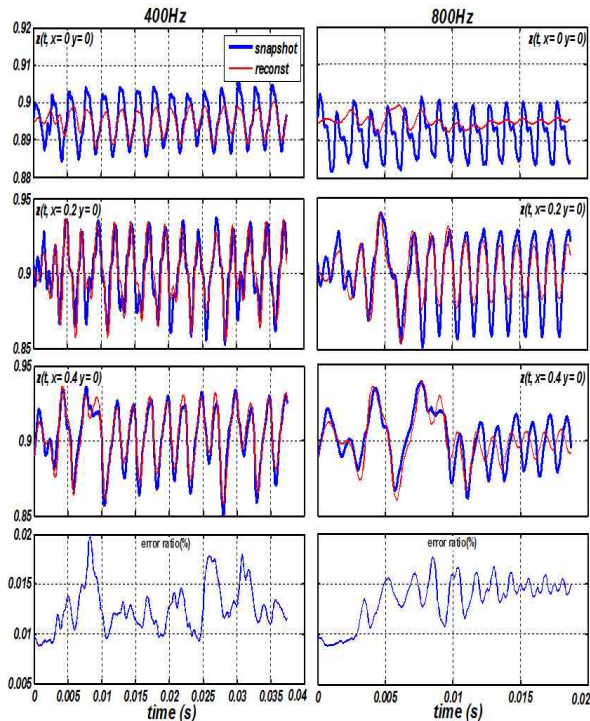


Fig. 6. Reconstructed Signals($n=5$)

그림에서 400Hz인 경우 크기의 오차는 다소 있더라도 위상오차는 크지 않는 반면, 800Hz인 경우 위상오차가 약 90도 정도 발생한다. 이러한

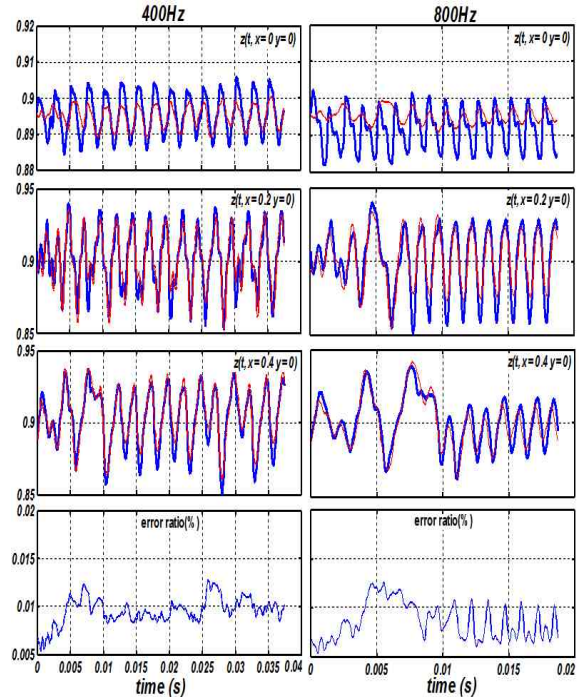


Fig. 7. Reconstructed Signals($n=9$)

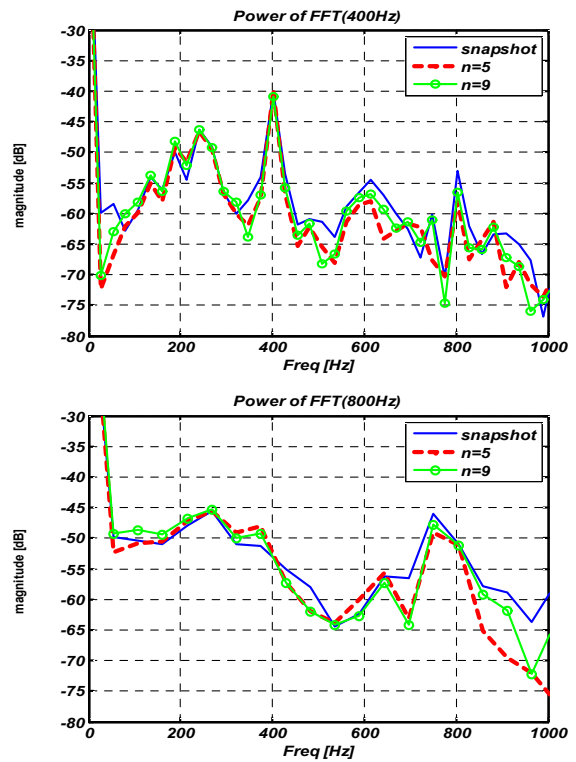


Fig. 8. Frequency Spectra($n=5$ vs. $n=9$)

오차가 포함된 모델을 이용하여 제어를 설계할 경우 안정도(위상여유)에 상당한 영향을 줄 수 있음을 유동장 모델링 단계에서 감안해야 한다. 참고로, 시스템의 특성에 의존적이긴 하지만, 일반적으로 제어기 설계에 있어서 이득여유 6dB, 위상이득 30도의 이상의 안정도를 확보한다. 따라서 90도의 위상오차를 갖는 모델로부터 안정적인 제어를 설계하는 것은 매우 어렵다. 이에 대한 해결방안으로 축약 시스템의 차수를 $n=9$ 로 확장한 경우 Fig. 7에 도시하였다. 그림에서는 800Hz 신호에 대해 최대 위상오차가 약 30도 이내로 상당히 줄어들었음을 알 수 있다.

한편, 크기에 대한 오차를 확인하기 위해 주파수 스펙트럼을 조사하였다(Fig. 8). 축약 차수가 높을수록 고주파에서의 모델링에 의한 감쇄가 적음을 확인할 수 있다. 결론적으로 유동장 모델링 시 식(14), (22)에서와 같이 에너지의 비를 이용하여 축약차수를 결정할 경우 신호의 위상이나 주파수별 감쇄정도를 판단하기 쉽지 않으므로 이러한 스펙트럼 분석이 요구된다.

III. 결 론

후향계단구조의 유동장을 축약 모델링에 대해서 정리하였다. 유동장의 모델링은 자유류에 의한 에너지가 윗등하므로 에너지 차원에서 축약 차수를 결정하는 것보다, 본 연구에서 제시한 바와 같이 제어기 설계측면에서 축약된 시스템의 주파수 스펙트럼 분석을 통해 축약 차수를 결정해야 함을 확인하였다.

참고문헌

- 1) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "BFS 유동 제어를 위한 ARX 구조의 유동장 모델링 기법," 2011 한국 항공우주공학회 추계학술발표회, 강원도 용평 리조트, 2011.11.
- 2) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "BFS 모델의 유동제어를 위한 유동장 스펙트럼 분석," 2011 한국 항공우주공학회 추계학술발표회, 강원도 용평 리조트, 2011.11.
- 3) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "BFS 유동장의 제어측면에서의 유동 축약모델링," 2011 한국 항공우주공학회 추계학술발표회, 강원도 용평 리조트, 2011.11.
- 4) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "BFS 유동장의 축약 모델링 오차 분석," 2011 한국 전산유

체공학회 추계학술대회, 대구 영남대 경산캠퍼스, 2011.11.

- 5) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "다변수 제어형 최소자승 알고리즘을 이용한 유동 상태 추정기 설계," 2011 한국 전산유체공학회 추계학술대회, 대구 영남대 경산캠퍼스, 2011.11.

- 6) 이진익, 이은석, 전병을, 이광섭, "유동 상태 추정을 위한 센서위치 최적화 기법에 관한 연구," 2011 한국 전산유체공학회 추계학술대회, 대구 영남대 경산캠퍼스, 2011.11.

- 7) 이진익, "유동능동제어 기술 소개," 2011 항공우주학회 추계학술발표회, 2012 유도항법제어 기술 심포지움, 부산 해운대 한화컨도, 2012.2

- (8) Anindya Chatterjee, "An introduction to the proper orthogonal decomposition," Current Science, Vol.78, No.7, 2000. pp.808-817.

- 9) Y. Hua and W. Liu, 1998, "Generalized Karhunen-Loeve transform," IEEE Signal Processing Letters, Vol. 5, pp. 141-142.

- 10) M. Ilak and C. W. Rowley, 2008, "Modeling of transitional Channel Flow Using Balanced Proper Orthogonal Decomposition," Physics of Fluids 20.

- 11) K. Willcox and J. Peraire, 2002, "Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition," AIAA J. Vol. 40, No. 11, pp. 2323-2330.

- 12) P. J. Holmes, J. L. Lumley, G. Berkooz, J. C. Mattingly, and R. W. Wittenberg, 1997, "Low-dimensional models of coherent structures in turbulence," Physics Reports, Vol.287, Issue 4, pp. 337-384.

- 13) Hung V. Ly and Hien T. Tran, 1999, Modeling and Control of Physical Processes using Proper Orthogonal Decomposition, Center for Research in Scientific Computation-Box, North Carolina State Univ., USA.

- 14) P. G. Cizmas, A. Palacios, T. O'Brien, and M. Syamlal, 2003, "Proper-Orthogonal Decomposition of Spatio-Temporal Patterns in Fluidized Beds," Chemical Engineering Science 58, pp. 4417-4427.

- 15) X. Chen and A. Kareem, 2005. "Proper Orthogonal Decomposition-Based Modeling, Analysis, and Simulation of Dynamic Wind Load Effects on Structures," J. of Engineering Mechanics, pp. 325-339.