

복소 벡터와 dq 변환을 이용한 교류기 모델링에 관한 연구

A Study on AC Machine Modeling using Complex Vector and dq Transformation

홍 선 기[†] · 박 진 호^{*}
 (Sun-Ki Hong · Jin-Ho Park)

Abstract - Three-phase voltage and current is applied to the three-phase alternating current motors which are commonly used in industry. Three phase variables of a, b, c are converted into $d, q, 0$ axis and the AC machines are modeled and analyzed. Basically the coordinate transformation or $d-q$ transformation is used for convenience, a few steps are needed to analyze the motor performances - separating d and q components, establishing each equivalent circuit, and solving the differential equations of the circuits. In this study, a modeling technique of induction motor using complex vector is proposed and it can explain the induction motor physically. This method does not need the separating process of d and q components. With this technique, the model becomes simple, is easy to understand in physical, and can get the same results with those from the other models. These simulation results of the proposed model are compared with them for the conformation of the proposed method.

Key Words : AC machine modeling, Complex vector, dq transformation, Simulation

1. 서 론

3상 유도 전동기는 산업계에서 널리 사용되고 있으며, 유도기 자체 뿐 아니라, 제어에 관련한 연구[1-3]도 활발히 진행되고 있다. 이러한 연구의 기본은 유도기에 대한 모델링이며, 모델링은 유도기를 직접 제작하거나 실험하지 않고 시뮬레이션 상에서 유도기의 전류와 토크 속도 등의 특성을 과도상태 뿐 아니라 정상상태 파형까지 볼 수 있어서 유도기의 제작이나 검증 혹은 이상여부를 비교하는 기준을 제공해준다. 3상 교류기의 모델링은 기본적으로 $d - q$ 변환 즉 좌표 변환을 통해서 a, b, c 상을 d, q 축으로 변환하여 3상에 대한 수식을 전류축과 자속축으로 변환하여 마치 직류기처럼 해석하는 것이다. $d - q$ 변환을 기본으로 하여 유도기를 해석하는 관점과 과정에 따라서 여러 가지 모델링[4-6]이 가능하다.

본 연구에서는 간단하면서도 유도기를 물리적으로 가장 잘 설명할 수 있는 복소 벡터를 이용한 모델링 및 시뮬레이션 연구를 수행하였다. 우선 기존에 제시된 시간당 자속 쇄교수를 매개변수로 만들어진 모델[5]을 시뮬레이션하여 특성을 파악하였다. 다음으로 자속 쇄교수 자체를 매개 변수로 하는 모델[6]에 대한 검토와 이에 대한 수식화 및 모델링을 수행하고 시뮬레이션을 하였다. 또한 제안된 모델의 타당성을 확인하기 위하여 같은 유도기에 대하여 복소벡터를 이용한 수식화와 이를 매트랩-시뮬링크를 이용하여 모델을 구현하였다. 기존 모델과 제안된 모델의 모델링을 통해 제안된 방법의 구현 간결성과 장점을 확인하고, 시뮬레이션을 수행

하여, 속도, 토크 및 전류 등의 결과 파형을 서로 비교하여 그 타당성을 확인한다.

2. 유도전동기 모델링

유도기의 모델링은 유도전동기를 수식적으로 유도하고, 이로부터 등가회로를 유도하여 해석한다. 여기서는 매트랩 시뮬링크(매트랩 시뮬링크)를 이용하여 시뮬레이션을 수행하였다. 매트랩 시뮬링크는 수식적 계산이 용의하며 그래픽 언어로써 구성과 흐름이 순서도와 비슷하여 알고리즘 구축 및 디버깅이 편리하며, 유도기의 인가전압 혹은 저항, 임피던스와 같은 입력 변수의 경우 m파일을 통하여 쉽게 수정할 수 있어서 모델링 구축 시 입력 변수만 수정하면 출력 값을 쉽게 확인 가능하다.

2.1 정지 좌표계에서의 유도기 모델링

3상 인가 전압을 dq 변환한 후, 여기에 고정자 축과 회전자 축에서의 전압방정식을 임의 좌표계에 대하여 세우면 식 (1), (2)와 같이 정리된다[5]. 또한, 이와 관련하여 자속쇄교수와 토크 관련식은 각각 (3)과 (4)와 같다.

$$v_{qs} = p\lambda_{qs} + \omega\lambda_{ds} + r_s i_{qs} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} v_{ds} &= p\lambda_{ds} - \omega\lambda_{qs} + r_s i_{ds} \\ v'_{qr} &= p\lambda'_{qr} + (\omega - \omega_r)\lambda'_{dr} + r'_r i'_{qr} \end{aligned} \quad (2)$$

$$v'_{dr} = p\lambda'_{dr} - (\omega - \omega_r)\lambda'_{qr} + r'_r i'_{dr}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{qs} \\ \lambda_{ds} \\ \lambda'_{qr} \\ \lambda'_{dr} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_m & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_{ls} + L_m & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L'_{lr} + L_m & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L'_{lr} + L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{pmatrix} \quad (3)$$

[†] 교신저자, 정회원 : 호서대학교 시스템제어공학과 교수

E-mail : skhong@hoseo.edu

^{*} 준 회원 : 호서대학교 시스템제어공학과 석사과정

접수일자 : 2012년 7월 4일

최종완료 : 2012년 10월 11일

$$\begin{aligned}
 T_{em} &= \frac{3}{2} \frac{P}{2} (\lambda_{ds} i_{qs} - \lambda_{qs} i_{ds}) \\
 &= \frac{3}{2} \frac{P}{2} (\lambda_{ds} i_{qs} - \lambda_{qs} i_{ds}) \\
 &= \frac{3}{2} \frac{P}{2} L_m (i'_{dr} i_{qs} - i'_{qr} i_{ds})
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

여기서, 첨자 q 는 q 축, d 는 d 축을 의미하며, l 은 누설, m 은 상호, s 는 고정자 축, r 은 회전자 축을 의미한다. 또한 p 는 미분연산자이며, λ 는 자속쇄교수, ω 는 좌표 회전각속도, ω_r 은 회전자 각속도이다. T_{em} 은 발생토크이며, P 는 극수이다. 이들 수식으로부터 Ong[5]은 시뮬레이션의 편의를 위해 시간당 자속쇄교수 $\psi = \omega_b \lambda$ 를 도입하였다. 이것은 자속쇄교수에 동기각속도 ω_b 를 곱한 것으로, 전압 차원이 된다. 이로부터 식을 다시 쓰면 식(5)에서 (8)이 된다[5].

$$v_{qs} = \frac{p}{\omega_b} \psi_{qs} + \frac{\omega}{\omega_b} \psi_{ds} + r_s i_{qs} \tag{5}$$

$$v_{ds} = \frac{p}{\omega_b} \psi_{ds} - \frac{\omega}{\omega_b} \psi_{qs} + r_s i_{ds}$$

$$v'_{qr} = \frac{p}{\omega_b} \psi'_{qr} + \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_b} \right) \psi'_{ds} + r'_r i'_{qr} \tag{6}$$

$$v'_{dr} = \frac{p}{\omega_b} \psi'_{dr} - \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_b} \right) \psi'_{qs} + r'_r i'_{dr}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{qs} \\ \psi_{ds} \\ \psi'_{qs} \\ \psi'_{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ls} + x_m & 0 & x_m & 0 \\ 0 & x_{ls} + x_m & 0 & x_m \\ x_m & 0 & x'_{lr} + x_m & 0 \\ 0 & x'_m & 0 & x'_{lr} + x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$T_{em} = \frac{3}{2} \frac{P}{2\omega_b} (\psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds}) \tag{8}$$

이들 식으로부터 정지 좌표계($\omega = 0$)에서의 유도기 모델을 매트랩 시뮬링크로 구현한 블록도가 그림 1이다. 그림 1은 3상의 입력 전압 a, b, c 상을 받아서 d-q 변환을 통하여 d축 전압과 q축 전압을 구하고, 여기에 식(5)에서 (8)에 정리된 식들처럼, 미분 방정식들로부터 다시 미분항에 대하여 정리하여, 인가전압, 단위시간당 자속 쇄교수들의 관계를 정리하여 구성된 것이다. 여기서 rotor 블록은 모터의 속도와 토크를 계산하는 블록이다. 그림 2는 그림 1의 q축 블록에 대한 상세 블록도이다.

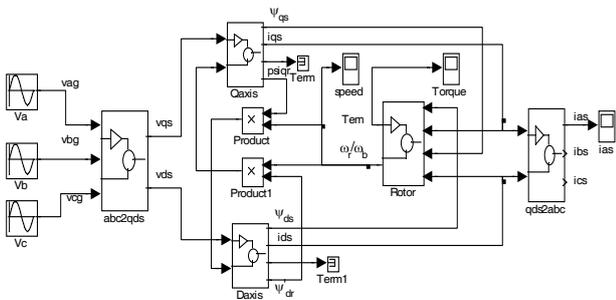


그림 1 임의좌표계에서 $\psi = \omega_b \lambda$ 를 이용한 유도기 모델
Fig. 1 IM model using $\psi = \omega_b \lambda$ for arbitrary ref. frame

그림 1, 2에서 알 수 있듯이, 그림 1과 같이 개념적 블록도는 간단해 보이지만, 여기서는 전류 변수를 소개하기 위해 ψ 라는 변수가 생성되게 되며, 실제 프로그래밍을 하기 위해서는 그림 2와 같은 복잡한 상세 블록이 필요하게 된다. 또한 속도, 토크 및 전류 등을 구하기 위해서는 ψ 관련 식들로부터 다시 유도해야 하는 번거로움이 있다. 더욱이 ψ 는 시간당 자속 쇄교수로 모터 해석 측면에서 물리적 의미가 모호하다.

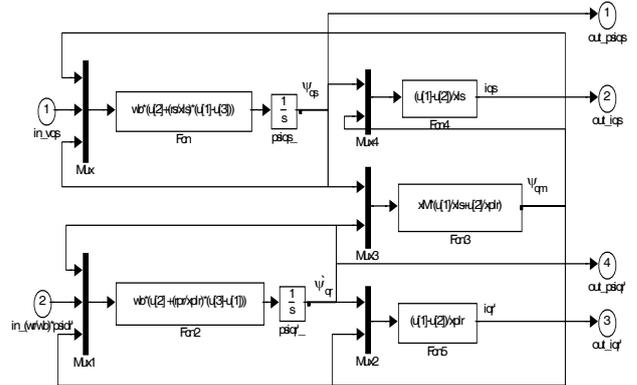


그림 2 그림 1에서의 q축 연산 블록
Fig. 2 Q-axis calculation block in Fig. 1

2.2 λ 가 매개변수인 유도기 모델링

식(1)에서 (4)와 같이 유도기에서 생성되는 변수인 λ 를 그대로 식에 정리하여 모델링하는 것이 유도기에 더욱 직접적인 모델링이다. 따라서 λ 에 대하여 식을 정지 좌표계에서 다시 정리한 것이 식(9)에서 (12)이다.

$$i_{qs} = \frac{1}{L_s + L_m} \int (v_{qs} - r_s i_{qs} - \omega \lambda_{ds} - L_m \frac{d}{dt} i'_{qr}) dt \tag{9}$$

$$i_{ds} = \frac{1}{L_s + L_m} \int (v_{ds} - r_s i_{ds} - \omega \lambda_{qs} - L_m \frac{d}{dt} i'_{dr}) dt$$

$$i'_{qr} = \frac{1}{L'_r + L_m} \int \left(-r'_r i'_{qr} - (\omega - \omega_r) \lambda'_{dr} - L_m \frac{d}{dt} i_{qs} \right) dt \tag{10}$$

$$i'_{dr} = \frac{1}{L'_r + L_m} \int \left(-r'_r i'_{dr} - (\omega - \omega_r) \lambda'_{qr} - L_m \frac{d}{dt} i_{ds} \right) dt$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{qs} \\ \lambda_{ds} \\ \lambda'_{qr} \\ \lambda'_{dr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_s + L_m & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_s + L_m & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L'_r + L_m & 0 \\ 0 & L'_m & 0 & L'_r + L_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$T_{em} = \frac{P}{2} \frac{3}{2} L_m (i_{qs} i'_{dr} - i_{ds} i'_{qr}) \tag{12}$$

여기서, $L_s = L_{ls} + L_m$, $L'_r = L'_{lr} + L_m$ 으로 놓고, 이들 식으로부터 시뮬링크로 구현한 것이 그림 3이 된다. 그림 2는 ψ 와 같은 매개 변수를 사용하지 않고 자속쇄교수 λ 를 이용

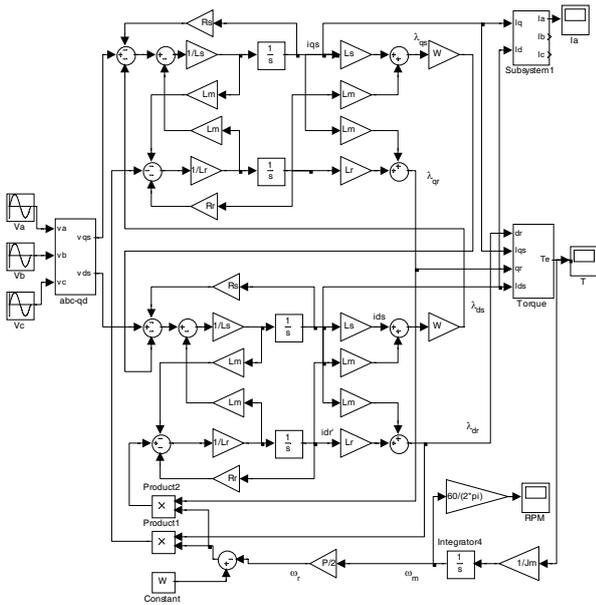


그림 3 자속 쇄교수 λ를 이용한 임의좌표계 유도기 모델
 Fig. 3 IM model using flux linkage λ for arbitrary ref. frame

하여 수식이 구성되고 프로그램이 작성되어, 좀 더 물리적인 의미에 충실하다. 하지만, 블록도가 좀 더 복잡해 보이는 단점도 존재한다.

2.3 복소 벡터를 이용한 유도기 모델링

복소 벡터를 이용한 유도기 모델링은 실수와 허수로 나누어진 복소 벡터에서 실수축을 q축으로 허수축을 d축으로 설정하고 유도기를 모델링 하는 방식이다. 이와 같이 모델링은 이전의 q 성분과 d성분을 분리하여 계산하는 경우보다 수식이 간결해지고, 복소수를 계산할 수 있다면 시뮬레이션에서도 매우 간편한 방법이 될 수 있다. 이제까지는 이를 구현하는데 어려움이 있어 q성분과 d성분을 분리하여 계산하였지만, 본 연구에서는 매트랩 시뮬링크에서 복소수에 대한 연산에 필요시 이를 처리할 수 있는 함수 블록을 만들어 처리함으로써 더욱 간결하게 모델링을 구현 할 수 있다. 다음 식(13), (14)는 이를 구현하기 위해 복소 벡터를 이용한 식을 나타낸 것이다[5].

$$v_{qd} = r_s i_{qd} + \frac{d}{dt} \lambda_{qd} + j\omega \lambda_{qd} \quad (13)$$

$$v_{qdr} = r_r i_{qdr} + \frac{d}{dt} \lambda_{qdr} + j(\omega - \omega_r) \lambda_{qdr}$$

$$\lambda_{qd} = L_s i_{qd} + L_m i_{qdr} \quad (14)$$

$$\lambda_{qdr} = L_r i_{qdr} + L_m i_{qd}$$

식 (13) 및 (14)는 전압방정식과 자속쇄교수에 대한 복소 벡터 식이다. 여기서는 i_{qd} 와 λ_{qdr} 를 매개변수로 하고, λ_{qd} , i_{qdr} 를 소거하기 위해, 식 (14)를 이용하여 다음 식(15)가 만

들어진다.

$$\lambda_{qd} = \sigma L_s i_{qd} + \frac{L_m}{L_r} \lambda_{qdr} \quad (15)$$

$$\sigma = \left(1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}\right)$$

여기서 식을 간단히 표현하기 위해 σ를 정의하였다. 이 식을 다시 식(13)에 대입해서 식(16)을 얻는다.

$$\sigma L_s \frac{d}{dt} i_{qd} = v_{qd} - (r_s + j\omega \sigma L_s) i_{qd} - \frac{L_m}{L_r} \left(\frac{d}{dt} \lambda_{qdr} + j\omega \lambda_{qdr}\right) \quad (16)$$

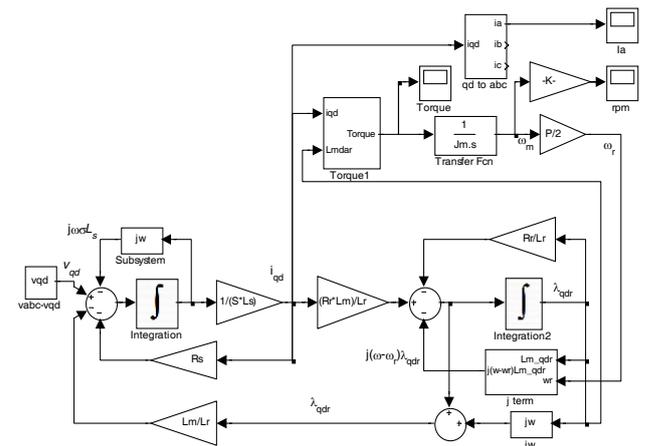


그림 4 임의 좌표계에서 복소 벡터를 이용한 유도기 모델
 Fig. 4 IM model using complex vector for arbitrary ref. frame

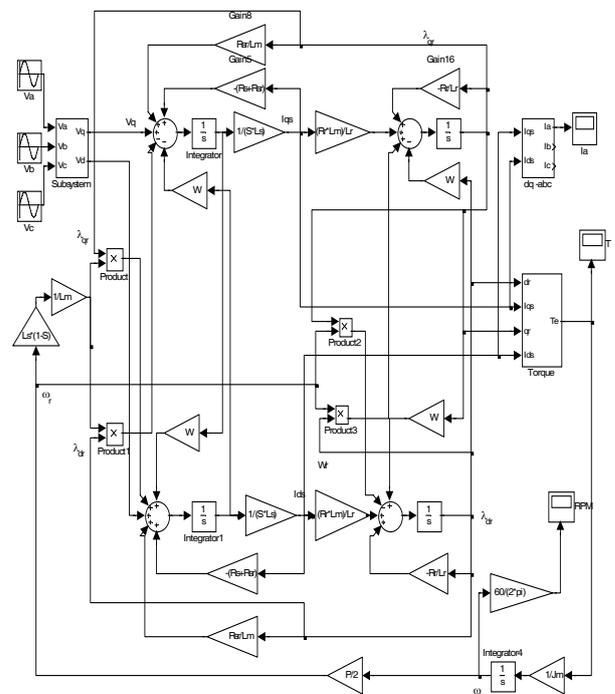


그림 5 임의 좌표계에서의 스칼라로 표현된 유도기 모델
 Fig. 5 IM model using scalar for arbitrary ref. frame

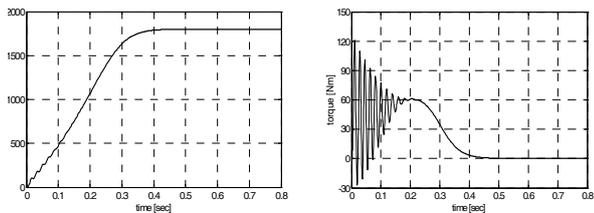
$$\frac{d}{dt} \lambda_{qdr} = -\frac{r_r}{L_r} \lambda_{qdr} - j(\omega - \omega_r) \lambda_{qdr} + r_r \frac{L_m}{L_r} i_{qd}$$

식(16)으로부터 시뮬링크로 나타낸 것이 그림 4이다. 그림 4는 그림 1처럼 별도의 매개변수를 사용할 필요도 없고, 그림 3처럼 흐름이 복잡하지도 않으며, 식(16)으로부터 물리적 이해와 더불어 바로 구현될 수 있다. 그림 5는 그림 4와 같은 경우이지만, 2.1, 2.2절에서와 같이 d, q 성분을 분리하여 벡터가 아닌 스칼라로 수식을 만들고 시뮬링크로 프로그래밍한 경우이다. 그림 4와 비교하여 알 수 있듯이, 프로그램이 매우 복잡해지고 흐름을 파악하기도 어려우며, 이에 따라 디버깅도 복잡해진다. 이로부터 알 수 있듯이, 복소 벡터로 프로그래밍이 되면, 수식을 포함하여 그 구성이 간결하고 이에 따라 프로그래밍도 쉽고, 디버깅도 쉬워져서 매우 우수한 방법으로 판단된다.

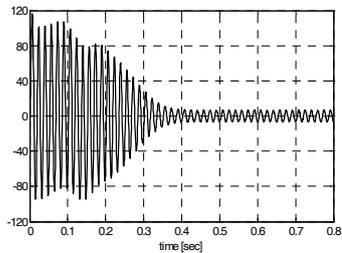
3. 시뮬레이션 및 비교

그림 6은 2.1절의 임의 좌표계에서 $\psi = w_e \lambda$ 를 이용하여 만들어진 모델에 대해 유도전동기의 시간에 따른 속도 응답, 토크 응답 및 전류에 대해 시뮬레이션된 파형을 보여주고 있다. 여기서, 유도기 사양은 220[V], 60[Hz] 인가전원에, 4극기이고, 1, 2차저항은 각각 0.435[Ω], 0.816[Ω], 1, 2차 누설 인덕턴스 2[mH], 자화리액턴스 69.3[mH]이다. 또한 관성 모멘트는 0.089로 두었다.

그림 7, 그림 8은 각각 그림 6과 마찬가지로 2.2절, 2.3절에서 논의된 방식의 유도기 모델에 대하여 속도, 토크 및 전류를 시뮬레이션한 파형이다. 이들도 같은 조건에 대하여 시뮬레이션을 수행하였으며, 유도기 모델에 있어서 λ 를 이용하여 모델링 한 경우 및 복소 벡터를 이용하여 모델링 한



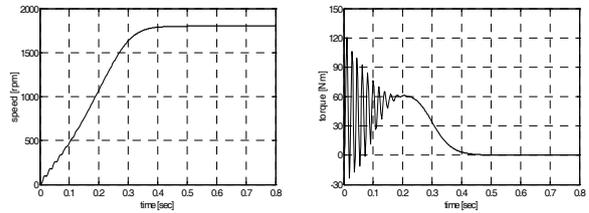
(a) 속도 파형 (a) speed waveform
(b) 토크 파형 (b) torque waveform



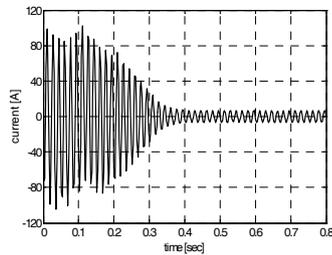
(c) 전류 파형 (c) current waveform

그림 6 임의 좌표계 $\psi = w_e \lambda$ 를 이용한 유도기 모델 파형
Fig. 6 IM waveform using $\psi = w_e \lambda$ for arbitrary ref. frame

경우에 대한 파형이다. 그림 6에서 8까지의 출력파형은 3가지 경우에 대하여 거의 차이가 없는 결과를 볼 수 있다. 따라서, 물리적 의미를 충실히 할 수 있고 프로그래밍이 간결하게 구현 가능한 복소 벡터를 이용한 모델이 가장 확장성도 우수하고 바람직한 모델이라 판단된다.

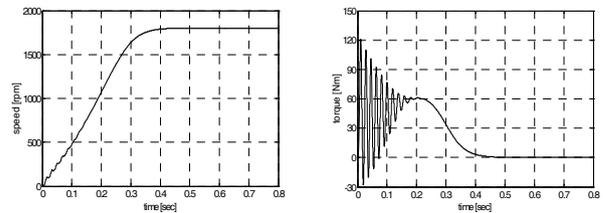


(a) 속도 파형 (a) speed waveform
(b) 토크 파형 (b) torque waveform

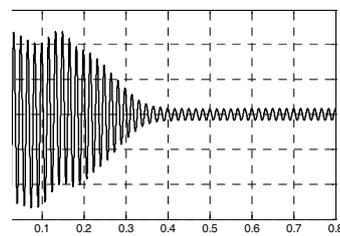


(c) 전류 파형 (c) current waveform

그림 7 임의 좌표계 λ 를 이용한 유도기 모델 파형
Fig. 7 IM waveform using λ for arbitrary ref. frame



(a) 속도 파형 (a) speed waveform
(b) 토크 파형 (b) torque waveform



(c) 전류 파형 (c) current waveform

그림 8 임의 좌표계 복소 벡터를 이용한 유도기 모델 파형
Fig. 8 IM waveform using complex vector for arbitrary ref. frame

3. 결 론

d - q 변환 즉 좌표 변환을 기본으로 하는 유도기의 3가지의 모델링 방법을 비교해 보았다. 임의 좌표계에서 d, q에 대한 별도의 수식을 구성하는 2가지의 모델링 방법과 복소 벡터를 이용한 모델링 방법을 비교했다. 전자의 경우는 시간당 자속 쇄교수 $\psi = \omega_c \lambda$ 를 매개 변수로 하여, 리액턴스 x 와의 관계식을 만든 경우와, 자속 쇄교수 λ 와 인덕턴스 L 과의 관계식을 만든 경우이며, ψ 를 활용한 모델링은 λ 를 치환한 방식으로 미분변수가 1개로 줄어들게 하는 설계를 할 수 있었지만, ψ 라는 변수는 수식적 편의를 위해서 만들어진 변수로서, 물리적 의미가 부족하고, 세부 블록 수식이 복잡해지는 단점이 있다. λ 를 ψ 로 치환하지 않고 λ 를 그대로 활용하여 정리한 두 번째 모델링 방법은 ψ 를 사용한 경우보다는 좀 더 블록이 복잡해 보이고 모델링의 모습역시 ψ 보다는 간결하지 못해 보이지만 유도기에 존재하는 자속 쇄교수를 기준으로 모델링을 정리한 것으로 ψ 을 통한 모델링 보다는 유도기를 물리적으로 이해하는데 좀 더 근접한 모델링 방법이라고 볼 수 있다. 본 연구에서 제한한 복소 벡터를 이용한 모델링은 앞의 스칼라 양으로 변환하여 모델링하는 경우보다 훨씬 모델링이 간결해진다. 이것은 이 복소 벡터 모델을 다시 스칼라 모델로 분리하여 만든 블록도와 비교하여 보았을 때 명확히 그 장점을 알 수 있다. 이 세가지 모델링 방법에 대해 시뮬레이션을 통하여, 세 모델 모두 거의 동일한 출력 파형들을 볼 수 있었고, 이것은 초기 미분 방정식이 동일하기 때문이다. 따라서, 복소 벡터를 활용한 모델링이 다른 두 모델링보다는 가시적으로 알고리즘을 이해하기 쉽고, 구현도 쉬우며, 디버깅도 유리하여, 이에 따라 확장성도 유리할 것으로 판단된다. 이 모델을 이용하면, 모터 모델 뿐 아니라, 여기에 제어기 모델과의 결합도 유리할 것으로 판단되어 다양한 모델링과 시뮬레이션을 통해 교류기 해석, 제어 및 설계에 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No.2010-0023043)

참 고 문 헌

[1] J. Holtz, Q. Juntao, J. Pontt, J. Rodriguez, P. Newman, and H. Miranda, "Design of fast and robust current regulators for high-power drives based on complex state variables," Industry Applications, IEEE Transactions on, vol. 40, pp. 1388-1397, 2004.

[2] H. Kim and R. D. Lorenz, "Synchronous frame PI current regulators in a virtually translated system," presented at 2004 IEEE IAS Annual Meeting, Seattle, WA, USA, 2004.

[3] D. M. Brod and D. W. Novotny, "Current control of VSI-PWM inverters," IEEE Transactions on Industry Applications, vol. IA-21, pp. 562-70, 1985.

[4] D. W. Novotny and T. A. Lipo, Vector Control and Dynamics of AC Drives : Clarendon Press Oxford 1996.

[5] Chee-Mun Ong, "Dynamic Simulation of Electric Machinery", PrenticeHall, 1997.

[6] Sang-Hoon Kim, "DC, AC, BLDC Motor Control", Bogdoo Press, 2010.

저 자 소 개



홍 선 기 (洪 璵 基)

1965년 1월 24일생, 1987년 서울대학교 전기공학과 졸업, 1989년 서울대학교 대학원 전기공학과(석사), 1993년 서울대학교 대학원 전기공학과(박사), 1993~1995 (주)렉스산전 선임연구원, 1995~현재 호서대학교 시스템제어공학과 교수



박 진 호 (朴 鎭 浩)

1986년 2월 24일생, 2011년 호서대학교 시스템제어공학과 졸업, 2011년 ~ 현재 호서대학교 대학원 정보제어공학과 석사과정