

## 순응도 기반의 구동기 동적 성능 최적화

손 영 갑<sup>\*†</sup>

\* 안동대학교 기계자동차공학과

### Conformance-Based Dynamic Performance Optimization of an Actuator

Young Kap Son <sup>\*†</sup>

\* Dept. of Mechanical & Automotive Engineering, Andong Nat'l Univ.

(Received May 17, 2012 ; Revised June 27, 2012 ; Accepted June 29, 2012)

**Key Words:** Conformance(순응도), Dynamic System(동적 시스템), Actuator(구동기), Variation(변량), Variable Screening(변수 선택), Response Surface Model(반응표면모델), F-Test(F-검정)

**초록:** 본 논문은 4차 동적 시스템인 구동기를 구성하는 부품들의 변량 및 공기외란의 변량으로 인해 구동기 성능에 변량이 존재할 때, 구동기의 성능을 순응도 기반으로 최적화한 설계 결과를 제시하였다. 구동기는 BLDC 모터와 평기어 및 웜기어 조립체, 카나드로 구성된다. 구동기의 성능은 시간에 따라 변화하는 카나드 각도 정보를 이용하여 평가하였다. 고차 시스템의 성능은 해석적 접근을 통해 시스템 변수들의 함수로 표현하기 어렵기 때문에 반응표면모델을 기반으로, F-검정을 수행하여 유효한 시스템 변수들을 선정한 후 성능을 유효한 시스템 변수들의 함수로 근사화하였다. 본 연구에서 변량을 가지는 구동기 성능의 규격에 대한 순응도를 확률값으로 정의하였다. 순응도를 최적화하여 구한 설계변수는 부품 및 공기외란에 변량이 존재하더라도 고려한 규격을 모두 만족시킬 수 구동기를 제공할 수 있다.

**Abstract:** This study shows the conformance-based design results of a fourth-order dynamic actuator showing a performance variation caused by variation in the components as well as aero-induced disturbances. The actuator comprises a BLDC motor, spur gear and worm gear assembly, and canard. The actuator performance was evaluated by using time-variant angle information of the canard. Based on the response surface models, critical system variables were screened using F-tests, and then, the performance was approximated as a function of the variables because it is difficult to determine the performance of a high-order dynamic system as a function of system variables through analytical approaches. In this study, the conformance of uncertain performance to the specification was defined as a probability measure. The design variables obtained by optimizing the measure can provide actuator performance conforming to the specifications considered, even though there is a variation in both the components and the aero-induced disturbances.

### 1. 서론

공학적 시스템의 생산과정 및 운용환경에서 불확실성을 고려한 확률적 분석과 설계에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 동적(dynamic) 시스템은 초기 조건, 시스템을 구성하는 부품들의 생산과정에서의 변량, 그리고 시스템이 동작하는 운용환경에서의 변량(예. 공기외란)으로 인하여 시스템의 성능에 변량이 존재한다.<sup>(1)</sup> 동적 시스템의 시간에 따른 응답 특성은 일반적으로 역학적 관계로부터 도출되는 미분방정식과 전달함수, 상태공간방정식에 대하여 해석적 접근방법을 통

해 평가할 수 있다. 2차 이하의 차수를 가지는 동적 시스템의 경우, 부품들의 변량이 존재하더라도 해석적 방법을 통해 시스템 응답을 구할 수 있기 때문에 시스템의 성능 최적화를 수행하는데 어려움이 없다. 그러나 3차 이상의 고차 동적 시스템의 경우, 부품들의 변량에 따른 해석적 방법의 적용이 어렵기 때문에 시스템 응답에 대한 해석적 해를 구하는 것이 어렵다. 따라서 고차 시스템의 성능 최적화에 많은 어려움이 존재한다.<sup>(2)</sup>

동적 시스템의 성능 최적화와 관련하여 Savage와 Son은 2차 서보 시스템의 시정수와 정상상태 각속도와 같은 시스템의 성능을 해석적 접근방법을 통해 시스템 변수의 함수로 정의하고, 확률적 설계 기법을 적용하여 성능을 최적화할 수 있는

† Corresponding Author, [ykson@andong.ac.kr](mailto:ykson@andong.ac.kr)

© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

설계변수를 선정하였다.<sup>(3)</sup> Lu와 Li는 부품의 변량 및 시스템 응답의 수리적 모델에 대한 불확실성에 따른 시스템 행렬의 고유값(eigenvalue)에 대한 변량을 고려하였다.<sup>(2)</sup> 고유값 변량에 따른 동적 시스템의 안정도(stability)를 보증할 수 있는 최적의 설계변수를 선정하는 방법을 제시하고 2개의 2차 시스템이 상호작용하는 로터 시스템에 적용하였다. 또한 Ryu 등<sup>(4)</sup>은 Fig. 1에 나타낸 구동기에 대하여 강건설계 방법을 제시하여 구동기의 성능을 최적화 할 수 있는 설계 변수를 선정하였다. Fig. 1의 구동기는 BLDC 모터, 평기어(spur gear) 조립체와 웜기어(worm-gear) 조립체, 카나드(canard)로 구성되어 있다. 평기어 조립체는 총 4개의 기어로 구성되며, BLDC 모터의 구동입력(토크와 각속도)을 받아 토크를 증가시키고 각속도를 감속시키는 역할을 한다. 웜기어 조립체는 웜에 입력되는 토크를 기어부에 전달시키는 기능을 수행한다. 그리고 웜기어 조립체에 전달된 토크가 카나드를 구동시켜 카나드 각도 변화를 일으킨다. Ryu 등의 연구에서는 카나드의 동적 거동 특성과 카나드 외부에 작용하는 공기역학적 토크인 공기외란( $\tau_a$ )이 없다고 가정하였다. 따라서 공기외란 크기에 따라 웜기어 조립체에 발생하는 좌/우측 물림 현상을 고려하지 않고 우측 물림만 발생한다고 가정하였다.

불확실성을 고려한 동적 시스템의 성능 최적화 설계에 관한 기존 연구에서는 해석적 응답 모델을 이용한 성능 최적화 및 시스템 안정도 향상이 대부분 수행되어 왔지만, Ryu 등<sup>(4)</sup>은 해석적 응답 모델을 이용하지 않고 동적 성능을 최적화하였다. 본 연구에서는 Ryu 등<sup>(4)</sup>의 연구를 확장하여 공기외란과 구동기를 구성하는 웜기어 조립체의 좌/우측 물림 현상을 모두 고려하여 보다 더 실용적으로 구동기의 성능을 최적화하고자 한다. 또한 Ryu 등의 연구에서는 총 14개의 시스템 변수를 이용하여 구동기의 성능을 근사화한 후 정규화된 민감도를 이용하여 설계변수를 정의하였다. 그러나 본 연구에서는 Craig 등<sup>(5)</sup>이 제안한 방법을 적용하여 시스템 변수들의 설계 가용범위 내에서 구동기의 성능 변화량에 대한 영향도를 F-검정하여 고려한 유의수준에서 영향도가 유효한 시스템 변수들만을 이용하여 성능을 근사화한다.

본 연구에서 제안하는 순응도 기반의 구동기

성능 최적화를 위한 설계과정을 Fig. 2에 제시하였다. 4차 시스템인 구동기의 카나드 출력각이 단위각도에 이르는 시간 및 임의 시점에서 도달하는 각도로 표현되는 구동기의 성능(Perf)을 시스템 변수와 공기외란에 대한 해석적 함수로 표현하기 어렵다. 따라서 구동기를 구성하는 시스템 변수들의 역학적 관계를 고려하여 시스템 변수( $\mathbf{v}$ )와 공기외란에 대하여 시간에 따른 카나드 출력각도와의 관계를 Matlab Simulink 모델로 구축한다. 구축된 Simulink 모델을 이용하여 시스템 변수 및 공기외란 크기에 따른 카나드 각도의 시간에 따른 응답특성 및 성능을 평가한다. 구축된 Simulink 모델을 이용하여 가용한 설계범위 내에서 성능에 대한 영향도 분석을 Variable screening 기법을 적용하여 영향도가 유효한 시스템 변수( $\mathbf{v}_c$ )를 결정한다. 반응표면법(Response Surface Method)을 적용하여 구동기 성능을 유효한 시스템 변수와 공기외란의 이차 함수로 근사화한다. 성능에 대한 규격을 정의하고 근사화된 성능의 규격에 대한 순응도(conformance)를 확률값으로 정의하고 순응도를 최대화하기 위한 최적화 문제를 정의한다. FORM(First-Order Reliability Method)을 적용하여 정의한 최적화 문제에 대한 해를 구함으로써 성능을 최적화할 수 있는 시스템 변수들의 값을 선정한다.

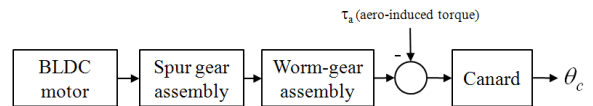


Fig. 1 Block diagram of an actuator

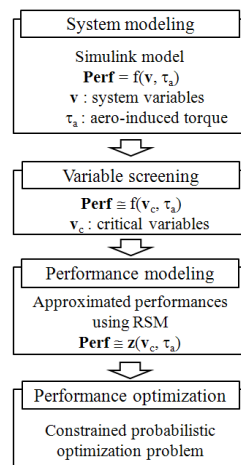


Fig. 2 Design process

2. 시스템 응답 모델링 및 성능 모델

2.1 응답 모델링

본 연구의 대상 시스템인 구동기를 구성하는 부품들과 변수들을 Table 1에 제시하였다. 본 연구에서는 기어 조립체에서 백 락쉬(back lash)가 없다고 가정하였다. BLDC 모터에 전압이 입력되면 모터의 각 상에 전류와 역기전력이 발생한다.<sup>(6)</sup> 3상 권선 BLDC 모터의 각 상에 전압,  $v_a, v_b, v_c$ 를 인가할 때 전압 방정식은 식 (1)로, 모터에서 공급하는 토크( $\tau_m$ )는 식 (2)로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\tau_m = \frac{e_a i_a - e_b i_b - e_c i_c}{\omega_r} \quad (2)$$

여기서  $e_a, i_a$ 는 a상의 역기전력과 전류를 나타내며,  $\omega_r$ 은 전기적인 모터의 각속도를 나타낸다. 역기전력은 모터의 각속도와 역기전력 상수값에 의해 결정되며  $\omega_r$ 과 모터를 구성하는 로터의 각 변위( $\theta$ )와의 관계는 모터의 pole 수를 P라 두면 식 (3)으로, 그리고 모터 부하 토크를  $T_l$ 라 정의

하면 모터 토크에 대한 방정식은 식 (4)로 각각 표현된다.

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{P}{2}\right)\omega_r \quad (3)$$

$$J_m \frac{d\omega_r}{dt} + B\omega_r = \tau_m - T_l \quad (4)$$

BLDC 모터의 출력 토크  $\tau_m$ 에 대하여 웜기어의 웜에 전달되는 토크를  $\tau_w$ 라 정의하면, 평기어 조립체의 출력 각도인  $\theta_4$ 에 대한 운동방정식<sup>(4)</sup>은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \left[ J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 (J_2 + J_3) + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_4 \right] \ddot{\theta}_4 \\ & + \left[ b_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 (b_2 + b_3) + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_4 \right] \dot{\theta}_4 \\ & + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 \tau_w = \left(\frac{N_1}{N_2}\right) \left(\frac{N_3}{N_4}\right) \tau_m \end{aligned} \quad (5)$$

입력 토크  $\tau_w$ 에 따른 웜기어의 기어에 대한 운동 방정식<sup>(8)</sup>과, 2차 시스템으로 정의되는 카나드에 입력되는 토크에 따른 카나드 각 변위( $\theta_c$ )에 대한 운동방정식<sup>(7)</sup>으로부터,  $\tau_w$ 에 따른 웜기어의 기어 각도( $\theta_g$ )에 대한 운동방정식은 식 (6)으로 정의할 수 있다.

$$(J_w i_{wg} + C_i J_g) \ddot{\theta}_g + C_i (I_c \ddot{\theta}_c + b_c \dot{\theta}_c + k_c \theta_c + \tau_a) = \tau_w \quad (6)$$

여기서  $\tau_a$ 는 공기외란에 의한 토크를 나타내며,  $\tau_w \leq (J_w i_{wg})(I_c \ddot{\theta}_c + b_c \dot{\theta}_c + k_c \theta_c + \tau_a)$ 일 때 웜기어에 좌측 물림이 발생하며  $C_i$ 는

$$C_1 = \frac{l_w (\cos(\Phi_n) \sin(\lambda_l) - \mu_s \cos(\lambda_l))}{l_g (\cos(\Phi_n) \cos(\lambda_l) + \mu_s \sin(\lambda_l))}$$

$\tau_w > (J_w i_{wg})(I_c \ddot{\theta}_c + b_c \dot{\theta}_c + k_c \theta_c + \tau_a)$ 일 때 우측물림이 발생하며  $C_i$ 는

$$C_2 = \frac{l_w (\cos(\Phi_n) \sin(\lambda_l) + \mu_s \cos(\lambda_l))}{l_g (\cos(\Phi_n) \cos(\lambda_l) - \mu_s \sin(\lambda_l))}$$

위의 측과 4번째 평기어의 측이 동일하며( $\theta_w = \theta_4$ ),  $\theta_g$ 와  $\theta_c$ 이 동일하기 때문에 식 (6)에서  $\theta_g$ 는  $\theta_g = \theta_4 / i_{wg}$ 로 표현할 수 있다. 식 (6)으로 표현되는  $\tau_w$ 를 식 (5)에 대입하여 정리하면 모터 토크( $\tau_m$ )에 대한

Table 1 Components and the system variables

components	variables and symbols
BLDC Motor	input voltage, $v(t)$
	a number of pole, P
	back EMF, $K_e$
	resistance, R
	viscosity friction coefficient, B
Spur gear assembly	inductance, L
	moment of inertia, $J_m$
	moment of inertia, $J_i$ ( $i = 1, 2, \dots, 4$ )
	number of teeth, $N_i$ ( $i = 1, 2, \dots, 4$ )
Worm gear assembly	damping coefficient in bearings, $b_i$ ( $i = 1, 2, \dots, 4$ )
	moment of inertia of the worm, $J_w$
	moment of inertia of the gear, $J_g$
	pressure angle of the worm, $\Phi_n$
	lead angle of the worm, $\lambda_l$
	pitch radius of the worm, $l_w$
	pitch radius of the gear, $l_g$
coefficient of static friction, $\mu_s$	
Canard	transmission rate, $i_{wg}$
	moment of inertia, $I_c$
	stiffness, $K_c$
Disturbance	damping, $B_c$
	aero-induced torque, $t_a$

카나드의 각 변위에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \left[ J_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 (J_2 + J_3) + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_3}{N_4} \right)^2 J_4 \right] \ddot{\theta}_c \\
 & + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_3}{N_4} \right)^2 \left( J_w i_{wg} + C_i J_g + C_i I_c \right) \\
 & + \left[ b_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 (b_2 + b_3) + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_3}{N_4} \right)^2 b_4 \right] \dot{\theta}_c \\
 & + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_3}{N_4} \right)^2 C_i B_c \\
 & + \left[ \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_3}{N_4} \right)^2 C_i K_c \right] \\
 & = \left( \frac{N_1}{N_2} \right) \left( \frac{N_3}{N_4} \right) \left( \tau_m - \left( \frac{N_1}{N_2} \right) \left( \frac{N_3}{N_4} \right) C_i \tau_a \right)
 \end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)에서 공기로 인한 외란 토크의 크기에 따라 뒀기어에 좌, 우측 물림 현상이 발생한다.

모터의 각도 위치에 따라 PWM 제어 방식으로 모터의 3상에 인가되는 전압을 스위칭하는 구동 드라이버를 포함하여 구동기에 대한 Simulink model을 Fig. 3에 제시하였다. Fig. 3의 A는 식 (1)과 (2)를, B는 식 (3)과 (4), C는 식 (5)를, D는 식 (6)을 구현한 모델을 각각 나타낸다.

2.2 성능 정의

구동기는 짧은 시간 내에 카나드의 각도를 요구되는 각도까지 구동시키는 시스템이다. 부품 변량 및 공기외란에 변량이 존재하더라도 카나드가 단위각도에 이르는 시간이 짧을수록, 임의 시점까지 카나드가 도달하는 각도가 클수록 구동기 성능은 우수하다고 평가할 수 있다. 변량을 포함하는 시스템 변수들을  $\mathbf{V}$ , 공기외란의 변량을  $\mathbf{T}_a$ 라 표현할 때, 구동기를 구성하는 시스템 변수들의 값과 공기외란의 크기에 따라 시간에 따른 카나드 각도가 변화하기 때문에, 카나드 각도는 시간과  $\mathbf{V}$ , 그리고  $\mathbf{T}_a$ 의 함수이다. 따라서 카나드 각도에도 변량이 존재하므로 구동기의 성능에도 변량이 존재한다. 확률변수  $\mathbf{V}$ 와  $\mathbf{T}_a$ 의 샘플이 각각  $\mathbf{v}$ 와  $\tau_a$ 일 때, 시간에 따른 카나드 각도  $C(t)$ 에 대하여 식 (8)로 표현되는 단위 각도에 이르는 시간 (T)과 식 (9)로 표현되는 임의 시점에서의 각도 (D)를 구동기 성능으로 가정하였다.

$$T = \min\{C(\mathbf{v}, \tau_a, t) = 1 : 0 \leq t \leq \infty\} \tag{8}$$

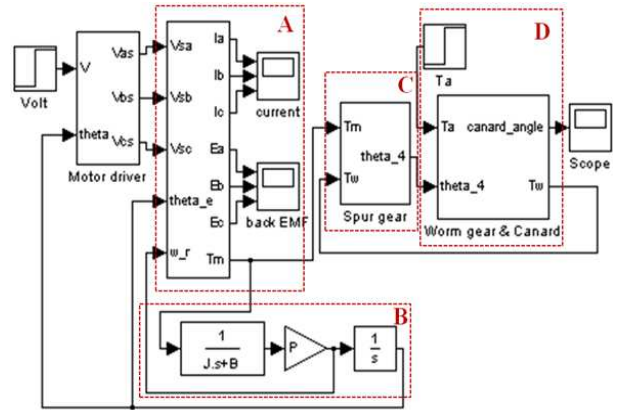


Fig. 3 Simulink model for the actuator system

$$D = C(\mathbf{v}, \tau_a, t) \text{ at } t = 50[\text{msec}] \tag{9}$$

따라서 구동기 성능은  $\mathbf{Perf} = [T(\mathbf{v}, \tau_a), D(\mathbf{v}, \tau_a)]$ 로 정의된다.

2.3 Variable screening 및 성능 모델링

식 (8)과 (9)로부터 k개의 시스템 변수들과 공기외란의 크기에 따라 성능은 변화한다. 각 변수들의 값에 따른 성능은 Fig. 3에 제시한 Simulink model을 이용하여 평가할 수 있다. 본 연구에서는 각 변수들의 조합에 따른 구동기 성능을 Simulink model을 이용하여 평가한 결과를 이용한다. 변수들의 시스템 성능에 대한 영향도 분석 및 영향도가 큰 변수들의 함수로 성능을 모델링하기 위하여 반응표면모델을 적용하였다.

공기외란,  $\tau_a$ 을  $v_{k+1}$ 로,  $M = k+1$ 로 정의하면 공기외란을 포함하는 시스템 변수는  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_M]$ 이다. 각 변수의 분포를 고려하여 L개의 샘플을 랜덤 추출하여 식 (10)으로 표현되는 변수행렬을, 그리고 변수 조합에 따른 성능(Y)을 식 (11)로 정의한다.

$$X = \begin{bmatrix} v_1^1 & \dots & v_M^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^L & \dots & v_M^L \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{Y}^T = [Y(\mathbf{v}^1) \dots Y(\mathbf{v}^L)] \tag{11}$$

변수행렬 X와 반응표면모델의 차수를 포함한  $X_a$ 를 정의하면 식 (12)로 표현된다.

$$X_a = [1 \ f(X)] \tag{12}$$

일차모델인 경우  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ , 이차모델인 경우  $f(\mathbf{X})$ 는 식 (13)으로 정의된다.

$$f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,M} & x_{1,1}^2 & \dots & x_{1,M}^2 & x_{1,1}x_{1,2} & \dots & x_{1,M-1}x_{1,M} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \\ x_{L,1} & \dots & x_{L,M} & x_{L,1}^2 & \dots & x_{L,M}^2 & x_{L,1}x_{L,2} & \dots & x_{L,M-1}x_{L,M} \end{bmatrix} \quad (13)$$

반응표면모델의 계수행렬은 일차모델인 경우  $\beta^T = [\beta_0 \dots \beta_M]$ , 이차모델인 경우  $j < M$ 과  $i < j$ 인  $\beta^T = [\beta_0 \dots \beta_M \beta_{11} \dots \beta_{MM} \beta_{12} \dots \beta_{ij}]$ 로 정의된다. 반응표면모델 적용에 따른 오차,  $\epsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{X}_0\beta$ 를 최소화하는 계수행렬<sup>(9)</sup>은 식 (14)로 표현된다.

$$\beta = [\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0]^{-1} \mathbf{X}_0^T \mathbf{Y} \quad (14)$$

시스템 변수가 구동기의 성능에 미치는 영향도 분석하기 위해서 Craig 등<sup>(5)</sup>이 적용한 방법을 이용하여 시스템 변수의 가용 범위에서 변수 변화에 따른 영향도 평가를 수행한다. 각 변수의 고려한 범위 내에서 랜덤 샘플링 방법인 Latin Hypercubic Sampling (LHS)을 이용하여 L개의 각 변수들을 추출하여 식 (10)으로 정의되는 변수행렬을 정의하고, 변수 조합에 따른 성능을 Simulink model을 이용하여 평가하여 Perf를 정의한다. 반응표면모델의 일차모델을 고려하여 식 (14)를 통해 계수값( $\beta_i$ )을 구하고 식 (15)를 이용하여 각 변수에 대한 F값을 평가한다.<sup>(5)</sup>

$$F_{v_i} = \frac{\beta_i^2 / C_{ii}}{\epsilon^T \epsilon / (L - M - 1)} \quad (15)$$

여기서  $C_{ii}$ 는  $v_i$ 의 공분산을 나타낸다.

유의수준  $\alpha$ 를 고려하여 각 변수에 대한 F값 ( $F_{v_i}$ )이  $F_{\alpha,1,L-M-1}$ 를 만족하는 변수들을 성능에 유효한 영향을 미치는 변수( $\mathbf{v}_c$ )로 선정한다. 성능에 유효한 영향을 미치는 q개의 변수,  $\mathbf{v}_c = [v_1, v_2, \dots, v_q]$ 에 대하여 중심합성계획법을 이용하여 식 (10)의 변수행렬을 정의한다. 성능을 변수들의 이차함수로 근사화하기 위하여, 반응표면모델의 이차모델을 이용하여 식 (12)의  $\mathbf{X}_a$ 를 정의한 후 식 (14)의 계수행렬을 평가하여 성능을 식 (16)으로 근사화한다.

$$\text{Perf} \cong \mathbf{z}(\mathbf{v}_c) \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{z}(\mathbf{v}_c) = [1 v_1 v_2 \dots v_q v_1^2 \dots v_q^2 \dots v_1 v_2 \dots v_{q-1} v_q] \beta$ .

### 3. 순응도 기반 설계

부품 변량 및 공기외란의 변량에 따른 시스템 성능에 변량이 존재하는 경우, 성능이 하한 규격 ( $\zeta_L$ )을 만족하는 순응도는 식 (17)로 표현할 수 있다.

$$\Pr(\text{Perf}(\mathbf{V}) > \zeta_L) = \int \dots \int \int_S f_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{v} \quad (17)$$

여기서  $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})$ 는 변량을 가지는 M개의 변수들에 대한 동시 확률 밀도함수(joint probability density function),  $S = \{\mathbf{v} \in R^M | \text{Perf}(\mathbf{v}) - \zeta_L > 0\}$ 이다.

식 (8)과 (9)로 정의되는 성능에 대한 근사화 모델이 각각  $z_1$ 과  $z_2$ 이고,  $z_1$ 에 대한 상한 규격이  $\zeta_U$ ,  $z_2$ 에 대한 하한 규격이  $\zeta_L$ 일 때, 성능은 모든 규격을 만족시켜야 함으로 직렬 시스템 이론을 적용하여 성능에 대한 순응도를 식 (18)로 근사화할 수 있다.<sup>(10)</sup>

$$\Pr(\text{Perf}(\mathbf{V}) > \zeta_L) \cong \Pr[(\zeta_U > z_1(\mathbf{V}_c)) \cap (z_2(\mathbf{V}_c) > \zeta_L)] \quad (18)$$

정규분포를 따르는 변수의 분포 특성은 통계적인 분포 파라미터를 이용하여 표현할 수 있으므로 변량을 가지는 변수들은 통계적인 분포 파라미터를 이용하여 표현할 수 있다.  $\mathbf{V}_c$ 의 파라미터를  $\mathbf{p}$ 라 두면 식 (18)의 순응도는  $\mathbf{p}$ 의 함수로 표현된다. 따라서 설계 파라미터의 범위가  $\mathbf{p}_L \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_U$ 일 때, 부품 변량 및 공기외란의 변량이 존재하더라도 순응도를 최대로 할 수 있는 설계 파라미터를 구하는 문제는 식 (19)로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\mathbf{p} \in R^q} \Pr[(\zeta_U - z_1(\mathbf{p}) > 0) \cap (z_2(\mathbf{p}) - \zeta_L > 0)] \\ & \text{subject to the constraints:} \\ & \mathbf{p}_L \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_U \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)로 표현되는 최적화 문제의 해를 구하기 위해서는 확률평가 기법인 랜덤추출법, FORM, 그리고 SORM(Second-Order Reliability Method) 등을 적용할 수 있다.

식 (19)로 정의되는 설계문제에 대한 해를 구하

기 위하여 FORM을 적용하였다. FORM 적용시, 순응도가 교집합 형태로 표현되기 때문에 평가가 어렵다. 따라서 비순응도(non-conformance)를 나타내는  $\Pr[(\zeta_U - z_1(\mathbf{V}_0) \leq 0) \cup (z_2(\mathbf{V}_0) - \zeta_L \leq 0)]$ 를 최소화함으로써 순응도를 최대화한다. 임계상태함수(limit-state function)를 각각  $g_1(\mathbf{V}_0) = \zeta_U - z_1(\mathbf{V}_0)$ ,  $g_2(\mathbf{V}_0) = z_2(\mathbf{V}_0) - \zeta_L$ 로 정의하면, 각 임계상태함수의 비순응 영역  $E_i$ 는  $E_i(\mathbf{V}_0) = \{\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}_0; g_i(\mathbf{V}_0) \leq 0\}$ 로 정의된다. 또한 모수  $\mathbf{p}$ 로 표현되는 다양한 확률분포를 따르는 변수들을 표준정규분포( $\mathbf{u}$ )로 변환하는 Rosenblatt transformation<sup>(9)</sup>인  $\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}) = 0$ 을 적용하면 비순응도는 식 (20)으로 표현된다.

$$\Pr(\mathbf{E}(\mathbf{p})) = \Pr(E_1(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \cup E_2(\mathbf{u}, \mathbf{p})) \quad (20)$$

FORM을 적용하여  $E_i$ 에 대한 확률값을 근사화하면  $\Pr(E_i(\mathbf{p})) \cong \Phi[-a_i \beta_i(\mathbf{p})]$ 이며, 여기서  $\Phi$ 는 1차원 표준정규누적분포함수를,  $a_i$ 는  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 일 때 임계상태함수의 부호를,  $\beta_i(\mathbf{p})$ 는  $\mathbf{u}$ 공간에서 원점에서  $i$ 번째 임계상태표면의  $\mathbf{u}^*$ (MLFP, Most Likely Failure Point)까지의 거리를 나타낸다. 또한  $E_1$ 과  $E_2$ 의 교집합 영역의 확률인  $\Pr(E_1(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \cap E_2(\mathbf{u}, \mathbf{p}))$ 는  $\Phi_2(-a_1 \beta_1(\mathbf{p}), -a_2 \beta_2(\mathbf{p}), \rho_{1,2})$ 로 근사화되며, 여기서  $\Phi_2$ 는 이변수(bivariate) 누적정규분포함수를,  $\rho_{1,2}$ 는  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 에서 각각의 MLFP에 이르는 벡터들의 직교성(orthogonality)을 나타낸다. 따라서 식 (20)의 비순응도는 식 (21)로 근사화하여 평가할 수 있다.

$$\Pr(\mathbf{E}(\mathbf{p})) \cong \sum_{i=1}^2 \Phi(-a_i \beta_i(\mathbf{p})) - \Phi_2(-a_1 \beta_1(\mathbf{p}), -a_2 \beta_2(\mathbf{p}), \rho_{1,2}) \quad (21)$$

그러므로 식 (19)로 정의되는 최적화 문제를 FORM을 이용하여 식 (22)로 표현되는 최적화 문제로 변환하고 최적화 문제에 대한 해를 SQP(Sequential Quadratic Programming)방법을 기반으로 하는 Matlab 프로그램의 fmincon 함수를 사용하여 구한다.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \Pr(\mathbf{E}(\mathbf{p})) \\ & \text{subject to the constraints:} \\ & g_i(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = 0, \mathbf{u} \cdot \text{null}(-\nabla g_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})) = 0 \\ & \mathbf{p}_L \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_U \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)에서 등식으로 표현되는 구속조건은 FORM을 적용할 때 MLFP에 대한 구속조건을 나

타내며, null은 null space를 나타낸다.<sup>(3)</sup>

#### 4. 설계 결과

Table 1에 나타낸 총 31개의 변수들 중, BLDC 모터의 변수, 평기어와 웜기어 그리고 카나드의 관성 모멘트는 상수값으로 가정하였다. 또한 평기어의 경우, 4개의 기어 잇수 대신 기어비  $r_1 (= N_1/N_2)$ ,  $r_2 (= N_3/N_4)$ 를 변수로,  $b_{2,3} = b_2 + b_3$ 으로 정의하였다. 따라서 공기외란을 포함하여 총 15개의 변수를 고려하였으며 각 변수들의 가용 범위를 Table 2에 제시하였다.

15개 변수의 가용 범위에서 변수 변화에 따른 식 (8)과 (9)로 표현되는 2가지 성능에 대한 영향도를 1,000개의 샘플을 이용하여 평가하였다. 식 (15)를 이용하여 평가한 F값을 Table 3에 나타내었다. 신뢰수준 90%에서 F값에 대한 임계값이 2.7106이므로 8개의 변수( $r_1$ ,  $r_2$ ,  $i_{wg}$ ,  $b_1$ ,  $b_{2,3}$ ,  $b_4$ ,  $\Phi_n$ ,  $B_c$ )와 전압, 공기외란이 성능에 유효한 영향을 미친다고 평가할 수 있다. 공기외란을 고려하지 않고 정규화된 민감도를 이용하여 영향도를 분석한 기존 연구에서는  $\Phi_n$ 과  $B_c$ 가 성능에 영향을 미치지 않는다고 제시하였지만<sup>(4)</sup> 본 연구에서는 공기외란을 고려함에 따라  $\Phi_n$ 과  $B_c$ 의 영향이 유효하였다. 성능에 유효한 영향을 미치는 10개의 변수에 대하여 중심합성계획법을 이용하여 각 변수들을 149개씩 랜덤추출하여 변수행렬을 정의하고 각 성능을 식 (16)과 같이 근사화하였다. 근사화한 성능 모델에서 8개의 변수( $r_1$ ,  $r_2$ ,  $i_{wg}$ ,  $b_1$ ,  $b_{2,3}$ ,  $b_4$ ,  $\Phi_n$ ,  $B_c$ )는 Table 2에 제시한 가용 범위의 평균값과 평균값의 10%인 공차를 가지는 정규분포를 따르는 설계 변수로 고려하였으며 공기외란과 전압은 고려한 가용 범위 내에서 균일 분포를 따른다고 가정하였다. 또한 성능 T에 대한 상한 규격을  $\zeta_U = 20$  [msec], D에 대한 하한 규격을  $\zeta_L = 3$  [deg]로 고려하였다.

식 (22)를 이용하여 최적화한 설계결과와 순응도를 Table 4에 각 변수의 평균값과 확률값으로 나타내었다. Table 4의 확률값은 유효한 영향을 미치는 변수들을 제외한 변수가 가용 범위의 중앙값과 동일할 때, 식 (18)의 확률값을 5,000개의 샘플을 이용하여 랜덤추출방법을 적용하여 평가하였다. 근사화한 성능을 이용하여 구한 최적설계를 검증하기 위해 Table 2에 나타낸 총 15개 변수의 변량을 고려하여 초기설계와 성능을 비교

하였다. Table 4에 나타난 8개의 설계변수는 정규 분포를, 설계 변수를 제외한 다른 시스템 변수 6개와 입력전압 그리고 공기외란이 Table 2에 제시한 범위에서 균일분포를 따른다고 가정하고 5,000개의 샘플을 이용하여 평가한 각 설계에 대한 성능의 히스토그램을 Fig. 4와 5에 각각 제시하였다. Fig. 4와 5에서 점선은 성능에 대한 규격을 나타낸다. 히스토그램으로 나타난 성능과 규격으로부터 평가한 순응도는 성능 T의 경우, 초기 설계의 순응도는 0.5398, 최적 설계의 순응도는 1이다. 성능 D의 경우, 초기 설계의 순응도는

0.1894, 최적 설계의 순응도는 1이다. 그리고 2가지 성능을 동시에 고려할 때, 초기 설계의 순응도는 0.1894, 최적 설계의 순응도는 1이다. Table 4의 초기설계에 대한 순응도와 비교할 때, 총 15

**Table 2** Feasible ranges for system variables

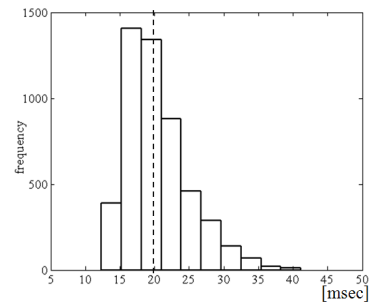
variable	range	variable	range
$v(t)$ [V]	[20, 28]	$l_w$ [m]	$[7.7, 14.3] \times 10^{-3}$
$r_1$	[0.1, 0.5]	$l_g$ [m]	$[3.15, 5.85] \times 10^{-2}$
$r_2$	[0.2, 0.9]	$\mu_s$	[0.14, 0.26]
$b_1$	$[0.3, 1.7] \times 10^{-3}$	$i_{wg}$	[35, 45]
[N-m/(rad/s)]		$K_c$	[0.2, 0.8]
$b_{2,3}$	$[0.6, 3.4] \times 10^{-3}$	[N-m/rad]	
[N-m/(rad/s)]		$B_c$	[0.01, 0.2]
$b_4$	$[0.3, 1.7] \times 10^{-3}$	[N-m-s/rad]	
[N-m/(rad/s)]		$\tau_a$ [N-m]	[0.01, 1]
$\Phi_n$ [rad]	$[2.44, 4.53] \times 10^{-1}$		
$\lambda_1$ [rad]	$[4.89, 9.07] \times 10^{-2}$		

**Table 3** F-value for each variable

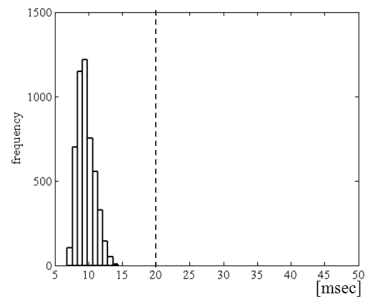
variable	Performance		variable	Performance	
	T	D		T	D
$v(t)$	245.480	978.628	$l_w$	0.860	0.540
$r_1$	0.133	262.573	$l_g$	0.817	0.934
$r_2$	40.055	1810.545	$\mu_s$	1.487	0.143
$b_1$	590.775	6067.675	$i_{wg}$	31.537	255.259
$b_{2,3}$	29.315	282.188	$K_c$	0.510	0.213
$b_4$	1.921	13.787	$B_c$	2.055	76.831
$\Phi_n$	2.977	0.066	$\tau_a$	589.991	2589.064
$\lambda_1$	0.568	0.118			

**Table 4** Design results

variable	Initial design	Optimal design
$r_1$	0.3	0.15482
$r_2$	0.55	0.6669
$b_1$	0.001	0.00032
$b_{2,3}$	0.002	0.00092
$b_4$	0.001	0.00158
$\Phi_n$	0.349	0.33678
$i_{wg}$	40.0	37.2623
$B_c$	0.105	0.17506
Conformance	0.1890	1

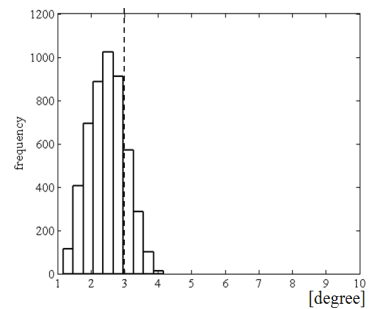


(a) Initial design

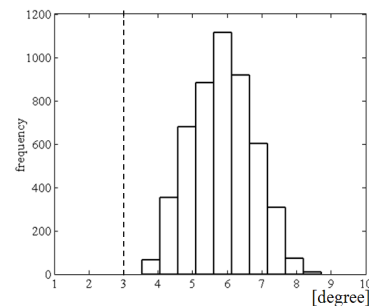


(b) Optimal design

**Fig. 4** Time to reach unit angle of canard



(a) Initial design



(b) Optimal design

**Fig. 5** Canard angle at  $t = 50$  [msec]

개 변수들의 변량을 고려한 순응도가 초기설계는 0.1894, 최적설계는 1이므로 설계 변수를 제외한 다른 시스템 변수들의 변량으로 인한 순응도의 변화가 없으므로 성능 근사화에 따른 순응도 평가 오차는 매우 미소하다고 평가할 수 있다.

#### 4. 결론 및 향후계획

본 연구에서는 모터 드라이브를 가지는 2차 시스템인 BLDC 모터와 펌핑어 및 웜기어 조립체, 카나드로 구성되는 4차 시스템인 구동기가 부품들의 변량 및 공기외란의 변량으로 인해 성능에 변량이 존재할 때, 구동기의 성능을 순응도 기반으로 최적화한 설계 결과를 제시하였다. 4차 시스템의 성능은 해석적 접근을 통해 시스템 변수들의 함수로 표현하기 어렵기 때문에 반응표면모델을 적용하여 성능을 근사화하였다. 또한 기존 연구에서는 시스템 변수들을 모두 고려하여 성능을 근사화하였지만 본 연구에서는 변수들의 성능에 대한 영향도를 F-검정을 통해 성능에 유효한 시스템 변수들만을 이용하여 성능을 근사화하였다. 또한 공기외란의 크기를 고려하여 웜기어의 좌/우측 물림을 고려하였다. 순응도 기반의 설계는 초기설계에 대비하여 총 14개의 부품 및 공기외란에 변량이 존재하더라도 구동기 성능이 고려한 규격을 모두 만족시켰다.

본 연구에서는 BLDC 모터의 변수들과 일부 기어 조립체의 변수인 관성모멘트를 상수값으로 가정하였지만 향후에는 이러한 변수들의 변량을 모두 고려하여 구동기 성능에 유효한 영향을 미치는 변수들 선정하고 순응도 기반의 최적 설계를 수행할 예정이다. 또한 본 연구를 확장하여 동적 시스템의 안정도를 보증하면서 성능을 최적화할 수 있는 설계변수를 선정하는 연구를 수행할 예정이다.

#### 후 기

이 논문은 (주)한화의 지원을 받아 수행된 연구이며 이에 감사드립니다.

#### 참고문헌

(1) Safie and Weldon (NASA/MSFC) 2009, "Use of

Probabilistic Engineering Methods in the Detailed Design and Development Phase of the NASA Ares Launch Vehicle," MSFC-2039.

(2) Lu, X., Li, H.-X., 2011, "Robust Design for Dynamic Systems Under Model Uncertainty," *ASME Journal of Mechanical Design*, 133, pp. 021006 1-7.

(3) Savage, G. J. and Son, Y. K., 2008, "Design-for-Six-Sigma for Multiple Response Systems," *International Journal of Product Development*, 5(1/2), pp. 39~53.

(4) Ryu, J.-H., Choi, I.-S., Kim, J.-S., and Son, Y. K., 2011, "Robust Design of a Dynamic System Using a Probabilistic Design Method," *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers A*, Vol. 35 (10), pp. 1171~1178.

(5) Craig, K. J., Stander, N., Dooge, D. A., and Varadappa, S., 2005, "Automotive Crashworthiness Design Using Response Surface-Based Variable Screening and Optimization," *International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 22(1), pp. 38~61.

(6) Pillay, P. and Krishnan, R., 1989, "Modeling, Simulation, and Analysis of Permanent-Magnet Motor Drives, Part II: The Brushless DC Motor Drive," *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 25, No. 2.

(7) Weinacht, P., 2007, "Coupled CFD/CN&C Modeling for a Smart Material Canard Actuator," Army Research Laboratory.

(8) Yeh, T.-J. and Wu, F.-K., 2009, "Modeling and Robust Control of Worm-Gear Driven Systems," *Simulation Modelling Practice and Theory*, Vol. 17 (5), pp. 767~777.

(9) Hines, W. and Montgomery, D. C., 1990, *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*, Wiley.

(10) Son, Y. K. 2011, "Reliability Prediction of Engineering Systems with Competing Failure Modes due to Component Degradation," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol.25 (7), pp. 1717~1725.