Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2012) 18(10):895-901
http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2012.18.10.895 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

시변 시간지연을 갖는 이산시스템의 시변 불확실성의 안정 범위

Stability Bounds of Time-Varying Uncertainty and Delay Time for Discrete Systems with Time-Varying Delayed State

한 형 석*
(Hyung-Seok Han[1])
[1]Gachon University

Abstract: The stability robustness problem of linear discrete systems with time-varying unstructured uncertainty of delayed states with time-varying delay time is considered. The proposed conditions for stability can be used for finding allowable bounds of time-varying uncertainty and delay time, which are solved by using LMI (Linear Matrix Inequality) and GEVP (Generalized Eigenvalue Problem) known as powerful computational methods. Furthermore, the conditions can imply the several previous results on the uncertainty bounds of time-invariant delayed states. Numerical examples are given to show the effectiveness of the proposed algorithms.

Keywords: robust stability, discrete-time system, time-varying delay, unstructured uncertainty, delay time interval, generalized eigenvalue problem, LMI

I. 서론

시간 지연을 포함하는 수학적 모델은 물리학, 산업 및 공학 시스템에서 빈번하게 볼 수 있는 것으로 지연에 대한 원인과 이로 인한 문제점 및 해결 방법에 대한 연구가 활발하게 이루어 지고 있다[1]. 실제 시스템에 있어서도 지연을 분석하여 설계가 이루어지며 네트워크 상에서의 지연에 대한 제어 및 해석에 대한 문제도 많이 연구되고 있다[2].

이산시간계에서 상태지연이 있는 시스템에 대한 연구 주제 중에 최근 많이 연구되는 것은 시불변 시스템 행렬을 갖는 시스템에서 안정성을 보장할 수 있는 지연시간의 범위에 관한 것으로 이 경우 지연시간은 대부분 시변으로 고려된다[6-11]. 이 연구들은 주로 다양한 리아프노프 함수를 도입하여 선형부등식의 형태로 안정조건을 유도하고 이를 만족하는 지연시간의 크기를 구하는 방법으로 이루어 진다. 리아프노프 함수를 구성하는 주요 함수가 3개[2,3], 4개[4-7], 5개[8], 6개[9-11]로 구성됨에 따라 다양한 조건들을 제시하고 있다. 가장 최근에 발표된 연구결과는 6개의 요소로 리아프노프 함수를 구성하여 유도한 것으로 지연시간에 대한 안정조건을 계산량을 절감할 수 있는 형태로 제안하였고[11] 이를 다른 논문들[3,4,7,10]과 비교하여 결과가 우수함을 보여주었다. 이들 논문에서의 안정조건은 선형행렬부등식(LMI) 형태로 제시되며, 지연시간의 변동 폭과 최소 지연시간에 대한 정보를 토대로 구성된다. 즉, 주어진 지연시간 범위의 하한값을 사용하여 안정조건을 만족하는 상한값을 구하는 방식으로 지연종속(delay-dependent)의 형태로 제시되었다.

지연시간에 관한 기존의 방법[4,7,10,11]은 지연시간 이외의 모든 시스템 정보는 시불변으로 정확히 알고 있는 경우를 가정하여 허용 가능한 지연시간을 구한 것으로, 시스템 자체가 불확실한 경우에 대하여서는 그 결과가 상대적으로 적다[3,12,13]. [12]에서는 시간지연 상태변수에 대한 불확실성을 폴리토픽(polytopic) 시불변 불확실성으로 고려하여 다루었다. 그러나 기존의 결과들[3-15]에서는 시간지연 상태변수에 대한 불확실성의 안정성 보장 크기에 대한 조건은 고려되지 않았거나 간접적으로 고려되어 주로 지연시간에 관련된 안정조건들이 제시되었다. 시간지연 상태변수의 비구조화된 불확실성의 안정 크기에 관한 직접적 결과로는 지연시간이 시불변인 경우에 대하여 구한 것이 있다[16]. 그러나 이 결과는 지연 상태변수 불확실성의 크기를 고려한 것으로는 의미가 있으나 최근의 주요 연구주제인 시변 지연시간을 갖는 상태변수에 대한 것은 고려할 수 없다는 문제가 있다. 따라서 기존 연구 결과를 고려할 때 시변 지연시간에 대한 영향과 지연 상태변수의 불확실성에 대한 크기를 동시에 직접적으로 고려할 수 있는 안정조건에 대한 연구가 필요하다.

본 논문에서는 지연 상태변수에 대한 시변 불확실성 크기와 시변 지연시간의 크기를 함께 고려한 안정조건을 새로이 제시한다. 즉, 시변인 지연시간의 변동 범위가 주어진 시스템의 경우에 시간지연 상태변수에 대한불확실성의 안정 크기를 직접 구할 수 있는 새로운 조건들을 유도한다. 불확실성 크기는 선형행렬부등식의 해를 구하는 알고리즘을 이용하여 구할 수 있으며 이를 변형하여 일반화된 고유치 문제로도 구현된다. 이러한 결과는 시불변 지연시간을 갖는 시변 불확실성의 안정 크기에 대한 기존 결과[16]를 포함함과 동시에 시불변 불확실성에 결과[17-20]도 포함하게 된다. 또한, 제안된 조건은 시간지연 상태변수에 대한 비구조화된 불확실성의 크기가 주어진 경우에는 시변 지연시간의 범위를 구하는 조건으로 전환될 수 있다. 따라서 본 논문의 결과는 불확실성에 대한 기존의 결과[16-20]를 시변 지연시간의 경우로 확장한 것이며, 동시에 지연시간 크기에 대한 주제[3,4,7,10,11]를

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수: 2012. 7. 4., 수정: 2012. 8. 2., 채택확정: 2012. 8. 2.
한형석: 가천대학교 전자공학과(hshan@gachon.ac.kr)
※ 이 논문은 2012년도 가천대학교 교내연구비 지원에 의한 결과임 (GCU-2012-R129).

지연 상태변수에 대한 불확실성까지 포함한 문제로 확장한 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II 장에서는 기존 결과에 대하여 간단히 정리하고 III 장에서는 새로운 안정조건과 이를 구현하는 알고리즘을 제안한다. IV 장에서는 기존 수치 예제에 대하여 새로이 제안된 알고리즘을 적용하고 그 결과를 제시한다.

본 논문에서 사용하는 기호로는 $\lambda_i(X)$, $\lambda_{\max}(X)$ 는 행렬 X 의 i번째 고유치, 최대 고유치, $\|X\|$ 는 스펙트랄 노움(spectral norm), ($\|X\|=\lambda_{\max}^{1/2}(X^TX)$)을 의미하며, $X>0$ 는 대칭행렬 X 가 양의 정칙(positive definite), I_m 는 $m\times m$ 차원의 단위행렬(identity matrix)을 의미한다

II. 문제의 정의 및 기존의 결과

본 장에서는 지연된 상태변수를 갖는 선형 이산시스템의 안정성 유지 조건에 대한 기존 결과를 정리한다. 참고문헌 [17-20]에서는 다음과 같은 시불변 지연시간 시스템을,

$$x(k+1)=A_0x(k)+A_1x(k-d) \tag{1}$$

[4-11]에서는 다음과 같은 시변 지연시간 시스템을,

$$x(k+1)=A_0x(k)+A_1x(k-d(k)) \tag{2}$$

[16]에서는 시변 불확실성 $E(k)$을 갖는 시스템을 다음과 같이 고려하였다.

$$x(k+1)=A_0x(k)+E(k)x(k-d) \tag{3}$$

식 (1)-(3)에서, A_0, $A_1\in\Re^{n\times n}$, $E(k)\in\Re^{n\times n}$, $x(k)\in\Re^n$, $k=0$, $1\cdots$ 인 정수이며, $E(k)$ 는 다음과 같이 크기가 한정된다.

$$\|E(k)\|<\mu \tag{4}$$

지연 시간에 해당되는 $0\le d(k)(d)$ 는 정수로 시간 k 에 대하여 시변(시불변) 지연시간에 해당된다.

(2)의 시스템을 고려한 기존의 결과들은 다양한 리이프노프 함수에 대하여 시스템의 안정 조건을 선형부등식의 형태로 제시하고 이를 만족하는 지연시간을 구하는 결과들을 제시하였다. 특히, 최근의 결과인 [11]에서는 식 (2)의 시스템 모델에 다음과 같은 조건을 고려하였다.

$$\begin{aligned}&x(k)=\phi(k),\quad k=-d_M,\quad -d_M+1,....0\\&0\le d_m\le d(k)\le d_M\end{aligned} \tag{5}$$

$\phi(k)$ 는 초기 조건이며 행렬 A_0, A_1 는 알고 있는 상수행렬이다. [11]의 정리 1의 안정조건은 d_M-d_m, d_m 과 관련된 선형부등식 형태로 표현되며 주어진 A_0, A_1, d_m에 대하여 최대 지연시간인 d_M 을 구할 수 있다. 그러나 [11]에서는 식 (3), (4)에서와 같은 지연 상태변수에 대한 불확실성을 고려하지 않았음을 알 수 있다.

[16]에서는 (3), (4)의 시스템을 고려하여 (1), (2)에 대한 연구와는 다르게 시스템의 안정을 유지하기 위한 최대 비구조화된 불확실성 크기 μ의 안정범위를 2개의 선형행렬부등식의 안정조건과 일반화된 고유치 문제를 이용하여 제시하였다.

시간 지연이 없는 불확실성 안정크기에 대하여 많은 연구결과가 발표된 것에 비하여 시간지연 상태변수의 불확실성 크기에 관련된 연구는 충분히 이루어 지지 않았다. 이는 비구조화된 시변 불확실성에 대한 안정조건을 유도하는데 있어 적절한 리아프노프 함수를 선정하는 것과 적절한 해를 갖는 방정식 혹은 부등식의 형태로 선택된 리아프노프 함수의 안정조건을 유도하는 것이 어렵기 때문이다. 본 논문에서는 시변 지연시간 상태변수에 대하여 시변 불확실성을 갖는 이산시스템을 식 (6)과 같은 상태방정식으로 고려한다.

$$\begin{aligned}&x(k+1)=Ax(k)+E(k)x(k-d(k))\\&\|E(k)\|<\mu\end{aligned} \tag{6}$$

식에서, $A\in\Re^{n\times n}$, $E(k)\in\Re^{n\times n}$, $x(k)\in\Re^n$, $k=0,1\cdots$ 인 정수이다. 시변 지연시간에 해당되는 $d(k)$는 (5)를 만족하며 기준 상태행렬 A가 시불변 점근 안정(time-invariant asymptotically stable)이라고 가정한다. (6)의 시스템은 기존 결과들에서 고려된 시스템 방정식 (1)-(3)을 포함함과 동시에 다양한 시스템을 표현할 수 있는 가장 복잡한 형태이다.

다음 장에서는 지연 상태변수 불확실성에 대한 안정조건을 위하여 적절한 리아프노프 함수를 선정하고 다음의 보조정리를 이용하여 조건들을 유도한다.

보조정리 1 [21, 보조정리 2.4]: 임의의 벡터 X, Y 와 적절한 차원의 양의 정칙(positive definite)행렬 $\Sigma>0$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$2X^TY\le X^T\Sigma X+Y^T\Sigma^{-1}Y$$

III. 주요 결과

본 장에서는 식 (6)으로 표현되는 시스템에 대하여 식 (3)와 같이 표현되는 비구조화된 불확실성 안정 범위[16]와 식 (5)의 지연시간 변동 범위인 d_M-d_m [11]를 동시에 고려할 수 있는 안정조건을 유도하고 이를 이용하여 불확실성의 범위 μ와 지연시간 범위 d_M-d_m 를 찾을 수 있는 알고리즘을 제안한다. 이를 위하여 다음과 같이 리아프노프 함수를 3개의 요소[2,3]를 고려하여 정의한다. 최근 논문에는 6개의 요소를 포함하는 결과들도 있으나 많은 성분을 포함하는 리아프노프 함수를 사용할 경우에는 시변 불확실성에 대한 부분이 독립적인 관계식으로 유도되는 것이 어렵게 되어 불확실성에 대한 부분이 안정성에 대한 선형부등식의 일부로 포함되게 된다. 따라서 본 논문에서는 시변 불확실성에 대한 직접적인 관계식을 추출할 수 있는 부분만을 고려하여 다음과 같이 리아프노프 함수를 선택한다.

$$\begin{aligned}V(x(k))&=x^T(k)Px(k)+\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i)\\&+\sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1}\sum_{i=k+j-1}^{k-1}x^T(i)Rx(i)=V_1+V_2+V_3\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $0<P,R$ 인 n차원의 행렬이다.

보조정리 2: 식 (6)의 시스템은 식 (7)에 정의된 리아프노프 함수에 대하여 다음의 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned} & V(x(k+1))-V(x(k)) \\ & \le x^T(k)(A^TPA-P+(1+d_M-d_m)R)x(k) \\ & \quad +x^T(k-d(k))(E^T(k)PE(k)-R)x(k-d(k)) \\ & \quad +2x^T(k-d(k))E^T(k)PAx(k) \end{aligned} \tag{8}$$

증명: $V(x(k+1))-V(x(k))=\Delta V_1+\Delta V_2+\Delta V_3$

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= x^T(k+1)Px(k+1)-x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)(A^TPA-P)x(k) \\ &\quad +2x^T(k-d(k))E^T(k)PAx(k) \\ &\quad +x^T(k-d(k))E^T(k)PE(k)x(k-d(k)) \\ \Delta V_2 &= \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k} x^T(i)Rx(i)-\sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &= x^T(k)Rx(k)-x^T(k-d(k))Rx(k-d(k)) \\ &\quad +\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i)-\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \end{aligned}$$

마지막 두 항은 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i)-\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ & \le \left(\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i)+\sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i)\right) \\ & \quad -\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i)=\sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_3 &= \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1}\left[x^T(k)Rx(k)-x^T(k+j-1)Rx(k+j-1)\right] \\ &= (d_M-d_m)x^T(k)Rx(k)-\sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \end{aligned}$$

$V(x(k+1))-V(x(k))=\Delta V_1+\Delta V_2+\Delta V_3$ 는 식 (8)과 같다. ■

보조정리 3: $2x^T(k-d(k))E^T(k)PAx(k)$ 의 식은 보조정리 1에 의하여 임의의 양수 ε에 대하여 다음과 같이 세 가지 수식보다 작거나 같다.

$$\begin{aligned} & \varepsilon x^T(k)A^TPAx(k)+\varepsilon^{-1}x^T(k-d(k))E^T(k)PE(k)x(k-d(k)) \\ & \varepsilon^{-1}x^T(k)A^TP^2Ax(k)+\varepsilon\mu^2x^T(k-d(k))x(k-d(k)) \\ & \varepsilon^{-1}\mu^2x^T(k)A^TP^2Ax(k)+\varepsilon x^T(k-d(k))x(k-d(k)) \end{aligned} \tag{9}$$

위의 보조정리 2와 3을 이용하면 다음과 같은 시변 불확실성 크기 μ에 대한 안정조건을 얻을 수 있다.

정리 1: 주어진 $\varepsilon>0,\ d_M-d_m\ge 0$ 에 대하여 다음을 만족하는 n차원의 행렬 $0<P,R$ 이 존재하고

$$A^TPA-P+(1+d_M-d_m)R+\varepsilon A^TPA<0 \tag{10}$$

불확실성 크기 μ이 다음의 부등식을 만족하면 시스템(6)은 안정하다.

$$\mu<\sqrt{\lambda_{\min}(R)/((1+\varepsilon^{-1})\lambda_{\max}(P))} \tag{11}$$

증명: 보조정리 3의 첫번째 부등식과 보조정리 2을 이용하면 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} & V(x(k+1))-V(x(k)) \\ & \le x^T(k)(A^TPA-P+(1+d_M-d_m)R+\varepsilon A^TPA)x(k) \\ & \quad +x^T(k-d(k))((1+\varepsilon^{-1})E^T(k)PE(k)-R)x(k-d(k)) \end{aligned}$$

위의 부등식의 두 번째 항은 $E^T(k)E(k)\le\mu^2I_n$ 을 이용하면 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} & (1+\varepsilon^{-1})E^T(k)PE(k)-R\le(1+\varepsilon^{-1})\lambda_{\max}(P)E^T(k)E(k) \\ & \quad -\lambda_{\min}(R)I_n\le((1+\varepsilon^{-1})\lambda_{\max}(P)\mu^2-\lambda_{\min}(R))I_n \end{aligned}$$

식 (10)을 만족하고 $(1+\varepsilon^{-1})\lambda_{\max}(P)\mu^2-\lambda_{\min}(R)<0$ 이면 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$ 을 만족한다. 따라서 식 (10), (11)을 만족하면 식 (6)의 시스템은 안정하다. ■

위의 정리는 선형행렬부등식 (10)을 만족하는 행렬 $0<P,R$ 을 이용하여 안정 범위를 구한 결과이다. 식 (10)의 조건을 변형하면 행렬부등식이 아닌 이산 리아프노프 방정식으로도 안정범위를 구할 수 있다.

따름정리 1: 주어진 $\varepsilon>0,\ R>0,\ d_M-d_m\ge 0$ 에 대하여 다음을 만족하는 n차원의 행렬 $P>0$ 이 존재하고

$$A^TPA-P+\varepsilon A^TPA=-(1+d_M-d_m)R \tag{12}$$

불확실성 크기 μ이 다음의 부등식을 만족하면 시스템 (6)은 안정하다.

$$\mu<\sqrt{\lambda_{\min}(R)/((1+\varepsilon^{-1})\lambda_{\max}(P))} \tag{13}$$

증명: 정리 1의 증명과 같이 식 (12)의 조건을 이용하면 다음의 식이 만족됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & V(x(k+1))-V(x(k)) \\ & \le x^T(k-d(k))((1+\varepsilon^{-1})E^T(k)PE(k)-R)x(k-d(k)) \end{aligned}$$

식 (12), (13)의 조건을 만족하면 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$ 이 되어 식 (6)의 시스템은 안정하다. ■

부연설명 1: 위의 따름정리 1에서 $d_M-d_m=0,\ \varepsilon=1$ 로두면 시불변 지연시간에 대한 조건이 되며, 이는 시불변 지연시간 시스템 식 (1)에 대한 시불변 불확실성 크기에 관한 [17]의 따름정리 3.2의 $\|A_1\|<\sqrt{\lambda_{\min}(R)/(2\lambda_{\max}(P))}$ 의 결과와 동일하다. 즉, 시변 불확실성에 대한 따름정리 1의 결과는 시불변 불확실성에 대한 결과를 시변으로 확장한 것으로, 따름정리 1이 [17]의 결과를 포함하는 것임을 보여준다. 보조정리 3의 두 번째 부등식을 이용하면 다음의 정리를 얻는다.

정리 2: 주어진 $\varepsilon>0,\ d_M-d_m\ge 0$ 에 대하여 다음을 만족하는 n차원의 행렬 $0<P,\ 0<R,\ P^2<X$ 이 존재하고

$$A^TPA-P+(1+d_M-d_m)R+\varepsilon^{-1}A^TXA<0 \tag{14}$$

불확실성 크기 μ이 다음의 부등식을 만족하면 시스템 (6)은 안정하다.

$$\mu<\sqrt{\lambda_{\min}(R)/(\lambda_{\max}(P)+\varepsilon)} \tag{15}$$

증명: 보조정리 3의 두번째 부등식, 보조정리 2, $P^2<X$,

$E^T(k)E(k) \le \mu^2 I_n$ 을 이용하면 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned}
&V(x(k+1)) - V(x(k)) \\
&\le x^T(k)(A^T PA - P + (1+d_M - d_m)R + \varepsilon^{-1}A^T XA)x(k) \\
&\quad + x^T(k-d(k))(E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon\mu^2 I_n)x(k-d(k)) \\
&E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon\mu^2 I_n \le (\lambda_{\max}(P)\mu^2 + \varepsilon\mu^2)I_n - \lambda_{\min}(R)I_n \\
&= (\lambda_{\max}(P)\mu^2 + \varepsilon\mu^2 - \lambda_{\min}(R))I_n
\end{aligned}$$

따라서 식 (14)와 (15)를 만족하면, $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ 되어 식 (6)의 시스템은 안정하다. ■

위의 결과는 보조정리 3의 부등식에 P^2이 포함되어 안정조건을 선형부등식의 형태로 표현할 수 없는 어려움을, 또 다른 부등식 조건인 $X > P^2$를 도입하여 해결한 것이다. 이 부등식은 P에 대한 선형부등식으로 표현될 수 있다.

위의 정리 1과 2는 일반적인 선형부등식의 해를 이용하여 간단한 수식 (11), (15)으로 불확실성의 범위를 구한 것이다. 이러한 형태의 수식은 [17-20]의 시불변 지연시간에 대한 시불변 불확실성에 대한 결과로는 유사한 형태의 부등식이 유도된 바 있으나 두 요소가 모두 시변인 경우에 대하여서는 알려진 바 없다. 정리 1와 2의 결과에 대한 비교는 정리 1과 2의 결과식에서 사용된 행렬 P가 얻어지는 수식이 정리 1의 경우식 (10)의 이산 리아프노프 형태 부등식의 해이고, 정리 2는 식 (14)의 행렬 X를 도입한 선형부등식의 해이므로 서로 다르다. 따라서 두 결과를 수식에 의하여 직접적으로 비교하기는 어려우며 직접 계산된 결과를 통하여 간접 비교가 가능하다. 이는 다음 장의 수치예제를 통하여 설명한다. 정리 1과 2에서 구한 선형부등식 (10), (14)의 한 해를 이용하여 식 (11)과 (15)의 식으로 계산된 불확실성의 크기는 선형부등식을 만족하는 모든 해에 대하여 계산된 결과 중에서 최대인지 여부를 보장할 수 없다. 이는 (10), (14)의 선형부등식이 불확실성의 크기 μ와 관련이 없기 때문이다. 따라서 식 (11)과 (15)로 표현되는 불확실성 범위 μ가 최대의 값으로 구할 수 있도록 안정조건들을 최적화 문제로 고려하면 더욱 좋은 결과를 얻을 수 있다. 이를 위하여, 정리 1과 2에서 사용된 리아프노프 함수에 대한 조건을 μ에 대한 최적화 조건까지 포함하여 일반 고유치 문제로 고려한 다음의 정리들을 유도한다.

정리 3: 주어진 $\varepsilon > 0,\ d_M - d_m \ge 0$ 에 대하여 다음의 일반 고유치 문제를 만족하는 n차원의 행렬 P, R, X와 최적화 값 μ^*이 존재하면 $\|E(k)\| < \mu < \mu^*$ 인 불확실성에 대해서 시스템 (6)은 안정하다.

$$\text{maximize}\ \ 0 < \mu \ \ \text{subject to}$$
$$0 < P$$
$$0 < R$$
$$P^2 < X \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} -X & P \\ P & -I_n \end{pmatrix} < 0$$
$$A^T PA - P + (1+d_M - d_m)R + \varepsilon A^T PA < 0 \tag{16-a}$$
$$\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} < -\mu \begin{pmatrix} \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, I_n & 0 \\ 0 & \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, X \end{pmatrix} \tag{16-b}$$

증명: 정리 1의 증명에서 다음 부분을 다르게 고려한다.

$$\begin{aligned}
&E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon^{-1}E^T(k)PE(k) < 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -R & \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, E^T(k) \\ \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, E(k) & -P^{-1} \end{pmatrix} < 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & E^T(k) \\ E(k) & 0 \end{pmatrix} < 0
\end{aligned}$$

$\|E(k)\| < \mu$ 이므로 [16]의 보조정리 2를 이용하여 다음의 부등식 조건을 고려한다.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \begin{pmatrix} 0 & E^T(k) \\ E(k) & 0 \end{pmatrix} < 0 \\
&\Leftarrow \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} < 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, I_n & 0 \\ 0 & \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, I_n \end{pmatrix} < 0
\end{aligned}$$

위 식의 마지막에 행렬 $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ 을 앞뒤로 곱하여도 부등식은 변하지 않는다.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, I_n & 0 \\ 0 & \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, P^2 \end{pmatrix} < 0 \\
&\Leftarrow \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, I_n & 0 \\ 0 & \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, X \end{pmatrix} < 0
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, I_n & 0 \\ 0 & \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, X \end{pmatrix} < 0 \\
&\Rightarrow E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon^{-1}E^T(k)PE(k) < 0
\end{aligned}$$

(16)의 부등식을 만족하게 되면 $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ 을 만족하게 된다. ■

정리 4: 주어진 $\varepsilon > 0,\ d_M - d_m \ge 0$ 에 대하여 다음의 일반 고유치 문제를 만족하는 n차원의 행렬 $P > 0,\ R > 0,\ X > P^2$ 과 최적화 값 $\mu^* < 1$이 존재하면 $\|E(k)\| < \mu < \mu^*$ 인 불확실성에 대해서 시스템(6)은 안정하다.

$$\text{maximize}\ \ 0 < \mu \le 1 \ \ \text{subject to}$$
$$A^T PA - P + (1+d_M - d_m)R + \varepsilon^{-1}A^T XA < 0 \tag{17-a}$$
$$\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} < -\mu \begin{pmatrix} (\varepsilon+1)I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \tag{17-b}$$

증명: 정리 2와 3의 증명과 $\mu^2 \le \mu(\mu \le 1)$ 를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
&E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon\mu^2 I_n < 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \varepsilon\mu^2 \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E^T(k) \\ E(k) & 0 \end{pmatrix} < 0 \\
&\Leftarrow \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \varepsilon\mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} < 0
\end{aligned}$$

증명 3에서와 같은 방법으로 다음을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} (\varepsilon+1)I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} < 0$$
$$\Rightarrow E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon\mu^2 I_n < 0$$

(17)의 부등식을 만족하게 되면 $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ 을 만족하게 된다. ■

정리 5: 주어진 $\varepsilon > 0,\ d_M - d_m \geq 0$ 에 대하여 다음의 일반 고유치 문제를 만족하는 n차원의 행렬 $P > 0,\ R > 0,\ X > P^2$ 과 최적화 값 $\mu^* < 1$이 존재하면 $\|E(k)\| < \mu < \mu^*$ 인 불확실성에 대해서 시스템(6)은 안정하다.

$$\text{maximize} \quad 0 < \mu \leq 1 \quad \text{subject to}$$
$$A^T PA - P + (1 + d_M - d_m)R < -\mu\varepsilon^{-1} A^T XA \tag{18-a}$$
$$\begin{pmatrix} -R + \varepsilon I_n & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} < -\mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \tag{18-b}$$

증명: 보조정리 3의 세 번째 부등식, 정리의 조건과 $\mu^2 \leq \mu(\mu \leq 1)$ 의 관계식을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
&V(x(k+1)) - V(x(k)) \\
&\leq x^T(k)(A^T PA - P + (1 + d_M - d_m)R + \varepsilon^{-1}\mu^2 A^T XA)x(k) \\
&+ x^T(k - d(k))(E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon I_n)x(k - d(k)) \\
&\leq x^T(k)(A^T PA - P + (1 + d_M - d_m)R + \varepsilon^{-1}\mu A^T XA)x(k) \\
&+ x^T(k - d(k))(E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon I_n)x(k - d(k))
\end{aligned}$$

$$E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon I_n < 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -R + \varepsilon I_n & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E^T(k) \\ E(k) & 0 \end{pmatrix} < 0$$
$$\Leftarrow \begin{pmatrix} -R + \varepsilon I_n & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} < 0$$

증명 3에서와 같은 방법으로 다음을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} -R + \varepsilon I_n & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} < 0$$
$$\Rightarrow E^T(k)PE(k) - R + \varepsilon I_n < 0$$

(18)의 부등식을 만족하게 되면 $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ 을 만족하게 된다. ■

부연설명 2: 시변 지연시간에 대한 정리 4와 5는, 시불변 지연시간에 대한 기존 결과 [16]의 정리 2와 1의 알고리즘 2와 1의 결과를 포함하게 된다. 즉, 정리 4와 5에 $d_M = d_m$를 대입하고 $\varepsilon = 1$로 두면 지연시간이 시불변 상수가 되어, 시불변 지연시간에 대한 결과인 [16]의 알고리즘 2와 1과 동일한 결과가 된다. 따라서 새로 제안된 조건이 [16]의 결과를 시변 지연시간의 경우까지 확장한 보다 일반적인 조건임을 알 수 있다.

정리 3-5에서는 주어진 $d_M - d_m$에 대한 항이 부등식 조건에 포함되어있으며, 시변 불확실성 크기 μ에 대한 일반화된 고유치 문제이다. 이를 불확실성의 크기 μ에 대한 지연시간의 범위를 구하는 문제로 고려하기 위하여 $(1 + d_M - d_m)$에 대한 고유치 문제로 변형하면, 주어진 불확실성의 크기 μ에 대한 범위 $d_M - d_m$의 최적화 값을 구할 수 있다. 이 경우에는 $\mu^2 \leq \mu(\mu \leq 1)$ 라는 가정이 없어도 $1 + d_M - d_m$에 관한 일반화된 고유치 문제로 구성될 수 있으며, 식 (16)-(18)을 변형하면 쉽게 구현된다. 이를 정리하면 다음의 따름정리 2와 같다.

따름정리 2: 주어진 $\varepsilon > 0$ 과 불확실성의 크기 μ에 대하여 공통조건 $P > 0,\ R > 0,\ X > P^2$ 과 다음의 (19)-(21)의 조건 중 어느 하나를 만족하는 행렬 P, R, X 와 최적화 값 $\rho^* = 1 + d^*$ 이 존재하면 $d_M - d_m < d^*$ 인 지연시간 범위에 대해서 시스템(6)은 안정하다.

$$\text{maximize} \quad 1 < \rho \quad \text{subject to}$$
$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, I_n & 0 \\ 0 & \sqrt{(1+\varepsilon)/\varepsilon}\, X \end{pmatrix} < 0 \\ A^T PA - P + \varepsilon A^T PA < -(1 + d_M - d_m)R = -\rho R\end{gathered} \tag{19}$$

혹은

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} -R + \varepsilon\mu^2 I_n & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} < 0 \\ A^T PA - P + \varepsilon^{-1} A^T XA < -(1 + d_M - d_m)R = -\rho R\end{gathered} \tag{20}$$

혹은

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} -R + \varepsilon I_n & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} < 0 \\ A^T PA - P + \mu^2\varepsilon^{-1} A^T XA < -(1 + d_M - d_m)R = -\rho R\end{gathered} \tag{21}$$

증명: 정리 3의 증명과정에서 부등식을 $1 + d_M - d_m$를 최적화 변수로 하여 정리하면 식 (19)를 얻을 수 있으며, 이와 마찬가지로 정리 4,5에서 (20), (21)식을 유도할 수 있다. ■

위에서 설명된 정리 1-5는 시변인 불확실성에 대한 안정 크기 계산에 따름정리 2는 시변인 지연시간계산에 각각 사용될 수 있으므로 기존의 연구 결과와는 차이를 보인다. 특히, 제안된 결과들은 기존의 연구에서는 고려되지 못한 시변 불확실성의 크기를 지연시간에 대한 정보와 연관하여 구한 것으로, 따름정리 2의 결과는 안정 유지 지연시간 범위가 지연시간의 하한값 d_m과 무관한 형태로 얻어진다. 이는 기존의 결과들[3,4,7,10,11]이 하한값 d_m에 종속된 것과는 다르다. 다음 장에서는 제안된 조건들을 MATLAB으로 구현하여 수치 예제에 적용한 결과를 비교한다.

IV. 예제

앞 장에서의 결과는 불확실성과 지연시간을 동시에 시변으로 고려하여 유도된 것이다. 동일한 문제에 관한 기존의 결과가 없는 관계로 직접적으로 기존 결과와 비교하기가 어렵다. 따라서 불확실성의 크기에 관한 결과 중심으로 시불변 지연시간에 대한 시불변 불확실성을 고려한 참고문헌[17-20]과 시불변 지연시간에 대한 시변 불확실성의 크기를 구한 참고문헌 [16]의 결과를 본 논문에서 제안한 조건과 비교하여 살펴본다. 지연시간의 크기에 관해서는 [11]의 예를 고려할 수 있으나 [11]에서는 식 (6)과 같이 지연이 있는 상태변수에

표 1. 불확실성의 안정 범위 비교.

Table 1. Comparison of stability bounds of uncertainty with the previous results.

불확실성 $\gamma(\bullet)$	지연시간 $h(\bullet)$	α	-0.15	+0.5
시불변 γ	시불변 h	[18]	$\lvert\gamma\rvert< 1.73$	$\lvert\gamma\rvert< 0.72$
		[19]	$\lvert\gamma\rvert< 2.08$	$\lvert\gamma\rvert< 1.51$
		[20]	$\lvert\gamma\rvert< 2.08$	$\lvert\gamma\rvert< 1.17$
		[17]	$\lvert\gamma\rvert< 1.95$	$\lvert\gamma\rvert< 1.47$
		[17]	$\lvert\gamma\rvert< 1.68$	$\lvert\gamma\rvert< 1.01$
		[17]	$\lvert\gamma\rvert< 1.70$	$\lvert\gamma\rvert< 1.06$
시변 $\gamma(k)$	시불변 h	[16 알고리즘 1]	$\lvert\gamma\rvert< 1.42$	$\lvert\gamma\rvert< 0.68$
		[16 알고리즘 2]	$\lvert\gamma\rvert< 1.66$	*
시변 $\gamma(k)$	시불변 $h(k)$ $d_M - d_m = 0$	정리 1	$\lvert\gamma\rvert< 1.28$	$\lvert\gamma\rvert< 0.74$
		따름정리 1	$\lvert\gamma\rvert< 1.70$	$\lvert\gamma\rvert< 1.06$
		정리 2	$\lvert\gamma\rvert< 1.14$	$\lvert\gamma\rvert< 0.54$
		정리 3	$\lvert\gamma\rvert< 1.85$	$\lvert\gamma\rvert< 1.10$
		정리 4	$\lvert\gamma\rvert< 1.79$	$\lvert\gamma\rvert< 0.68$
		정리 5	$\lvert\gamma\rvert< 1.79$	$\lvert\gamma\rvert< 0.68$
시변 $\gamma(k)$	구간 시변 $h(k)$ $d_M - d_m = 2$	정리 1	$\lvert\gamma\rvert< 0.81$	$\lvert\gamma\rvert< 0.45$
		정리 2	$\lvert\gamma\rvert< 0.54$	$\lvert\gamma\rvert< 0.45$
		정리 3	$\lvert\gamma\rvert< 1.07$	$\lvert\gamma\rvert< 0.64$
		정리 4	$\lvert\gamma\rvert< 0.91$	$\lvert\gamma\rvert< 0.26$
		정리 5	$\lvert\gamma\rvert< 0.90$	$\lvert\gamma\rvert< 0.26$

*: 가능한 해가 존재하지 않음.

대하여 시변 불확실성을 고려한 것이 아니고, 식 (2)와 같이 이미 알고 있는 확정된 시불변 행렬을 사용하여 지연시간의 하한값 d_m에 따른 상한값 d_M의 결과를 구하였다. 따라서 [11]과 같이 지연시간 범위 만을 구하는 논문의 결과와 본 논문에서 제안한 비구조화된 시변 불확실성의 크기와 지연시간 하한값에 독립인 지연시간 범위에 대한 결과를 직접 비교하기는 어렵다. 그러므로 시변 지연시간의 안정범위에 대하여 제안된 조건은 [17]의 예를 이용하여 지연시간 독립인 지연시간 범위를 구한 결과를 제시한다.

예제 1: 다음과 같이 표현되는 시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = A_0 x(k) + \gamma(\bullet) A_1 x(k - h(\bullet))$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

시스템 행렬의 α값이 -0.15와 0.5의 두 경우에 대하여 불확실성의 안정크기에 대한 결과를 비교한다. 참고문헌 [17]에서는 시불변 지연시간 h에 대하여 지연 상태변수에 대한 불확실성을 시불변 변수 γ로 고려하였고 안정성을 유지하는 γ의 크기를 비교하였다. 본 논문의 결과를 이와 비교하기 위하여 γ을 $\gamma(k)$로, h를 $0 < d_m \le h(k) \le d_M$ 의 시변 변수로 고려하여 이에 대한 안정크기를 구하였다. 이에 대한 결과를 다음의 표에 구분하여 정리하였다. 표에서는 γ, h의 시간에 대한 특성에 따라 구분하여 기존 결과와 함께 정리하였다. $h = 0$인 경우, 즉, 시간지연이 없는 경우의 시불변 불확실성 γ의 최대 안정 범위는 각 경우 $\lvert\gamma\rvert< 2.11$과 $\lvert\gamma\rvert< 1.52$ 이다.

표 1에서 정리 3,4를 이용한 결과가 정리 1,2의 최적화를 고려하지 않은 결과보다 좋음을 알 수 있다. 이는 동일한 조건에 대하여 정리 3,4는 최적화 과정을 포함한 것이기 때문이다. 반면에, 정리 1,2는 최적화 없이 선형부등식의 해를 이용함으로 비교적 계산이 수월하다는 장점이 있다. 또한, 정리 1과 2에 있어서는 정리 1의 결과가 정리 2을 이용한 결과보다 우수한 범위를 제공한다. 정리 3,4,5의 결과는 기존의 시변 불확실성에 대한 [16]의 결과인 1.66과 0.68 보다 우수하며, 더 나아가 시불변 지연시간을 갖는 시불변 불확실성[17-20]에 대한 일부 결과[17,18]보다 나은 결과를 보여준다. 일반적으로 시변 안정조건이 시불변의 조건보다 보수적이고 제한적임을 고려하면, 시변 불확실성에 대한 본 논문의 결과가 시불변 불확실성에 비추어 비슷하거나 큰 안정범위를 제공한다는 것은 제안된 안정조건이 우수함을 보여주는 것이다. 특히, 정리 4,5가 [16]의 알고리즘 2와 1의 결과를 포함하는 것을 수치로 확인할 수 있다. 제안된 결과 중에 정리 3의 결과는 정리 4,5의 결과 보다 우수한 1.85와 1.10의 결과를 제공한다. 이는 기존의 결과[16]에 비하여 11 %와 49 % 향상된 결과이다. 이산 리아프노프 방정식의 해를 이용한 따름정리 1의 결과도 [16]의 결과보다 우수함을 보여주며, 이는 시불변 불확실성에 대한 결과[17]와 같음을 보여준다. 지연시간의 범위가 2인 경우에 대하여 불확실성의 크기를 구한 결과는 시불변 지연시간인 경우에 비하여 보수적인 결과를 보여준다. 이 경우에도 정리 3에 의한 결과가 1.07과 0.64로 가장 좋은 범위를 보여준다.

예제 2: 따름정리 2를 이용하여 크기가 주어진 시변 불확실성에 대하여 안정성 유지가 가능한 시변 지연시간의 범위를 구하는 문제를 다룬다. 예제 1과 같은 다음의 시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = A_0 x(k) + E(k) x(k - h(k))$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad E(k) = \gamma(k) A_1, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$\gamma(k)$에 따라 $\| E(k) \| = | \gamma(k) | \| A_1 \|$ 의 값이 변하게 된다. 즉, $\gamma(k)$의 최대 가능값에 따라 $\| E(k) \|$ 의 상한값 μ이 변하게 된다. α = -0.15, $\| A_1 \| = 0.368$ 인 경우에 대하여 $\gamma(k)$의 최대 가능값에 따른 지연시간의 안정범위를 따름정리 2를 이용하여 구하면 다음의 표와 같다. 표에서 정리 4와 관련된 따름정리

표 2. 시변 불확실성 크기에 따른 지연시간 범위 비교.

Table 2. Comparison of delay time bounds according to various uncertainties.

	$\lvert\gamma(k)\rvert = 0.1$ $\mu = 0.0368$	$\lvert\gamma(k)\rvert = 0.2$ $\mu = 0.0736$	$\lvert\gamma(k)\rvert = 0.3$ $\mu = 0.1104$	$\lvert\gamma(k)\rvert = 0.4$ $\mu = 0.1472$	$\lvert\gamma(k)\rvert = 0.5$ $\mu = 0.1840$
따름정리2 (19)	334	82	36	20	12
따름정리2 (20)	354	87	38	21	13
따름정리2 (21)	164	61	32	19	12

2의 두 번째 조건인 식 (20)에 의한 최적화 결과가 정리 3과 관련된 식 (19)의 결과를 넘어서 가장 좋음을 알 수 있다. 이는 예제 1의 불확실성의 안정범위에 있어 정리 3의 결과가 가장 좋은 것과 다름을 알 수 있다. 전체 결과에서 불확실성의 크기가 커짐에 따라 지연시간의 안정 범위가 감소함을 알 수 있으며, 식 (20)을 이용한 결과에 따르면, 시변 불확실 변수 $\gamma(k)$의 크기가 0.5의 범위 내에서 변동하는 경우에, 지연시간 변동 범위가 13이내인 모든 지연시간에 대하여 안정함을 보장한다.

V. 결론

본 논문에서는 시변 시간지연 특성을 갖는 상태변수에 비구조화된 시변 불확실성이 있는 시스템의 안정성에 대하여 충분조건을 유도하고, 이에 따르는 불확실성의 안정범위와 시변 지연시간의 범위를 구하는 방법을 새롭게 제안하였다. 제안된 방법은 기존의 시불변 지연시간에 대한 시불변과 시변 불확실성에 대한 결과를 포함하는 확장된 결과로, 기존 연구에는 고려되지 못했던 시변 지연시간과 시변 불확실성에 대한 것을 동시에 고려할 수 있다. 제안된 조건식은 시변 불확실성과 지연시간 범위를 구할 수 있는 일반 고유치 문제로 구현되어 최적의 해를 구할 수 있도록 제안되었으며, 제안된 알고리즘들은 수치예제를 통하여 실제 적용될 수 있음을 보였다.

참고문헌

[1] S. Xu and J. Lam, "A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 39, no. 12, pp. 1095-1113, Dec. 2008.

[2] Y.-B. Zhao, G.-P. Liu, and D. Rees, "Stability and stabilisation of discrete-time networked control systems: a new time delay system approach," *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 9, pp. 1859-1866, 2010.

[3] E. Fridman and U. Shaked, "Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems," *International Journal of Control*, vol. 78, no. 4, pp. 235-246, Mar. 2005.

[4] H. Gao, J. Lam, C. Wang, and Y. Wang, "Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay," *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 151, no. 6, pp. 691-698, 2004.

[5] D. Zhai, Y. Zhang, B. Dong, G. Liu, and L. Liang, "Stability analysis for uncertain linear systems," *2008 Chinese Control and Decision Conference*, pp. 3016-3018, Jul. 2008.

[6] W. Zhang, Q. Y. Xie, X. S. Cai, and Z. Z. Han, "New stability criteria for discrete-time systems with interval time-varying delay and polytopic uncertainty," *Latin American Applied Research*, vol. 40, no. 2, pp. 119-124, 2010.

[7] H. Gao and T. Chen, "New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 2, pp. 328-334, 2007.

[8] H. Shao, "New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay," *Automatica*, vol. 45, no. 3, pp. 744-749, Mar. 2009.

[9] P. Kokil, H. Kar, and V. K. R. Kandanvli, "Stability analysis of linear discrete-time systems with interval delay: a delay-partitioning approach," *ISRN Applied Mathematics*, vol. 2011, pp. 1-10, 2011.

[10] H. Shao and Q. Han, "New stability criterion for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 3, pp. 619-625, 2011.

[11] J. Liu and J. Zhang, "Note on stability of discrete-time time-varying delay systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 6, no. 2, pp. 335-339, 2012.

[12] J. H. Kim, "Delay-dependent and parameter-dependent robust stability for discrete-time delayed uncertain singular systems," *Transactions of Korean Institute of Electrical Engineers (in Korean)*, vol. 59, no. 4, pp. 788-792, 2010.

[13] M. Hara and J. Yoneyama, "New robust stability condition for uncertain discrete-time systems with time-varying delay," *SICE Annual Conference*, pp. 743-747, 2008.

[14] S. C. Jee and H. J. Lee, "H2/Hinf fault detection and isolation for discrete-time delayed systems," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 17, no. 10, pp. 960-966, 2011.

[15] G. S. Bae and Y. H. Joo, "Intelligent controller for networked control systems with time-delay," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 17, no. 2, pp. 139-144, 2011.

[16] H. S. Han and D. H. Lee, "Stability bounds of delayed-time varying perturbations of discrete systems," *Journal of Control, Automation, and Systems (in Korean)*, vol. 13, no. 2, pp. 147-153, 2007.

[17] S. B. Stojanovic and D. LJ. Debeljkovic, "Further results on asymptotic stability of linear discrete time delay autonomous systems," *International Journal of Information and Systems Sciences*, vol. 2, no. 1, pp. 117-123, 2006.

[18] T. Mori, N. Fukuma, and M. Kuwahara, "Delay-independent stability criteria for discrete-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 27, no. 4, pp. 946-966, 1982.

[19] H. Trinh and M. Aldeen, "D-stability analysis of discrete-delay perturbed systems," *International Journal of Control*, vol. 61, no. 2, pp. 493-505, 1995.

[20] S. B. Stojanovic and D. LJ. Debeljkovic, "On the asymptotic stability of linear discrete time delay systems," *IFAC Workshop on TDS, Rocquencourt (France)*, Sep. 2003.

[21] Z. Liu, S. Lu, S. Zhong, and M. Ye, "Robust BIBO stabilization analysis for discrete-time uncertain system," *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 6, no. 6, pp. 336-340, 2010.

한 형 석

1986년 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1988년 서울대학교 제어계측공학과(공학석사). 1993년 서울대학교 제어계측공학과(공학박사). 1993년~1997년 순천향대학교 제어계측공학과 조교수. 1997년~현재 가천대학교 전자공학과 교수. 관심분야는 견실제어, 유도제어, 디스플레이 구동회로.