차륜 이동 로봇의 모터 구동 전압 제한 조건을 고려한 코너링(cornering) 모션의 최소 시간 궤적 계획 및 제어

Near-Minimum-Time Cornering Trajectory Planning and Control for Differential Wheeled Mobile Robots with Motor Actuation Voltage Constraint

변 용 진^{*}, 김 병 국 (Yong-Jin Byeon¹ and Byung-Kook Kim¹) ¹KAIST

ng motion trajectory planning and control a

Abstract: We propose time-optimal cornering motion trajectory planning and control algorithms for differential wheeled mobile robot with motor actuating voltage constraint, under piecewise constant control input condition. For time-optimal cornering trajectory generation, 1) we considered mobile robot's dynamics including actuator motors, 2) divided the cornering trajectory into one liner section, followed by two cornering section with angular acceleration and deceleration, and finally one liner section, and 3) formulated an efficient trajectory generation algorithm satisfying the bang-bang control principle. Also we proposed an efficient trajectory control algorithm and implemented with an X-bot to prove the performance.

Keywords: minimum-time trajectory planning, trajectory control, differential wheeled mobile robot, motor actuation voltage constraint

I. 서론

모바일 로봇의 신속한 운행은 다방면에서 필수불가결한 기술이다. 모바일 로봇의 최소 시간 운행 문제는 다음과 같 이 3가지로 나눌 수 있다. 1) 경로 계획(PP: Path Planning,) - 초 기 위치와 초기 위치의 방향과 목표 위치와 목표 위치의 방 향이 주어져 있을 때, 이를 연결하는 경로(path)를 생성. 2) 궤 적 계획(TG: Trajectory Generation) - 경로로부터 속도, 가속도 프로파일을 추가한 시간 정보가 포함된 궤적(trajectory)을 생 성. 3) 궤적 제어(TC: Trajectory Control) - 주어진 궤적을 추종 하도록 제어. 여기서 1)과 2)를 같이 수행하는 경우는 궤적 계획(TP: Trajectory Planning)라 부른다. 로봇의 운행은 통상 직 선 구간과 회전 구간의 조합으로 이루어지며, 본 논문에서는 이들을 조합하여 코너를 최단 시간에 통과하는 최소 시간 문 제를 다루고자 한다. 이러한 문제를 궤적 계획 문제와 궤적 제어 문제로 나누어 해결하고자 한다.

제적 계획에 대한 기존의 연구들은 사용하는 모바일 로봇 의 제한 조건 고려 여부에 따라 다음과 같이 3가지 경우로 나눌 수 있다. 기구학적 제한 조건만 고려한 경우, 토크 제한 조건을 고려한 경우, 모터 구동 전압 제한 조건을 고려한 경 우이다.

먼저 기구학적 제한 조건만 고려하는 경우[1-3]의 궤적 계 획 방법들은 오차가 크다는 단점이 있다. 모델이 간단하기 때문에 궤적 계획 단계에서 연산 효율성은 높아지게 되지만

* 책임저자(Corresponding Author) 논문접수: 2012. 3. 21., 수정: 2012. 8. 9., 채택확정: 2012. 8. 13. 변용진, 김병국: KAIST 전기 및 전자공학과 (yjbyeon@rtcl.kaist.ac.kr/bkkim@kaist.ac.kr) 동역학적 제한 조건은 전혀 고려되지 않아서 실제 적용이 어 려우며, 최대 성능을 발휘할 필요성이 있는 최소 시간 문제 에서는 모델과의 오차로 인해 최대 성능을 발휘하기 힘들다 는 단점이 있다.

다음으로 토크 제한 조건을 고려한 경우[4,5]의 궤적 계획 방법들은 추가적인 모터 토크 제어기들이 필요하다는 단점 이 있다. 동역학 제한 조건도 고려하였기 때문에 모델의 정 확성을 높였지만 실제 모터의 입력의 경우 토크가 아니기 때 문에 추가적인 모터 토크 제어기가 필요하게 되고 이로 인해 오차 및 추가 비용이 발생하게 된다.

마지막으로 모터 구동 전압 제한 조건을 고려한 경우[6,7] 의 궤적 계획 방법은 최대 성능을 경제적으로 구현 가능한 장점이 있다. 토크 제한 조건을 고려한 경우에 비해서는 모 델이 복잡하다는 문제점을 가지고 있지만 모바일 로봇의 최 대 성능을 발휘하기 용이하며, 모터에 직접 펼스 폭 변조 (PWM: Pulse Width Modulation) 제어 입력을 인가 할 수 있기 때문에 추가적인 모터 토크 제어기가 필요치 않기에 경제적 이다.

본 논문에서는 [7]에서 제안된 TP-NDPS을 개량하여 최단 시간 경로 계획 알고리즘을 제안한다. TP-NDPS에서는 5개의 상수 입력 제어 구간을 사용하였고 이 중 호 구간의 경우에 는 Bang-bang 이론을 만족하지 못하는 문제점이 있다. 이를 개선하기 위해 코너 통과를 위한 최소 구간의 수인 4개의 구 간과 Bang-bang 이론을 만족하도록 하여 TP-4PCI (Trajectory Planning with 4 Piecewise Constant Inputs)를 제안하였다.

본 연구의 다른 하나의 주제인 궤적 제어와 관련된 기존의 연구는 크게 2가지로 나눌 수 있다. 토크 입력 기반 모델을 사용하는 경우와 모델이 불확실할 경우이다.

[※] 본 연구는 지식경제부 21C 프론티어 인간기능 생활지원 지능로봇 기술개발사업의 일환으로 진행되었음.

먼저 토크 입력 기반을 사용하는 경우[8-10]의 궤적 제어는 제어기의 출력이 토크이기 때문에 모터에 인가하기 위해서 는 별도의 모터 토크 제어기가 필요하다는 문제점이 있다. 더불어 모터 구동 전압 제한 조건을 고려하기 힘들기 때문에 앞의 TP-4PCI의 궤적을 추종하기에는 적합하지 않다.

그리고 모델이 불확실할 경우[11,12]는 연산 효율성이 떨어 지며 비 효율적이다. 앞의 궤적 계획 단계에서 모바일 로봇 의 동역학 모델을 사용하였는데 이를 고려하지 않기 때문에 앞의 TP-4PCI의 궤적을 효율적으로 추종하기에는 적합하지 않다.

따라서 본 논문에서는 모터 구동 전압 제한 조건을 고려한 제적 제어를 위한 효율적인 알고리즘을 제안하였다. 기존에 널리 알려진 직교 기반 제어(cartesian based control)을 기반으 로 하여 차륜 이동 로봇을 대상으로 하고 직접적으로 펄스 폭 변조 방식의 듀티비의 제어가 가능하도록 개량하여 CBC-DWMR (Cartesian Based Control for Differential Wheeled Mobile Robot)을 제안하였다. 그리고 이를 실제 X-bot이라는 모바일 로봇을 사용하여 실험적으로 증명하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성되었다. II 장에서 사용할 모바 일 로봇의 모델과 문제에 관해서 설명하고, III 장에서 TP-4PCI 궤적 계획 알고리즘에 관해서 설명한다. 그리고 IV 장 에서 CBC-DWMR 궤적 제어 알고리즘에 관해서 설명한다. V 장에서는 위의 궤적 제어 알고리즘을 실제 실험을 통해 검증 하여 보았다. 마지막으로 VI 장에서 결론과 추후 과제에 대 한 설명을 한다.

II. 차륜 이동 로봇 모델 및 문제 정의

이 장에서는 모터 구동 전압 제한 조건을 고려한 차륜 이 동 로봇의 모델을 설명하고, 이를 이용하여 해결하고자 하는 문제를 정의한다.

1. 차륜 이동 로봇의 기구학 모델

차륜 이동 로봇의 기구학(kinematics)은 다음과 같다. 그림 1과 같이 원형의 차륜 이동 로봇이 있을 때 *l*은 모바일 로봇 의 반지름, *r*은 바퀴의 반지름, *b*는 로봇 중심에서 바퀴의 중 심까지의 거리, *t*_w는 바퀴의 폭을 의미한다. 이를 이용하여 각 바퀴의 각속도를 이용하여 모바일 중심의 선속도 *v*와 각속도 ω를 구할 수 있는 차륜 이동 로봇의 기구학은 다음과 같다.



그림 1. 차륜 이동 로봇의 구조.

Fig. 1. Structure of differential wheeled mobile robot.

$$\begin{vmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{vmatrix} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{T}_{\mathbf{q}} \begin{bmatrix} w^{R}(t) \\ w^{L}(t) \end{bmatrix}$$
(1)

여기서 x, y 는 모바일 로봇 위치, θ 는 모바일 로봇의 오리 엔테이션이다. w^R, w^L은 각 바퀴의 각속도를 의미하며, J는

jacobian으로
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0\\ \sin\theta & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 으로 주어지며 $\mathbf{T}_{\mathbf{q}} \vdash \begin{bmatrix} r/2 & r/2\\ r/2b & -r/2b \end{bmatrix}$

의 상수 행렬이다.

2. 차륜 이동 로봇의 동역학 모델

본 논문에서 사용하는 동역학(dynamics)은 모바일 로봇과 구동 모터를 모두 포함한 동역학이다. 입력은 각 바퀴의 펄 스 폭 변조의 듀티비이며 출력은 모바일 로봇의 양 바퀴의 각속도이다.

모터에 가해준 입력과 두 바퀴의 각속도와의 관계식은 다 음과 같다. 이 때 구동 모터에 가해준 입력과 두 모터에 흐 르는 전류의 관계식을 얻을 수 있다.

$$R_a \mathbf{i} = V_s \mathbf{u} - K_b \rho \mathbf{w} \tag{2}$$

여기서 R_a 는 전기자 저항, K_b 는 역기전력 상수, ρ 는 모터의 기 어비, V_s 는 배터리 전압, u는 $[u^R \ u^L]^T$ 로 양 바퀴의 모터의 펼 스 폭 변조의 듀티비, i는 $[t^R \ t^L]^T$ 로 양 모터에 흐르는 전류, w는 $[w^R \ w^L]^T$ 로 양 바퀴 각속도이다.

모바일 로봇의 관성을 고려하여 양 모터에 흐르는 전류와 양 바퀴 각속도의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{w}}{dt} + F_{v}\mathbf{w} = K_{t}\rho\mathbf{i}$$
(3)

여기서 F_v는 점성 마찰 계수, K_t는 토크 상수, M_x는 모바일 로봇의 관성 매트릭스이다. 여기서 M_x는 다음과 같이 주어 진다.

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} J_{1} & J_{2} \\ J_{2} & J_{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mc^{2}b^{2} + Ic^{2} + I_{\omega} & mc^{2}b^{2} - Ic^{2} \\ mc^{2}b^{2} - Ic^{2} & mc^{2}b^{2} + Ic^{2} + I_{\omega} \end{bmatrix}$$

$$I_{c} = m_{c}l^{2}/2, \qquad I_{\omega} = m_{\omega}r^{2}/2, \qquad I_{m} = m_{\omega}t_{\omega}^{2}/12 \qquad (4)$$

$$I = I_{c} + 2m_{\omega}b^{2} + 2I_{m}, \qquad m = m_{c} + 2m_{\omega}$$

여기서 m_c는 모바일 로봇의 바퀴를 제외한 질량, m_o는 바퀴 의 질량, m은 전체 질량, I_o는 바퀴의 회전 축에 관한 바퀴의 회전 관성, I_m은 바퀴의 반지름 방향을 회전 축으로 하였을 때의 바퀴의 회전 관성, I_c는 바퀴를 제외한 모바일 로봇의 회 전 관성, I는 로봇 전체의 회전 관성, c는 상수로 n2b 값을 가 진다. (자세한 사항은 [13]을 참조)

이를 이용하여 기구학 및 동역학을 포함한 이동 로봇의 블 록 다이어그램은 그림 2와 같다.

모터 제어 입력은 다음과 같이 변환이 가능하다. 식 (2)와 (3)의 미분 방정식을 쉽게 풀기 위해서 $\mathbf{u}'=[u^+ u^-]^T$ 로 정 의할 수 있다. 여기서 u^+ 는 선형 운동 입력이라 명하며 좌우 바퀴의 펄스 폭 변조 방식의 듀티비 입력의 평균을, u^- 는 회 전 운동 입력이라 명하고 두 바퀴의 펄스 폭 변조 방식의 듀 티비 입력의 차를 2로 나눈 것을 의미한다.



그림 2. 차륜 이동 로봇의 블록 다이어그램.

Fig. 2. Block diagram of differential wheeled mobile robot.

$$u^{+} = \frac{u^{R} + u^{L}}{2}, \ u^{-} = \frac{u^{R} - u^{L}}{2}$$

$$u^{R} = \frac{u^{+} + u^{-}}{2}, \ u^{L} = \frac{u^{+} - u^{-}}{2}$$
(5)

이를 이용하여 상태 벡터(State vector), $\mathbf{x} \equiv [v \ \omega]^T$ 이라 두면 연속 시간 상태 공간에서의 동역학 모델(continuous-time state space dynamic model)을 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}' \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{v} & 0 \\ 0 & a_{\omega} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{v} & 0 \\ 0 & b_{\omega} \end{bmatrix}$$
(6)

여기서 a_{ν} , b_{ν} 는 선속도 관련 미분 방정식의 계수이며 a_{ω} , b_{ω} 는 회전 속도관련 미분 방정식의 계수로 다음과 같이 주어진다.

$$a_{v} = -\frac{F_{v} + K_{b}K_{t}\rho^{2}/R_{a}}{J_{1} + J_{2}}, \quad a_{w} = -\frac{F_{v} + K_{b}K_{t}\rho^{2}/R_{a}}{J_{1} - J_{2}}$$

$$b_{v} = \frac{rV_{s}K_{t}\rho}{(J_{1} + J_{2})bR_{a}}, \qquad b_{w} = \frac{rV_{s}K_{t}\rho}{(J_{1} - J_{2})bR_{a}}$$
(7)

이를 통해 제어 입력을 u'로 변환을 통하여 상태 벡터의 두 구성요소가 분리되어 보다 간단한 동역학 식이 구해진다. 입력인 u'가 시간에 무관한 상수라고 가정하고 위의 1차 미 분 방정식을 풀게 되면 다음과 같이 선속도 및 각속도를 구 할 수 있다.

$$v(v_{0},t,u^{+}) = v_{0}e^{a_{v}t} - \frac{b_{v}}{a_{v}}(1-e^{a_{v}t})u^{+}$$

$$\omega(\omega_{0},t,u^{-}) = \omega_{0}e^{a_{w}t} - \frac{b_{w}}{a_{w}}(1-e^{a_{w}t})u^{-}$$
(8)

여기서 v₀, ω_0 는 초기상태의 선속도, 각속도이다. 3. 모터 구동 전압 제한 조건

모터에 가해지는 구동 전압은 그림 3과 같이 제한되어 있 다. 모터 구동 전압은 배터리 전압과 펄스 폭 변조의 듀티비 의 곱, V,u이다. 여기서 배터리 전압 V,는 상수이며 펄스 폭 변조의 듀티비, u의 경우 그림 3(a)와 같이 절대값이 최대 umax로 제한되어 있다.

$$\max(abs(u^{R}), abs(u^{L})) \le u_{\max}$$
(9)

선형 운동 입력과 회전 운동 입력으로 변환하였을 때의 펄 스 폭 변조의 듀티비도 그림 3(b)와 같이 제한되게 된다.



그림 3. 모터 구동 전압 제한 조건.

Fig. 3. Motor actuation voltage constraint.



그림 4. 코너의 모습.

Fig. 4. Figure of the corner.

$$abs(u^+) + abs(u^-)) \le u_{\max} \tag{10}$$

여기서 u_{max} 는 펄스 폭 변조의 듀티비의 최대값으로 1이하의 값을 가지게 된다.

4. 코너 정의

본 논문에서 가정한 이동 로봇의 운행 환경의 코너는 그림 4(a)와 같다. 코너의 길이는 *L*, 내벽까지의 거리는 *D*, 외벽까 지의 거리는 *E*, 코너의 각도는 θ_f로 주어진다. 여기서 모바일 로봇 R은 반경 *I*의 원으로 주어진다. 그리고 로봇을 점으로 근사한 C-space 상에서 코너의 모습은 그림 4(b)로 주어지고 여기서 모바일 로봇은 R'인 점으로 근사 된다.

여기서 코너의 길이 L은 충분히 길다고 가정하였다. 만일 L이 충분히 길지 않다면 차륜 이동 로봇의 논홀로노믹(nonholonomic) 제한조건 때문에 뒤에 설명할 Bang-bang 이론을 만족하는 해가 존재하지 못할 수 있기 때문이다. 그리고 E는 I과 일치한다고 가정하였다. 이는 코너를 통과할 때 외부로 회전하는 경우는 배제하기 위함이다.

5. 문제 정의

본 논문에서는 위의 모바일 로봇의 모델을 이용하여 다음 2가지 문제를 정의한다.

1) 궤적 계획 문제: 차륜 이동 로봇을 대상으로 모터 구동 전압 제한 조건을 고려하여 정지상태에서 길이가 L이고 내 부 폭이 D이고 각도가 θ_f인 코너가 주어져 있을 때, 네 개의 상수 입력 제어 구간을 이용하여 충돌 없이 최단 시간에 통 과하는 궤적을 구하라.

2) 궤적 제어 문제: 별도의 모터 토크 제어기가 필요 없이 모터에 직접 펄스 폭 변조의 듀티비를 인가하고 위의 궤적을 추종할 수 있는 궤적 제어 알고리즘을 제안하고 이를 X-bot 을 이용하여 실험적으로 검증하라.

III. 네 개의 상수 입력 구간을 이용한 경로 계획

1. 네 구간 설명

제적 계획 문제에 정의한 바와 같이 코너를 통과하는 궤적 을 찾기 위한 제약 조건으로 4개의 상수 입력 제어 구간을 사용한다. 이는 코너를 통과하는 자유 궤적의 수는 무수히 많고 이를 모두 고려하는 것을 불가능하고 상수 입력을 사용 함으로써 복잡한 동역학 모델을 쉽게 풀 수 있으며, 임의의 코너를 통과하기 위한 최소 제어 구간의 수는 4이기 때문이 다. 그림 5를 참고하여 각 구간은 다음과 같다.

1) S₁-TA(Translational Acceleration) section: 첫 번째에 해당하 는 구간으로 시작 후 전진 운동구간.

2) S₂-RA(Rotational Acceleration) section: 두 번째에 해당하는 구간으로 각속도 증가 회전 운동 구간.

3) S₃-RD(Rotational Deceleration) section: 세 번째에 해당하는 구간으로 각속도 감소 회전 운동 구간,



그림 5. 구간별 입력 및 속도 프로파일. Fig. 5. Inputs and velocity of each sections.

4) S₄-TAG(Translational acceleration to goal) section: 마지막 구 간으로 목표까지의 전진 운동 구간.

여기서 n구간에서의 최종 속도 및 각속도는 v_n 과 ω_n 이고, 이 때의 입력은 u_n^+ 와 u_n^- 이다.

2. Bang-bang 제어

최소 시간 문제를 풀기 위해서 Bang-bang 제어를 사용해야 한다. 즉, 모바일 로봇의 최대 가, 감속 제어 입력을 사용하 여야 하며 이는 Bang-bang 원리를 만족해야 한다. 예를 들어 직선 구간을 가장 빠르게 지나 정지지점에 멈추기 위해서는 최대 가속 제어 입력을 사용하다가 특정 시각부터는 최대 감 속 제어 입력을 사용하여야 한다.

먼저 전진 구간의 특성을 살펴본다. 전진 운동 구간에는 회전이 없다. 그렇기에 최대 직선 운동 입력을 사용하게 되 면 가장 높은 속도를 가진다. 이 때 입력은 $u^-=0$ 이고 u^+ 은 u_{\max} 이며 이를 두 바퀴의 입력으로 전환할 경우 $u_n^R = u_n^L$ = u_{\max} 이다. 즉, 직선 운동 구간에서는 두 바퀴 모두 최대 입 력을 사용함을 확인 할 수 있다.

다음은 회전 구간의 특성을 살펴본다. 회전 운동 구간에는 회전 성분이 필요하기 때문에 회전 운동 입력이 0이 될 수 없다. 그리고 그림 3(b)와 식 (10)에서 볼 수 있듯이 회전 운 동 입력과 직선 운동 입력의 합의 최대값이 결정되어 있다. 그렇기 때문에 가장 빠르게 움직이기 위한 $u_n^+ 는 u_n^+ = u_{\max}$ $-abs(u_n^-)$ 으로 주어지게 된다. 이때 가장 높은 선속도를 가 진다. 이를 두 바퀴의 입력으로 변경하면 $max(abs(u^R), abs(u^L)) = u_{\max}$ 이다. 즉 회전 운동 구간에서는 두 바퀴 중 한 바퀴만 최대 입력을 사용한다.

3. TP-4PCI 알고리즘

이 절에서는 제안된 궤적 계획 알고리즘인 TP-4PCI (Trajectory Planning with 4 Piecewise Constant Inputs) 알고리즘을 설명한다. 이는 다음과 같은 순서로 수행된다.

단계 0: u_2^- 의 초기값을 결정.

단계 1: u_2 값에 따른 회전 구간(S_2 , S_3)의 속도 계획을 수행. 단계 2: 이를 이용하여 시작점에서부터의 수평이동 시켜 충돌이 일어나지 않도록 내부 루프를 이용하여 회전 구간을 계획한다.

단계 3: 코너의 남는 부분을 이용하여 전진 구간(S₁, S₄)을 계획한다.

단계4: 1~3단계를 통해 얻은 궤적의 코너 통과시간을 고려 하여 u_2^- 의 값을 황금분할(golden section method)를 이용하여 변경한다. 이때 u_2^- 의 변화량의 절대값이 일정값보다 작다면 단계 5로 간다. 그렇지 않다면 u_2^- 를 바뀌고 단계 1로 되돌 아간다.

단계 5: 알고리즘을 종료한다.

3.1 회전 구간 속도 계획

회전 구간 S_2 , S_3 의 속도 단계 계획에 대해 설명한다. 첫 번 째 회전 구간 S_2 에 들어 왔을 때에는 L은 충분히 길다고 가 정하였기 때문에 이미 속도는 최대 속도 $(v_{max} = -b_v/a_v)$ 에 이 르렀다고 여길 수 있다. 이를 이용하여 T_2 와 u_2^- 가 주어져 있다면 속도를 구할 수 있다.

$$v(t_{1}, u_{2}^{-}) = v_{\max} e^{a_{v}(t-t_{1})} - \frac{b_{v}}{a_{v}} (1 - e^{a_{v}(t-t_{1})})(1 - abs(u_{2}^{-}))$$

$$\omega(t_{1}, u_{2}^{-}) = -\frac{b_{\omega}}{a_{\omega}} (1 - e^{a_{\omega}(t-t_{1})})u_{2}^{-}$$
(11)

회전 구간이 종료될 때에는 각속도가 0이라는 조건과 최 종 모바일 로봇의 회전 각도와 코너의 각도가 일치해야 한다 는 조건을 만족해야 한다. 이를 이용하여 S₃의 시간과 입력을 구할 수 있다.

$$T_{3}(u_{3}^{-}) = \frac{1}{a_{\omega}} \ln(\frac{b_{\omega}u_{3}^{-}}{b_{\omega}u_{3}^{-} + a_{\omega}\omega_{2}})$$

$$\theta_{3}(u_{3}^{-}) = -\frac{b_{\omega}}{a_{\omega}^{-2}} (\ln(\frac{b_{\omega}u_{3}^{-}}{b_{\omega}u_{3}^{-} + a_{\omega}\omega_{2}}) - \frac{b_{\omega}u_{3}^{-}}{b_{\omega}u_{3}^{-} + a_{\omega}\omega_{2}} + 1)u_{3}^{-}$$
(12)

$$+ \frac{\omega_{2}}{a_{\omega}} (\frac{b_{\omega}u_{3}^{-}}{b_{\omega}u_{3}^{-} + a_{\omega}\omega_{2}} - 1) + \theta_{2}$$

여기서 $\theta_3 = \theta_f \equiv 만족하는 해가 항상 존재하는 것은 아니다.$ $만일 S₂에서 너무 작게 회전한 경우에는 <math>\theta_f$ 보다 항상 작을 수 있으며 반대로 S₂에서 너무 회전한 경우에는 항상 θ_f 보다 클 수 있다. 이를 이용하여 해를 구할 수 없다면 S₂의 회전 구간 의 시간, T₂를 늘리거나 줄여야 한다.

3.2 회전 구간 시작지점 이동 및 충돌 회피

앞에서 얻은 속도 프로파일을 이용하여 회전 구간의 시작 지점을 얻을 수 있다. 이 때는 코너가 π미만인 경우와 π인 두 가지 경우로 나눌 수 있다.



(a)
$$\theta_f < \pi$$
.



그림 6. 로봇 이동 경로. Fig. 6. Robot moving path.

3.2.1 회전 구간시작 지점 이동

그림 6(a)는 코너가 π 미만의 경우이다. 이 때 s₁은 S₁에서 이동해야 할 거리, s₄는 S₄에서 이동해야 할 거리, or S₁에서 이동해야 할 거리이다.

$$s_{1} = (L + (D - l)\tan\frac{\theta}{2}) - \sqrt{\Delta x^{2} + \Delta y^{2}} \frac{\sin(\theta_{f} - \operatorname{atan2}(\Delta y, \Delta x))}{\sin(\pi - \theta_{f})}$$

$$s_{4} = (L + (D - l)\tan\frac{\theta}{2}) - \sqrt{\Delta x^{2} + \Delta y^{2}} \frac{\sin(\operatorname{atan2}(\Delta y, \Delta x))}{\sin(\pi - \theta_{f})}$$
(13)

여기서 Δx, Δy는 회전 구간 S₂, S₃의 경로를 구하였을 때 x축 변위와 y축 변위이다. 이를 이용하여 s₁, s₄를 얻을 수 있으며 원점에서 s₁만큼 수평이동 한 지점이 회전 구간의 시작 지점 이다.

그림 6에서 (b)는 코너가 π일 경우이다. 이 때 s₁, s₄는 다음 과 같다.

$$s_{1} = (L+l) - l_{1}$$

$$s_{4} = (L+l) - l_{2} \qquad l_{2} = l_{1} - \Delta x \qquad (14)$$

여기서 *l*₁은 회전 구간 시작 지점에서 y축 변위가 *D*가 되는 지점까지의 x축 변위를 의미한다. 이를 이용하여 앞과 같이 회전 구간의 시작 지점을 구할 수 있다.

3.2.2 ω₂에 따른 회전 구간 경로의 경향성

그림 6(a)에서 코너 각도가 π 미만의 경우 각속도에 따른 코너 통과 경향성을 볼 수 있다. 이 경우 ω₂가 높아지게 되 면 코너 외각으로 날카롭게 돌며 ω₂가 낮아지게 되면 코너 안쪽으로 부드럽게 회전을 하게 된다. 이 때 ω₂가 너무 낮아 지게 되면 코너 내벽과 충돌이 일어나게 된다. 이를 고려하 여 충돌 없이 최단 시간을 가지는 궤적을 구하기 위해서는 코너의 내벽을 스치듯이 지나는 ω₂를 찾아야 한다. u₂ 가 고 정 되어 있다면 ω₂는 u₂ 와 T₂의 함수이기 때문에 T₂가 증가 하면 ω₂도 증가한다. 이를 이용하여 얻은 경로가 내벽과 충 돌이 일어나지 않는다면 T₂를 감소시키고 충돌이 일어나면 T₂를 증가시켜 다시 회전 구간 속도 계획부터 수행하여 내부 loop에 의하여 고정된 u₂ 에 대한 최단 시간의 회전 구간의 궤적을 구하게 된다.

그림 6(b)에서 코너 각도가 π일 경우 각속도에 따른 코너 통과 경향성을 볼 수 있다. 이 경우 y축 변위가 오로지 회전 구간에서만 발생하게 된다. 이를 고려하여 2π미만의 경우와 같이 u_2^- 가 고정되어 있고, y축 변위가 2D보다 작다면 T_2 를 감소시키고 크다면 T_2 를 증가시켜 다시 회전 구간 속도 계획 부터 수행하여 고정된 u_2^- 에 대한 최단 시간의 회전 구간의 궤적을 구하게 된다.

3.3 직선 구간 계획

앞에서 구한 직선 운동 구간의 이동 거리를 이용하여 직선 운동 구간(*S*₁, *S*₄)의 궤적을 구할 수 있다. 앞에서 구한 직선 구간에서 이동해야 할 거리를 이용하고 *S*₁에서의 초기 속도 는 0,*S*₄에서의 초기 속도는 κ라 두면 다음을 얻을 수 있다.

$$s_{1}(T_{1}) = \left(-\frac{1}{a_{v}}\left(\frac{b_{v}}{a_{v}}\right) - \frac{b_{v}}{a_{v}}T_{1} + \frac{1}{a_{v}}\left(\frac{b_{v}}{a_{v}}\right)e^{a_{v}T_{1}}\right)u_{\max}$$

$$s_{4}(T_{4}) = \frac{1}{a_{v}}\left(v_{3}e^{a_{v}T_{4}} - v_{3}\right) + \left(-\frac{1}{a_{v}}\left(\frac{b_{v}}{a_{v}}\right) - \frac{b_{v}}{a_{v}}T_{4} + \frac{1}{a_{v}}\left(\frac{b_{v}}{a_{v}}\right)e^{a_{v}T_{4}}\right)u_{\max}$$
(15)

위의 식을 뉴턴법(Newton method)를 이용하면 직선 운동 구간의 시간, T₁과 T₄를 얻을 수 있다. 입력의 경우 앞의 Bang-bang 제어에서 결정이 되므로 입력과 시간을 알기 때문 에 궤적을 유일하게 결정 할 수 있다.

3.4 u_2^- 검색

u₂ 를 변경하며 코너를 최단 시간에 통과하는 궤적을 구할 수 있다. 앞의 일련의 과정을 통해 고정된 u₂ 에 대하여 최단 시간에 코너를 통과하는 궤적을 얻을 수 있다. 이를 이용하여 u₂ 를 변경하며 최단 시간에 통과하는 궤적을 얻을 수 있다. 그림 7은 u₂ 를 순차적으로 증가하며 코너를 통과하는 궤적의 시간을 나타낸 그래프이다. 여기서 너무 낮은 u₂ 에 관해서는 충돌을 피할 수가 없다. 그 이상의 u₂ 에 관한 경향성을 살펴보게 되면 단봉형 함수의 형태이다. 이런 단봉형 함수의 최소값을 찾는 방법으로는 여러 가지가 있지 만 본 논문에서는 널리 알려진 황금분할법을 사용하였다. 이렇게 u₂ 를 바꾸어 가며 앞의 일련의 과정을 반복하여 충돌 없이 최단시간으로 코너를 통과하는 궤적을 구하게 된다.

4. 시뮬레이션 결과

이 장에서는 TP-4PCI 알고리즘을 시뮬레이션을 통해 검증 한다. 여기서 시뮬레이션 모델의 파라메터로는 뒤에 설명할 X-bot의 파라메터를 사용하였으며 코너의 정보는 *L* = 3m, *D* = 0.4m이고 θ_f는 θ_f=π/2 인 경우와 θ_f= π인 두 가지 경우를 고 려하였고 Matlab을 사용하였다. 시뮬레이션 결과의 이동 경 로를 살펴보게 되면 모바일 로봇이 충돌이 일어나지 않으면 서 안쪽으로는 꼭지점을 스치듯이 지나감을 확인 할 수 있다. 그리고 이 때의 입력 (u⁺,u⁻) 의 프로파일을 살펴보게 되면 Bang-bang 원리를 만족함을 확인할 수 있다.

여기서 (a)-(d)까지는 θ_f=π/2의 경로 및 속도 프로파일 및 입력 프로파일이며 (e)-(g)까지는 θ_f= π의 경로 및 속도 프로 파일 및 입력 프로파일이다.

이 결과 중 θ_f < π 의 경우는 기존 연구[7]의 TP-NDPS와 비교가능하며, 이를 비교해 보면, 연산 효율적이며 코너 통과 시간도 단축되었음을 알 수 있다. 연산 효율성의 경우에는



그림 7. u₂ 에 따른 코너 통과 시간.





Fig. 8. Simulation result of the TP-4SCI.

D	0.2m	0.3m	0.4m
3m	9.69/9.94 (2.5%)	9.76/10.11 (3.2%)	9.86/10.28 (4%)
4m	12.71/12.96	12.81/13.13	12.88/13.30
5m	15.73/15.98	15.83/16.15	15.90/16.32

표 1. 제안된 방식과 기존의 방식의 코너 통과 시간 비교. Table 1. Comparing result of time to pass the corner.

제안된 방식의 통과 시간/기존 방식의 통과 시간(sec)(향상률)(+#2)

기존의 경우 이진 검색을 이용한 4중 루프를 사용함에 비해 제안된 방식은 뉴턴법과 2진 검색, 황금분할법이 사용된 3중 루프를 사용하게 된다. Dual core 3Ghz, Matlab의 ode45 함수를 이용하여 위의 2가지 알고리즘의 연산 시간을 비교해보면 기존의 경우 90초 이상이 걸림에 비해 제안된 방식은 3초 미 만의 시간이 걸림을 확인 할 수 있다. 그리고 기존 방식에 비해 코너 통과 시간도 단축되었음을 위의 표 1를 통해 확인 할 수 있다. 이 경향성은 코너에서 회전 구간이 차지하는 비 율이 커질수록 향상율도 증가하게 된다. 하지만 기존의 방식 은 최대 각속도를 얻게 되는 구간인 호구간에서 각속도와 선 속도가 일정하다고 가정하였지만 제안된 방식은 그런 제한 을 두지 않았기 때문에 최대 각속도가 크게 되어 원심력이 증가하여 코너를 통과할 때 이탈할 가능성이 높아지는 문제 점이 있을 수 있다.

IV. 차륜 이동 로봇을 위한 궤적 제어 알고리즘

이 장에서는 III 장에서 얻은 궤적을 추종하기 위한 궤적 제어 알고리즘에 관해서 설명한다. 기존의 직교 기반 제어를 차륜 이동 로봇을 대상으로 펼스 폭 변조 방식의 듀티비를 직접 인가하여 제어 할 수 있도록 개량하여 CBC-DWMR (Cartesian Based Control for Differential Wheeled Mobile Robot)을 제안하였다.

1. CBC_DWMR 설명

제적 제어 시스템의 블록 다이어그램은 그림 9와 같다. 여 기서 제어 주기는 T_c , k번째 단계에서 목표 궤적은 x_k^d , y_k^d , θ_k^d , 모바일 로봇의 원하는 가속도는 a_k^d , 모바일 로봇의 원 하는 각 가속도는 α_k^d , 두 모터의 목표 토크 값은 $\tau_k^{L_d}$, $\tau_k^{R_d}$, 두 모터의 목표 전류 값은 $i_k^{R_d}$, $i_k^{L_d}$, 모바일 로봇의 두 바퀴 의 각속도는 ω_k^R , ω_k^L 이고 이를 적분하여 구한 제어기가 추 정하는 모바일 로봇의 포즈는 x_k , y_k , θ_k 이다. 이들을 이용 해서 k번째 단계에서 오른쪽 바퀴의 입력 펄스 폭 변조방식 의 듀티비는 u_k^R 가 인가되며, 왼쪽 바퀴에는 u_k^L 을 인가하게 된다. 여기서 PD gain을 이용하여 오차를 피드백 하는 부분을 빼고는 모바일 로봇의 블록 다이어그램인 그림 (2)와 대칭적 인 모습을 띔을 알 수 있다. 다른 점은 모바일 로봇에서는 Jacobian을 사용하였지만 이 Jacobian은 역행렬이 존재하지 않 기 때문에 제어기에서는 의사역행렬(pseudo-inverse) J[#] 을 사 용하였다.

Jacobian에 대하여 설명한다. 차륜 이동 로봇의 경우에는 포즈는 3차원이며 입력은 두 바퀴로 2차원을 가지게 된다. 즉 3차원 정보 중 일부는 손실되게 된다. 차륜 이동 로봇의 Jacobian의 경우 열 성분이 선형 독립이므로 이를 이용하여 좌역원(left inverse)를 구할 수 있다.

$$\mathbf{J}^{\#}(\theta) = (\mathbf{J}^{\mathrm{T}}(\theta)\mathbf{J}(\theta))^{-1}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}(\theta)$$
$$\mathbf{J}^{\#}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(16)

그리고 논홀로노믹 제약 조건에 의해 모바일 로봇의 진행 방향의 노말 방향으로는 이동을 할 수 없다. 즉, 이를 고려하 여 모바일 로봇의 진행방향의 노말 방향의 성분을 무시하도 록 식을 세울 수 있다.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(17)
$$\mathbf{J}^{\#}(\theta) = \mathbf{SR}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 R은 회전 행렬(rotation matrix)로 전역 좌표 계의 성분 을 모바일 지역 좌표 계로 바꾸는 행렬이다. S는 선택 행렬 (select matrix)로 앞의 R에 의해서 변경된 3차원의 정보 중에 서 진행 방향의 노말 성분은 제거하는 행렬이다. 이는 식 (16)의 결과와 일치함을 확인 할 수 있다.

V. 궤적 제어 실험

1. 타깃 모바일 로봇

탁깃 모바일 로봇으로는 그림 10의 유진 로봇 사의 로봇 개발자용 플랫폼인 X-bot을 사용하였다. X-bot은 지름 0.35m, 높이 0.095m, 중량 3.1kg을 가지며 내부 모터로는 JCM 사의 CIC30을 내장하고 있다. 기구학 모델의 파라메터의 경우에는 실제 측정을 통해서 구할 수 있다. 이 때 l은 0.175m, b는 0.1545m, r은 0.036m, t_w 는 0.012m, c는 0.1097을 가진다. 동역 학 모델의 파라메터의 경우 점성 마찰 계수와 모터 관성 모 먼트의 경우에는 명시되어 있지 않아 일정 입력이 가해졌을 때 정상 상태의 속도와 시상수를 구해 이를 이용하여 역산하 였다. m은 3.1kg, V_s 는 17V, R_a 는 5.33Ω, $K_t\rho$ 는 0.523Nm/A, $K_b\rho$ 는 0.486V/(rad/s), F_v 는 0.049Nm/(rad/s), I는 0.092 kgm², I_a 는 0.004 kgm²의 값을 가진다.



그림 9. CBC-DWMR 블록 다이어그램. Fig. 9. CBC-DWMR block diagram.



그림 10. X-bot 사진. Fig. 10. Figure of X-bot.

2. 실험

실험 환경으로 L = 1.35m, D = 0.35m, $\theta_f = \pi/2$ 의 코너를 대상으로 하였다. 안전성 및 오차 보정을 위하여 궤적 계획 상에서는 u_{max} 는 0.8로, 궤적 제어 상에서는 u_{max} 는 0.9를 사용 하였고 제어 주기는 10ms이다.

실험 결과는 그림 11과 같다. 인코더 정보를 누적하여 구 한 경로의 경우는 원하는 경로와 큰 차이가 없음을 확인 할 수 있었다. 목표 속도와 실제 속도를 살펴보게 되면 약간 느 리게 움직이는 것을 확인 할 수 있다. 그렇기에 궤적 계획에 서 얻은 입력보다 높은 선형 운동 입력을 실제 실험에서 사 용하였음을 확인 할 수 있다. 이는 실제 모바일 로봇의 동역 학 모델의 파라메터와 제어기 상의 파라메터의 차이가 있음 을 의미한다.



그림 11. 실험 결과.



VI. 결론

본 논문에서는 주어진 코너를 최단 시간에 통과 하기 위한 궤적 계획 문제와 이 궤적을 추종하기 위한 궤적 제어 문제 를 연구하였다.

제적 계획 단계에서는 TP-4PCI를 제안하였다. 이 알고리즘 은 4개의 상수 입력 제어 구간을 사용하여 코너를 통과하였 으며 모든 구간에서 Bang-bang 원리를 만족하도록 하여 최소 시간 문제를 풀었다. 그리고 연산 효율성을 높이기 위해서 루프를 줄이고 수치해석방법을 적용하였다. 이를 통해 기존 의 모터 구동 전압 제한 조건을 고려한 알고리즘과 비교하여 연산 효율적이며 코너 통과 시간을 단축 시킬 수 있었다.

제적 제어 단계에서는 CBC-DWMR을 제안하였다. 이는 위 의 궤적을 추종하기 위해서 직교 기반 제어를 차륜 이동 로 봇에 적합하게 개량, 더불어 모터 구동 전압 제한 조건을 고 려하기 위해 모터에 직접 펄스 폭 변조 방식의 듀티비를 인 가할 수 있는 궤적 제어 알고리즘이다. 그리고 이를 X-bot을 이용하여 실험을 통해서 검증하였다.

추후 연구과제는 다음과 같다. 인접한 2개 이상의 코너에 관하여 확장하여 궤적 계획 문제를 풀 수 있을 것이며, 현재 포즈를 추정하기 위해 인코더만 사용할 경우 바퀴의 미끄러 짐이나 지면의 굴곡 등에 의해 오차가 발생할 수 있으며 이 로 인한 오차는 계속 누적될 수 있기 때문에 이를 해결하기 위해 LRF, GPS와 같은 외부 센서를 추가하여 성능을 향상 시킬 수 있을 것이다.

참고문헌

- M. Hentschel, D. Lecking, and B. Wagner, "Deterministic path planning and navigation for an autonomous fork lift truck," *Proc. 6th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*, vol. 6, no. 1, pp. 1-6, 2008.
- [2] L. Labakhua, U. Nunes, R. Rodriguies, and S. F'atima Leite, "Smooth trajectory planning for fully automated passenger vehicles—Spline and clothoid based methods and its simulation," *Informatic in Control Automation and Robotics*, vol. 15, pp. 169-182, 2008.
- [3] B. Qin, Y. C. Soh, M. Xie, and D. Wang, "Optimal trajectory generation for wheeled mobile robot," *Proc. 5th Int. Conf. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 1, pp. 434-444, Mar. 2000.
- [4] M. Haddad, W. Khalil, and H. E. Lehtihet, "Trajectory planning of unicycle mobile robots with a trapezoidal-velocity constraint," *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 26, no. 5, pp. 954-962, 2010.
- [5] W. Wu, H. Chen, and P.-Y. Woo, "Time optimal path planning for a wheeled mobile robot," *J. Robot. Syst.*, vol. 17, no. 11, pp. 585-591, 2000.
- [6] J.-S. Choi and B. K. Kim, "Near-time-optimal trajectory planning for wheeled mobile robots with translational and rotational sections," *IEEE Trans. Robot. Automation*, vol. 17, no. 1, pp. 85-90, Feb. 2001.
- [7] J.-S. Choi and B. K. Kim, "Near minimum-time direct voltage control algorithms for wheeled mobile robots with current and voltage constraints," *Robotica*, vol. 19, no. 1, pp. 29-39, Jan., 2001.
- [8] L. Caracciolo, A. De Luca, and S. Iannitti, "Trajectory tracking control of a four-wheel differentially driven mobile robot," Proc. *Int. Conf. Robotics & Automation*, vol. 4, pp. 2632-2638, 1999.

- [9] T. Fukao, H. Nakagawa, and N. Adachi, "Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot," *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 16, no. 5, pp. 609-615, 2000.
- [9] C. Samson and K. Ait-adberrahim, "Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space," *Proc. Int. Conf. Robotics & Automation*, vol. 2, pp. 1136-1141, Apr. 1991.
- [11] R. Fierro and F. L. Leiws, "Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks," *IEEE Trans. on Neural networks*, vol. 9, no. 4, pp. 589-600, 1998.
- [12] A. Pedro Aguiar and J. P. Hespanha, "Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 52, no. 8, pp. 1362-1379, 2007.
- [13] X. Yun and Y. Yamamoto, "Internal dynamics of a wheeled mobile robot," *Proc. IEEE Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, vol. 2, pp. 1288-1294, Jul. 1993.
- [14] A. W. Divelbiss and J. Wen, "Trajectory tracking control of a car-trailer system," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, vol. 5, no. 3, pp. 269-278, 1997.
- [15] J. J. Craig, Introduction to robotics mechanics and control, 2rd edition, Addison-Wesley publishing Company, 1989.
- [16] D. B. Reister and F. G Pin, "Time-optimal trajectories for mobile robots with two independently driven wheels," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 13, no. 1, pp. 38-54, 1994.
- [17] M. Renaud and J. Y. Fourquet, "Minimum-time motion of a mobile robot with two independent acceleration-driven wheels," *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 2608-2613, 1997.
- [18] R. Siegwart and I.Nourbakhsh, Introduction to Autonomous Mobile Robots, MIT Press, 2004.

- [19] H. S. Yoon and T. H. Park, 'Motion planning of autonomous mobile robot using dynamic programming," *Journal of Control, Robotics and systems (in Korean)*, vol. 16, no. 1, pp. 53-60, 2010.
- [20] Y. H. Kim, U. K. Song, and B. K. Kim, "Development of precise localization system for autonomous mobile robots using multiple ultrasonic transmitters and receivers in indoor environments," *Journal of Control, Robotics and systems (in Korean)*, vol. 17, no. 4, pp. 353-361, 2011.



변 용 진

2010년 KAIST 전기 및 전자 공학과 졸 업. 2012년 동대학 대학원 전기 및 전자 공학 석사. 2012년~현재 동대학 전기 및 전자공학 박사과정 재학중. 관심분야는 모바일 로봇.



김 병 국

1975년 서울대학교 전자공학과 졸업. 1975년 KAIST 전기 및 전자 공학과 석 사. 1981년 동 대학원 박사. 1981년~1986 년 우진계기(주) 연구실장. 1982년~1984 년 University of Michigan 방문연구. 1986 년~현재 KAIST 전기 및 전자공학과 교

수. 관심분야는 실시간 시스템, 로보틱스, 임베디드 제어.