

# 고하중 차량의 다목적 테스트를 위한 다축 가진 테이블의 기구학 해석

## Kinematic Analysis of Multi Axis Shaking Table for Multi-Purpose Test of Heavy Transport Vehicle

진재현\*, 나홍철, 전승배  
(Jaehyun Jin<sup>1</sup>, HongCheoul Na<sup>2</sup>, and Seung-Bae Jeon<sup>3</sup>)

<sup>1</sup>Sunchon National University

<sup>2</sup>Chonnam National University

<sup>3</sup>JKS

**Abstract:** An excitation table is commonly used for vibration and ride tests for parts or assemblies of automobiles, aircrafts, or other heavy systems. The authors have analyzed several kinematic properties of an excitation table that is under development for heavy transport vehicles. It consists of one table and 7 linear hydraulic actuators. The authors have performed mobility analysis, inverse kinematics, forward kinematics, and singularity analysis. Especially, we have proposed a fast forward kinematic solution considering the limited motion of the excitation table. On the assumption that the motion variables such as rotation angles and displacements are small, the forward kinematic problem is converted to the observer problem of a linear system. This provides a fast solution. Also we have verified that there are no singularity points in the working range by numerical analysis.

**Keywords:** multi axis shaking table, parallel mechanism, redundant actuator, fast forward kinematic solution, singularity check

### I. 서론

설계와 제조 능력의 향상으로, 대형 수송 시스템의 규모(체적, 무게, 속도, 수송능력 등)는 계속 증가하고 있다. 대형 수송 시스템은, 진동, 승차감, 및 주행 안정성을 사전에 검증하여야 한다. 진동 및 승차감 성능이 좋지 않으면 승객들에게 불편을 주며, 주행 안정성 문제는 대형 사고로 연결될 수 있기 때문이다. 그래서 다목적 테스트를 위한 장치는 대형 수송시스템의 개발에 필수적인 장비이다. 이러한 테스트를 위하여 다축 가진 테이블(MAST: Multi Axis Shaking Table)을 많이 사용하고 있다. 가진 테이블은, 테스트 하고자 하는 시스템을 올려 놓는 테이블과 이를 진동시키는 유압 구동기가 연결된 것이다. 일반적으로 병렬 구조이며, 6 자유도 움직임이 가능하다. 자동차, 철도차량, 항공기의 가진 시험이나, 지진 연구 등에 많이 사용된다[1,2].

본 논문에서는, 대형 수송 시스템의 다목적 테스트를 위하여 개발중인 MAST에 대한 기하학 해석 결과를 제시한다. 대상 시스템은 그림 1의 형상이며, 무거운 차량을 지탱하기 위하여 테이블 밑에 4개의 유압 구동기를 배치한다. 이로 인해 전체적으로 7개의 유압 구동기를 갖춘 병렬 기구가 된다. 즉, 한 개의 여유 구동기가 장착되어 있는 시스템이다.

기구학 해석에 있어서, 역기구학 해석은 한 번의 계산으로 해결되지만, 순기구학 해석은 반복계산을 수행하기 때문에 시간이 더 소요된다. 실시간 제어의 부담을 줄이기 위하여 순기

구학 해석을 빨리 할 수 있는 방법에 대해 연구하였다. 구동기의 실제 움직임의 한계(행정)를 고려한다면, 순기구학 해석을 간단하게 하는 방법이 있다. 구동기의 행정(stroke)은 한정되어 있어서, 구동기가 최대로 움직이더라도 테이블의 자세각은 작은 값이 된다. 이러한 가정하에서 순기구학 해석을 위한 모델을 제시하였는데, 관측기 문제와 유사하다. 그리고 특이점 해석을 수행하여, 동작 범위 내에서는 특이점이 없음을 확인하였다. 또한, 대상 시스템의 일부 구동기는 독립적으로 구동할 수 있는 직렬 기구의 특징을 가지는 것을 확인하였다.

### II. 다축 가진 테이블 시스템

#### 1. 시스템 개요

그림 2에 대상 장치의 개략적인 형상과 링크(유압 구동기)의 번호를 표시하였다.

테이블은 5m × 2m × 1m 크기이며, 무게는 대략 35톤 이다. 테이블의 중심은 C 로 표현하며, 그 위에 놓여지는 차량에

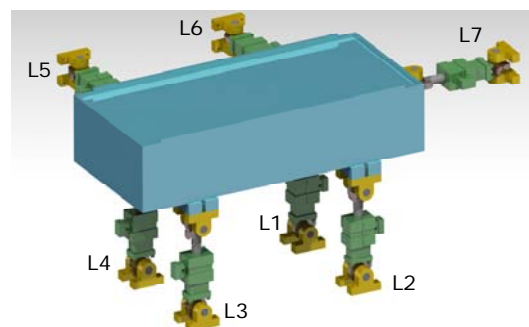


그림 1. 다축 가진 테이블 시스템의 형상.

Fig. 1. Configuration of multi axis shaking table.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2012. 3. 30., 수정: 2012. 8. 13., 채택확정: 2012. 8. 17.

진재현: 순천대학교 우주항공공학전공(donworry@sunchon.ac.kr)

나홍철: 전남대학교 기계공학과 대학원, (주)JKS(jkkco@chol.com)

전승배: (주)JKS(jkkco@chol.com)

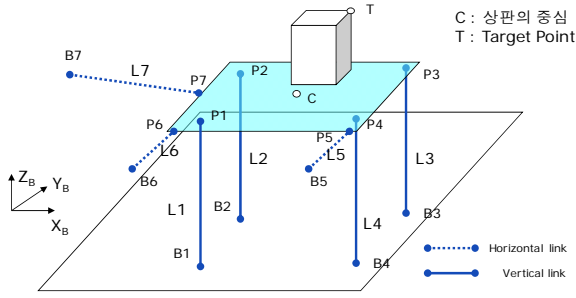


그림 2. 시스템의 부호와 좌표계 정의.

Fig. 2. Definition of symbols and a coordinate system.

표 1. 테이블 조인트 위치(테이블 좌표계, mm).

Table 1. Positions of joints in the upper table (P coordinate, mm).

P	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
X	-1400	-1400	1400	1400	1400	-1400	-2800
Y	-800	800	800	-800	-1400	-1400	0
Z	-900	-900	-900	-900	0	0	0

표 2. 지면에 고정된 조인트 위치(지면 좌표계, mm).

Table 2. Positions of joints in the base (B coordinate, mm).

B	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
X	-1400	-1400	1400	1400	1400	-1400	-4000
Y	-800	800	800	-800	-2600	-2600	0
Z	0	0	0	0	2100	2100	2100

있는 관심 위치는 T로 표현한다. 테이블 중심이 제어대상이 될 수도 있지만, 차량에 있는 특정 위치(승객의 위치 등)가 제어대상이 되기도 한다.

지면(베이스)은 관성 좌표계로 간주한다. 지면 좌표계(B)는  $X_B$ - $Y_B$ - $Z_B$ 로, 테이블 좌표계(P)는  $X_P$ - $Y_P$ - $Z_P$ 로 표현한다.

유압 구동기는 중립 길이가 1200 mm 이며, 최대 스트로크는 +/- 50 mm 이다. 7개의 모듈이 장착되어 있으며, 각 모듈은 20 톤의 힘을 낼 수 있다. 테이블을 제외한 최대 부하 하중은 40톤 정도 이다.

각 구동기(링크)가 중립 길이일 때, 조인트의 위치는 표 1, 2에 나타내었다. 테이블 좌표계의 중심 C는 지면 좌표계 중심 O에 대해  $X_B=0, Y_B=0, Z_B=2100$  지점에 위치한다.

2. 테이블의 자세

Euler 각도를 이용하여 강체 테이블의 자세를 표현하였다. 회전 순서는 3-2-1 순서로, yaw( $\alpha_3$ ) → pitch( $\alpha_2$ ) → roll( $\alpha_1$ ) 이다. 베이스(지면)를 관성 좌표계로, 테이블을 이동 좌표계로 생각할 때, 이 두 좌표계의 변환 행렬은 (1a, 1b)와 같다. 임의의 벡터  $\vec{r}$  을 지면 좌표계(B)와 테이블 좌표계(P)에서 표현한 것을 각각  $\vec{r}^B, \vec{r}^P$  으로 구분한다.

$$\vec{r}^B = R_P^B \vec{r}^P, \quad \vec{r}^P = R_B^P \vec{r}^B \tag{1a}$$

$$R_B^P = R(x, \alpha_1)R(y, \alpha_2)R(z, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1b}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & c_2s_3 & -s_2 \\ s_1s_2c_3 - c_1s_3 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & s_1c_2 \\ c_1s_2c_3 + s_1s_3 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 & c_1c_2 \end{bmatrix}$$

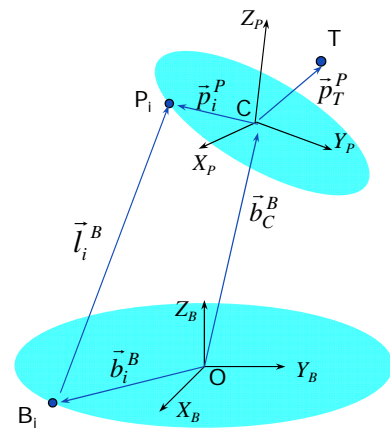


그림 3. 링크 벡터 정의.

Fig. 3. Definition of link vectors.

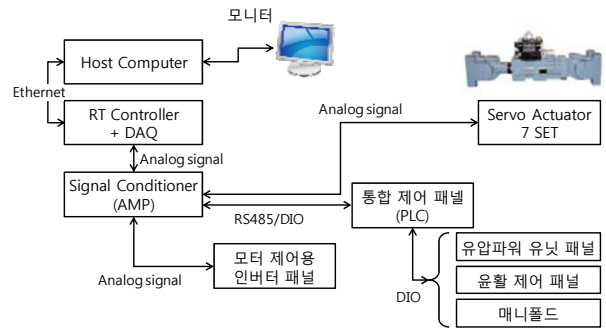


그림 4. 유압 구동 시스템 구성.

Fig. 4. Hydraulic actuator system for the MAST.

여기서  $c_i = \cos(\alpha_i), s_i = \sin(\alpha_i)$  를 의미한다. 그림 3은 링크 벡터를 정의한 것이다. 테이블 중심에서 테이블 조인트(P)에 대한 위치 벡터는  $\vec{p}_i^P$  로 표현하고, 베이스 중심에서 베이스 조인트(B)에 대한 위치 벡터는  $\vec{b}_i^B$  로 표현한다. 테이블의 중심 C는 베이스 좌표계에 대해서 중립 위치  $\vec{b}_{C,0}^B$  에 있다가, 병진명령  $\Delta\vec{b}_C^B$  에 의해서  $\vec{b}_C^B = \vec{b}_{C,0}^B + \Delta\vec{b}_C^B$  의 위치로 이동한다. 여기서  $\vec{b}_{C,0}^B = [0, 0, 2100]^T$  이다.

3. 유압 구동기 제어 시스템

유압 구동기의 제어를 위한 프로그램은 두 개의 루프로 구성되어 있다. 3단 서보 밸브 제어를 위한 내부 루프와 변위제어를 위한 외부 루프이다. 구동기 링크 변위제어를 통하여 테이블의 6자유도 모션 제어를 수행해야 하므로 역기구학 해석 및 순기구학 해석 프로그램을 탑재한다. 그리고 유압 파워팩 모듈과 통신하여 압력, 유량 제어 및 이상 유무를 모니터링 한다.

프로그램 동작시 CPU 점유율의 안정성을 확보하기 위하여, 실시간으로 수행되는 역기구학 및 순기구학 해석 코드의 실행 부하를 최소화 하는 것이 주요 요구사항이다.

자세제어를 위한 프로그램은 그림 5와 같이 구성되어 있다. 주어진 명령 프로파일에 따라, 테이블의 병진과 회전 운동이 계산되고, 역기구학 해석을 통하여 링크의 필요한 길이를 계산하고, 각 링크의 유압 제어시스템은 길이 명령을 추

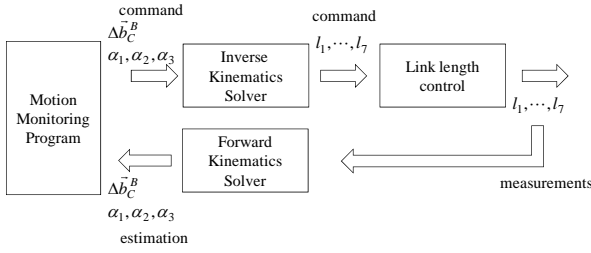


그림 5. 운동 제어 프로그램의 구성.

Fig. 5. Main program for motion control.

종하게 한다. 링크의 실제 길이를 측정하고, 순기구학 해석을 이용하여 테이블의 병진 및 회전 운동을 모니터링 한다.

### III. 기구학 해석

#### 1. 여유 구동기 장착에 따른 운동 자유도 평가

일반적으로 Stewart 플랫폼과 같은 병렬기구체는 6의 운동 자유도를 갖도록 설계한다. 운동 자유도(mobility)를 계산하는 공식은 다음과 같다[3].

$$M = 6(n - j - 1) + \sum f_i \quad (2)$$

여기서  $n$ 은 독립적인 강체의 개수,  $j$ 는 조인트의 개수,  $f_i$ 는 각 조인트의 자유도를 의미한다. 링크는 위/아래 부분이(피스톤과 실린더) 독립적인 강체이며, 위/아래가 각각 3자유도의 볼 조인트로 테이블과 바닥에 설치되어 있다. 그리고 피스톤과 실린더는 상대적으로 미끄럼과 회전운동을 하는 2자유도 조인트이다. 결과적으로 14개의 조인트는 3개의 자유도, 7개의 조인트는 2개의 자유도를 갖는다. 독립된 강체는 테이블과 베이스(지면), 그리고 7세트의 피스톤과 실린더이며, 총 16개이다. 그래서 운동성은  $6 \times (16 - 21 - 1) + 14 \times 3 + 7 \times 2 = 20$ 이 된다. 이는 피스톤과 실린더가 각각 1개의 추가적인 자유도를 가지고 있어서, 링크 축에 대하여 회전할 수 있는 자유도가 있다( $7 \times 2 = 14$  자유도). 나머지는 테이블의 자유도에 해당하므로, 테이블의 6 자유도 운동에는 전혀 문제가 없다. 다만 중복이 있는 병렬기구 이므로, 각 링크가 정확한 길이로 움직여야 한다. 피스톤과 실린더에 1 자유도가 더 있는 것은 테이블의 움직임에는 전혀 문제가 되지 않으며, 이로 인해 전체 움직임이 부드러워 질 수 있다.

#### 2. 역기구학 해석

주어진 병진 명령( $\Delta \vec{b}_C^B$ )과 회전 명령( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ )에 대해서, 필요한 링크의 길이를 계산한다. 그림 3으로부터, 조인트 간의 상대적인 위치 벡터를 구한다.

$$\begin{aligned} \vec{l}_i^B &= -\vec{b}_i^B + \vec{b}_C^B + R_P^B \vec{p}_i^P \\ &= -\vec{b}_i^B + \vec{b}_{C,0}^B + \Delta \vec{b}_C^B + R_P^B \vec{p}_i^P \end{aligned} \quad (3)$$

이때, 각 링크의 길이는 다음과 같이 구해진다.

$$l_i = \sqrt{\vec{l}_i^B \cdot \vec{l}_i^B} = \left\| -\vec{b}_i^B + \vec{b}_{C,0}^B + \Delta \vec{b}_C^B + R_P^B \vec{p}_i^P \right\| \quad (4)$$

#### 3. 순기구학 해석

역기구학 해를 구하는 알고리즘을 이용하여 반복적으로 해를 추정하는 기법을 적용한다. Newton-Raphson 방법을 적

용하여 해를 추정해 나간다[4].

구동기의 길이 측정값이 주어졌을 때( $l_{i, given}, i = 1, \dots, 7$ ), 테이블의 위치와 자세를 추정하고 적합한 방법으로 갱신하게 된다(5)~(8).

$$\vec{a}(k) = [\Delta b_{C,x} \quad \Delta b_{C,y} \quad \Delta b_{C,z} \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T \quad (5)$$

$$\vec{g}(\vec{a}) = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_7]^T, \quad g_i = \hat{l}_i - l_{i, given} \quad (6)$$

$$\sum |g_i| < \varepsilon \quad (7)$$

$$\vec{a}(k+1) = \vec{a}(k) - \left[ \frac{d\vec{g}(\vec{a})}{d\vec{a}} \right]_{\vec{a}=\vec{a}(k)}^{-1} \vec{g}(\vec{a}(k)) \quad (8)$$

먼저, (5)에서 임의의 추정값 혹은 초기값을 가정한다. (6)에서, 오차 함수 값을 구하고, 이들의 합이 한계 값( $\varepsilon$ ) 이하가 되면 계산을 정지하고, 그렇지 않으면, (8)처럼 추정값을 갱신하고 다시 (5)의 과정으로 돌아간다.

(6)에서  $\hat{l}_i$ 는 (5)의  $\vec{a}$ 에 의한 추정값을 의미한다. (8)에서 자코비안,  $d\vec{g}/d\vec{a}$ 는 (9a, 9b)와 같다[6,7]. 벡터  $\vec{e}_i^B$ 는  $\vec{l}_i^B$ 의 단위벡터를 의미한다.

$$\mathbf{J}^T = \frac{d\vec{g}}{d\vec{a}} = [J_1 \quad \dots \quad J_7]^T \quad (9a)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \vec{e}_i^B \\ (R_P^B \vec{p}_i^P) \times \vec{e}_i^B \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_i^B = \frac{\vec{l}_i^B}{|\vec{l}_i^B|} \quad (9b)$$

#### 4. 작은 변위에 대한 순기구학 해석

순기구학 해석은 역기구학 해석 보다 많은 시간을 필요로 한다. 실시간 제어를 위해서 빠른 처리를 필요로 하기 때문에, 다양한 방법이 제안되었다[5,8-13]. 실용적으로 (5)의 초기값을 선정할 때, 한 스텝 이전의 수렴 값을 사용하면 계산 시간을 줄일 수 있다. Jung 등은 자세 변화를 방정식을 적분하는 방법을 제안하였다[5]. 테이블의 각속도는 구동기의 선속도를 이용하여 계산하였다. Kang 등[8]과 Kim 등[9]은 추정기(observer or estimator)를 사용하는 방법을 제안하였는데, 비선형 동역학 방정식의 파라미터 추정과 안정성 증명이 어렵다. 그 외에, 사면체 개념을 활용하는 방법[10], 추가적인 선형 변위센서를 이용하는 방법[11], 변수를 줄여서 수치해법 시간을 줄이는 방법[12], 신경망 회로를 이용하는 방법[13] 등의 Stewart 플랫폼을 위한 다양한 기법들이 제시되었다.

본 논문에서는, 실제 시스템의 동작 특성을 고려한 빠른 순기구학 해법을 제시하고자 한다. 테이블의 실제 움직임은 구동기 행정의 한계 때문에 많은 제약을 받는 것에 주목한다. 이렇게 움직임이 과도하지 않은 경우에, 테이블의 변위와 회전각은 작은 값으로 가정할 수 있다. 테이블의 크기와 유압 구동기 행정의 한계 때문에 자세각은 다음과 같은 범위에 있다(단위는 radian임).

$$|\alpha_1| < 0.062, \quad |\alpha_2| < 0.035, \quad |\alpha_3| < 0.035 \quad (10)$$

여러 방향으로 병진과 회전을 동시에 하면, 자세각은 더 작아지게 된다. 이런 이유로, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sin(a) \approx a, \quad \cos(a) \approx 1, \quad ab \approx 0; \quad a, b = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \quad (11)$$

$t_{j-1}$	$t_j$	$t_{j+1}$	$t_{j+2}$
$l_i(t_{j-1})$	$l_i(t_j)$	$l_i(t_{j+1})$	
$\Delta \bar{b}_C^B(t_{j-1}, \alpha(t_{j-1}))$	$\Delta \bar{b}_C^B(t_j, \alpha(t_j))$	$\Delta \bar{b}_C^B(t_{j+1}, \alpha(t_{j+1}))$	

그림 6. 갱신 주기에 따른 구동기 길이, 테이블 변위 및 자세.  
Fig. 6. Variables of links and the table for each update period.

순기구학 해석에 있어서 시간이 소요되는 것은  $6 \times 6$  행렬의 역변환을 여러 번 계산하기 때문이며, 이를 회피하는 것이 필요하다. 여기에서는, 상태변수를 추정하는 문제로 변환한다. 상태변수 추정이 제어 주기와 동기화되는 방법들[5,8,9]과는 달리, 한 제어 주기 내에서 상태변수 추정이 이루어지는 것이다. 그림 6에서 보는 것처럼,  $\Delta t = t_j - t_{j-1} = t_{j+1} - t_j$ 가 일정하게 유지되고, 그 시간 내에, 측정(D/A)과 기구학 해석, 제어 입력 갱신, 제어 출력이 수행된다. 일반적으로, 한 주기 내에서는 일정한 값으로 가정한다. 즉, 측정값  $l_i(t_j)$ 와 테이블의 상태값  $\Delta \bar{b}_C^B(t_j), \alpha(t_j)$ 는 일정하다고 가정한다. 여기서 제안하는 방법은, 여러 주기에 걸쳐서 변화하는 테이블의 상태값을 추정하는 것이 아니고, 한 주기 내에서 일정한 상태값을 추정하는 것이다.

이러한 개념을 구현하기 위하여, 다음과 같이 상태변수와 출력변수를 정의한다.

$$x(k) = [\Delta b_{C,x} \quad \Delta b_{C,y} \quad \Delta b_{C,z} \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T \quad (12a)$$

$$y(k) = [\Delta l_i], \quad \Delta l_i = l_i - l_{i,0} \quad (12b)$$

여기서  $l_{i,0}$ 는 구동기의 중립 길이이다. 출력에 대해서, 다음과 같이 근사화한다( $\sqrt{1+2x} \approx 1+x$  if  $|x| \ll 1$ ).

$$\begin{aligned} y_i(k) &= \Delta l_i = l_i - l_{i,0} \\ &= \sqrt{\bar{l}_i^B \cdot \bar{l}_i^B} - l_{i,0} \\ &\approx l_{i,0} \sqrt{1 + 2J_i^T x(k)/l_{i,0}} - l_{i,0} \\ &\approx J_i^T x(k) \end{aligned} \quad (13)$$

이에 따른 상태변수 방정식을 유도한다.

$$x(k+1) = x(k) \quad (14a)$$

$$y(k) \approx Cx(k) = J^T x(k) \quad (14b)$$

이에 대한 추정기는 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k) + K[y(k) - C\hat{x}(k)] \\ &\approx \hat{x}(k) + K[l_i - \bar{l}_i^B] \end{aligned} \quad (15)$$

$y(k)$ 는 실제 측정된 링크 길이 변화에 해당되고,  $C\hat{x}(k)$ 은 추정된 링크 길이 변화에 해당된다. 추정기 이득 행렬  $K$ 는 적절한 값을 선택하면 된다. 만약 dead beat 특성을 갖게 하고 싶으면 다음과 같이 결정한다.

$$I - KC = 0 \quad (16)$$

즉,  $K$ 가  $C$ 의 역행렬이 되도록 한다. 이 경우에, (15)는 (8)과 비슷해진다. 만약  $C$ 가 상수여서  $K$ 를 미리 계산해 놓으면, 실시간 계산 시간이 많이 줄어든다.

(14)에서,  $y(k) \approx Cx(k) + \Delta Cx(k)$ 로 가정해보자. (15)의 추정기를 이용해서, 오차 방정식을 유도한다.

$$e(k+1) = (I - KC)e(k) - K\Delta Cx(k+1) \quad (17)$$

정상상태 오차는 다음과 같다.

$$e_{ss} = -K\Delta Cx \quad (18)$$

이 값이 아주 작으면, 제한한 방법이 효과적이다. 대상 시스템에 대해서는 수치해석을 통해서 검증하도록 한다.

### 5. 특이점(singularity) 분석

특이점은 자코비안  $J$ 가 특이행렬이 되는 자세를 의미한다 [6,7]. 이런 경우에, (8)에서 발산하는 값을 얻는다. 대상 시스템의 동작 범위 안에 특이점이 존재하면, 시스템의 동작이 불안정해질 수 있으므로, 위험한 상태에 이를 수 있다. 그래서 특이점이 존재하는지를 미리 파악하고, 존재한다면 회피 방안을 마련하여야 한다. 여기에서는, 대상 시스템의 실제적인 형상과 변위를 고려하여, 특이점 해석을 간단하게 한 결과를 제시한다.

중립위치를 기준한 자코비안은 다음과 같다[6,7].

$$J^T = \begin{bmatrix} (\bar{e}_1^B)^T & (\bar{p}_1^p \times \bar{e}_1^B)^T \\ \vdots & \vdots \\ (\bar{e}_7^B)^T & (\bar{p}_7^p \times \bar{e}_7^B)^T \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} J_1^T \\ \vdots \\ J_7^T \end{bmatrix} \quad (19a)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \bar{e}_i^B \\ \bar{p}_i^p \times \bar{e}_i^B \end{bmatrix} \quad (19b)$$

벡터  $J_i$ 의 윗부분( $\bar{e}_i^B$ )과 아래 부분( $\bar{p}_i^p \times \bar{e}_i^B$ )은 서로 직교한다. 참고로, 테이블이 중립 위치에 있을 때는,  $R_p^B = I$ 이므로,  $\bar{p}_i^p = \bar{p}_i^B$ 이다.

중립위치에 있을 때, (19a, 19b)의 자코비안은 다음과 같다. 이 행렬의 rank는 6이다.

$$J^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -800 & 1400 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 800 & 1400 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 800 & -1400 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -800 & -1400 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1400 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

링크 5, 6 번의 경우는,  $\bar{l}_i^B$ 는 동일하지만,  $\bar{p}_i^p$ 의 방향 때문에,  $\bar{p}_i^p \times \bar{l}_i^B$ 가 서로 반대 방향이 된다(그림 7(a) 참고).  $J_5$ 와  $J_6$ 가 동일해져서, 특이상태가 되는 경우는 그림 7(b)의 경우와 같은 경우이다. 그러나, 이 상태는 동작범위에서 과도하게 벗어나는 경우이며, 실제 대상 시스템은 이러한 위치에 이를 수 없다.

링크 1~4의 경우에도, 비슷하게 해석할 수 있다. 예로서,  $J_1 \sim J_4$ 의 rank가 줄어드는 형상은, 그림 8과 같다.

St-Onge 등[7]이 제시하는 Stewart 플랫폼의 특이점들 또한, 과도하게 움직인 경우에 해당한다. 실제로는, 조인트의 물리적 제한에 의해서 도달할 수 없는 상태이다.

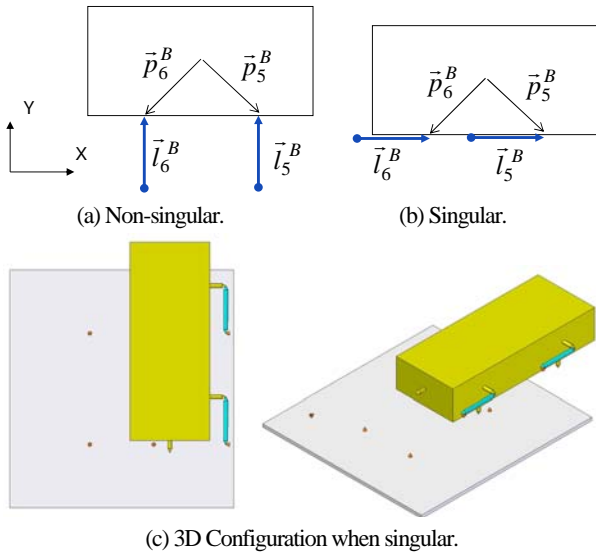


그림 7. 링크 5, 6의 특이상태.  
Fig. 7. Singular condition for the link 5 and 6.

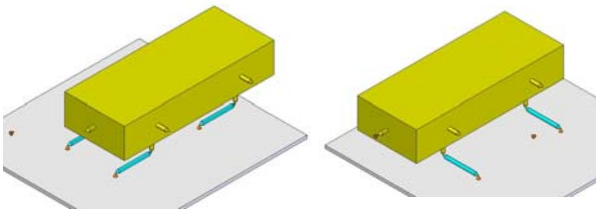


그림 8. 링크 1~4의 특이상태.  
Fig. 8. Singular condition for the link 1 ~ 4.

종합하면, 첫째, 주어진 대상 시스템에 한정하며, 둘째, 모든 구동기가 행정 범위 내에서 작동되며, 셋째, 회전 자세각과 병진 범위가 작다는 조건에서는 특이점이 없다고 결론지을 수 있다.

IV. 수치해석을 통한 검증

1. 기준 데이터 생성

병진 운동( $\Delta b_{Cx}, \Delta b_{Cy}, \Delta b_{Cz}$ )과 회전 운동( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ )에 대해서, 각각 7개의 기준값을 독립적으로 생성하고, 이에 대한 링크 길이를 구하여 저장하였다. 각 운동의 최대 최소 값은 차량 테스트에 필요한 사양이다. 전체 기준 데이터는  $7^6 = 117,649$  개 이다.

$$\begin{aligned} \Delta b_{Cx}, \Delta b_{Cy}, \Delta b_{Cz} &= -10, -5, -3, 0, 3, 5, 10 \text{ (mm)} \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 &= 1, -0.5, -0.3, 0, 0.3, 0.5, 1 \text{ (degree)} \end{aligned}$$

2. 특이점 분석

자코비안 행렬은 특이점 혹은 운동 특성에 대한 정보를 제공한다. 해석을 위해 자코비안 행렬의 조건수(condition number) 혹은 이의 역수인 기구학적 등방성 지수(kinematic isotropic index)를 많이 이용한다[14-16]. 중립위치에서의 자코비안(20) 참고)을 기준해서, 117,649 개의 등방성 지수 차이를 백분율로 계산하였다(그림 9). 변화의 범위가 기준치 대비 1.2 % 이내이므로, 가정한 동작 범위 내에는 특이점이 없고 운동 특성이 비슷하다고 결론 지을 수 있다.

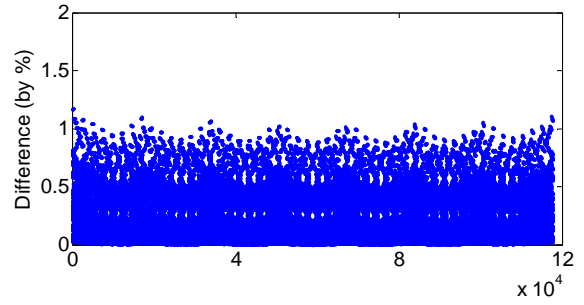


그림 9. 자코비안 행렬의 조건수 계산결과.  
Fig. 9. Condition numbers of Jacobian matrices.

표 3. 수치계산 결과.

Table 3. Results of numerical calculation.

	NR - (8)	(15)
Calculation time	100	19.2
Iteration(Max/Average)	4 / 2.87	5 / 3.64
	mean/sd*	mean/sd*
$g_1$	0.00594 / 0.05924	-0.0127 / 0.0042
$g_2$	0.00641 / 0.05991	-0.0097 / 0.0054
$g_3$	0.00734 / 0.05996	-0.0039 / 0.0048
$g_4$	0.00686 / 0.06011	-0.0070 / 0.0046
$g_5$	0.00532 / 0.03492	-0.0040 / 0.0076
$g_6$	0.00546 / 0.03630	-0.0187 / 0.0070
$g_7$	0.00487 / 0.02328	-0.0363 / 0.0116

\* mean( $\mu$ m)and standard deviation( $\mu$ m)

3. 순기구학 해법 비교

위의 117,649 개의 기준 데이터에 대해서, Newton-Raphson 방법과 본 논문에서 제안한 추정 기법을 비교하였다. 추정 기법의 경우 (14)의  $J$ 는 식 (20)의  $J$ 와 같으며, 이득 행렬  $K$ 는 (16)을 만족하도록 정하였다.

비교 대상은, 평균 계산 시간과 평균 반복회수, 수렴 정밀도( $g_i = \hat{l}_i - l_{i, given}$ 의 평균과 표준편차)이다. (7)의 한계치  $\epsilon$ 은  $1 \mu\text{m}$ 로 두었다. 7개 링크 추정 오차 크기의 합이  $1 \mu\text{m}$  이하이면, 수렴한 것으로 간주한다. 표 3은 결과이다.

수렴 평균은 NR 방법이 더 좋지만, 두 방법 모두 오차 범위( $\epsilon$ )내로 수렴한다. 평균 시간은 NR 방법을 100으로 두고 비교하였는데, 제안한 방법이 5배 정도 빠르다. 평균적으로 반복 회수는 0.8 번 증가한 것으로 나타난다. 1회 정도 더 계산하지만, 갱신 중에 역행렬을 구하지 않기 때문에 더 빨라진다. 제안한 방법은 프로그래밍도 간단하고 처리 속도도 훨씬 빠르기 때문에, 실시간 처리에 더 적합하다.

4. 링크 구동의 독립성

대상 시스템은 일반적인 완전 병렬기구(Stewart 플랫폼)와는 달리, 일부 구동기의 움직임은 직렬기구처럼 독립적이다. 한 개의 구동기만 동작하고 다른 구동기는 고정되어 있어도, 테이블의 운동이 가능하다. 정/역기구학 해석 없이도 테이블을 움직일 수 있기 때문에, 간단한 테스트를 수행하고자 할 때는 도움이 되는 특성이다. 그림 10의 개념으로 독립적 동작을 체크하였다.

한 특정 구동기의 변위만 가정하고, 순기구학을 풀고, 이 결과를 다시 역기구학에 입력했을 때, 최종적으로 구한 링크

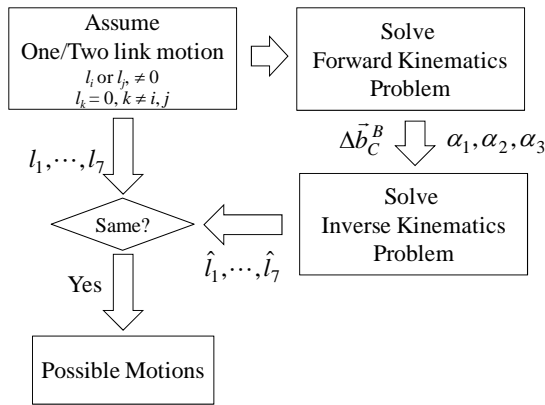


그림 10. 링크 구동의 독립성 테스트.  
Fig. 10. Test of independent link motions.

표 4. 독립적 구동 허용 범위.

Table 4. Allowable lengths of independent movements.

No	Link	Allowable range (mm)
1	1,2	± 14
2	3,4	± 14
3	2,3	± 50*
4	1,4	± 50*
5	5	± 35
6	6	± 29
7	7	± 50*

\* limited by the maximally allowable stroke

의 길이가 가정된 것과 동일함을 확인하면 된다. 이러한 움직임도 과도한 것은 허용되지 않는다.

표 4는 개별 구동기의 허용 가능한 범위를 정리한 것이다. 가정된 값과 순역기구학 해석 결과의 차이  $|g_i|$  가  $\epsilon$  이하이면 동일한 것으로 간주하였다. 번호 1~4에 해당하는 링크 조합은 각 링크가 같은 방향, 같은 크기로 움직여야 한다.

**V. 결론**

본 논문에서는, 다축 가진 테이블 시스템에 대한 기하학 해석 결과를 제시하였다. 한 개의 여유 구동기가 장착된 7축 병렬 기구이다. 조인트의 구조와 링크 행정의 한계로 실제 병진 및 회전 움직임은 작은 값이다. 이를 이용하여, 순기구학 해석을 간단하게 하는 방법을 제안하였다. 비선형성을 선형화하여 표현하고, 선형 상태 방정식의 형태로 나타내었다. 이 방정식에 대한 관측기(observer)를 설계하는 방식으로 순기구학 해석을 할 수 있음을 보였다. 기존의 Newton-Raphson 방법보다 5배나 빠르게 해를 찾았다.

또한, 작동 범위 내에 존재할 수 있는 특이점을 찾기 위하여, 자코비안 행렬의 랭크가 줄어드는 현상을 분석하고 자코비안 행렬을 수치적으로 분석하였다. 행정 한계 내에서는, 특이점은 존재하지 않는 것을 확인하였다.

본 논문에서 제시한 순기구학 해석 기법은, 제한된 움직임을 갖는 다양한 병렬기구의 순기구학 해석에 유용할 것으로 사료된다. 추후에는, 확장형 추정기(extended Kalman filter)의 개념[17]을 이용하여 동작 범위의 제한이 없는 경우에도 빠른 순기구학 해석이 가능한 방법을 연구할 계획이다.

**참고문헌**

- [1] <http://www.mts.com/>
- [2] [http://www.hitachi-pt.com/products/si/randd/eq\\_resistant/index.html](http://www.hitachi-pt.com/products/si/randd/eq_resistant/index.html)
- [3] F. Behi, "Kinematic analysis for a six-degree-of-freedom 3-PRPs parallel mechanism," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, no. 5, pp. 561-565, 1998.
- [4] Y. Cha and K. Yoon, "Development and experiment of a micropositioning parallel manipulator," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 15, no. 5, pp. 543-547, 2009.
- [5] G. Jung and K. Lee, "Real-time estimation of Stewart platform forward kinematic solution," *Transaction of the KSME (A) (in Korean)*, vol. 18, no. 7, pp. 1632-1642, 1994.
- [6] C. Gosselin and J. Angeles, "Singularity analysis of closed loop kinematic chains," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, no. 3, pp. 281-290, 1990.
- [7] B. St-Onge and C. Gosselin, "Singularity analysis and representation of the general Gough-Stewart platform," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 19, no. 3, pp. 271-288, 2000.
- [8] J. Kang, D. Kim, and K. Lee, "Robust estimator design for forward kinematics solution of a Stewart platform," *Journal of Robotic Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 29-42, 1998.
- [9] D. Kim, J. Kang, and K. Lee, "Robust nonlinear observer for forward kinematics solution of a Stewart platform: an experimental verification," *Robotica*, vol. 18, no. 6, pp. 601-610, 2000.
- [10] S. Song and D. Kwon, "Simplex analysis of the forward kinematics of a 6 degree of freedom parallel manipulators using constraints with the closed-loop kinematics (Tetrahedron)," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 6, no. 7, pp. 559-567, 2000.
- [11] T. Lee and J. Shim, "Real-time forward kinematics of the 6-6 Stewart platform with one extra linear sensor," *Transaction of the KSME (A) (in Korean)*, vol. 25, no. 9, pp. 1384-1390, 2001.
- [12] H. Ha and M. Han, "A fast forward kinematic analysis of Stewart platform," *Transaction of the KSME (A) (in Korean)*, vol. 25, no. 3, pp. 339-352, 2001.
- [13] S. Goo and K. Son, "Study on forward kinematics of Stewart platform using neural network algorithm together with Newton-Raphson Method," *Transactions of the KSAE (in Korean)*, vol. 9, no. 1, pp. 156-162, 2001.
- [14] N. Song and W. Cho, "Internal singular configuration analysis and adaptive fuzzy logic control implementation for a planar parallel manipulator," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 6, no. 1, pp. 81-90, 2000.
- [15] Y. Nam, Y. Lee, and M. Park, "Optimal kinematic design of planar parallel mechanisms: application to 2RRR-RP mechanism," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 12, no. 5, pp. 464-472, 2006.
- [16] D. Shin, et. al., "A forward closed-form position solution, kinematic analysis and implementation of a translational 3-DOF parallel mechanism formed by constraining a Stewart platform structure," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 12, no. 10, pp. 1035-1033, 2006.
- [17] S. Lee and Y. Park, "Modeling of heliostat sun tracking error using multilayered neural network trained by the extended

Kalman filter," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 16, no. 7, pp. 711-719, 2010.

**부록**

A. 수식 (13) 유도

변위와 자세값이 작다고 가정한다. 그러면 변환 행렬 식 (1b)는 다음과 같다.

$$R_B^P \approx \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}$$

이를 이용해서 다음의 링크 벡터를 정리한다.

$$\begin{aligned} \bar{l}_i^B &= -\bar{b}_i^B + \bar{b}_{C,0}^B + \Delta\bar{b}_C^B + R_p^B \bar{p}_i^P \\ &= -\bar{b}_i^B + \bar{b}_{C,0}^B + \bar{p}_i^P + \Delta\bar{b}_C^B + \bar{p}_i^P \times \bar{\alpha} \\ &= \bar{l}_{i,0}^B + \Delta\bar{b}_C^B + \bar{p}_i^P \times \bar{\alpha} \end{aligned}$$

여기서  $\bar{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$  이다. 그러면,

$$\begin{aligned} \bar{l}_i^B \cdot \bar{l}_i^B &= \bar{l}_{i,0}^B \cdot \bar{l}_{i,0}^B + 2\bar{l}_{i,0}^B \cdot (\Delta\bar{b}_C^B + \bar{p}_i^P \times \bar{\alpha}) + \varepsilon \\ &\approx l_{i,0}^2 + 2\bar{l}_{i,0}^B \cdot (\Delta\bar{b}_C^B + \bar{p}_i^P \times \bar{\alpha}) \\ &= l_{i,0}^2 \left[ 1 + 2 \frac{\bar{l}_{i,0}^B \cdot (\Delta\bar{b}_C^B + \bar{p}_i^P \times \bar{\alpha})}{l_{i,0}} \right] \end{aligned}$$

$\varepsilon$ 은 작은 값을 의미한다. 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\bar{l}_i^B \cdot \bar{l}_i^B = l_{i,0}^2 \left[ 1 + 2 \frac{J_i^T x(k)}{l_{i,0}} \right]$$

이를 이용하면, (13)의 전개가 이루어진다.  
(유도 끝)

**진재현**

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제16권 제11호 (p. 1109) 참고



**나흥철**

2000년 조선대학교 기계공학과(공학사). 2003년 전남대학교 기계공학과(공학석사). 2011년 전남대학교 기계공학과 박사과정 수료. 2002년~현재 (주)제이케이에스 제어팀 팀장. 관심분야는 유압 서보제어, 신호처리.



**전승배**

1982년 전남대학교 기계공학과(공학사). 2005년 전남대학교 기계공학과(공학석사). 2010년 조선대학교 기계공학과(공학박사). 1998년~현재 (주)제이케이에스 이사. 관심분야는 유압 서보제어, 유체해석.