

## 평면도형에 관한 학생들의 오류에 대한 초임 초등 교사들의 교수학적 내용 지식 분석<sup>1)</sup>

송근영<sup>2)</sup> · 방정숙<sup>3)</sup>

본 연구는 8명의 초임 초등 교사들을 대상으로 설문지와 전체 토의 과정에서의 응답을 중심으로 평면도형에 관한 학생들의 오류와 원인 그리고 오류에 대한 지도법 측면에서 교수학적 내용 지식을 분석하였다. 분석 결과 초임 교사들은 학생들의 오류 유형에 관해서 어느 정도 잘 예상하는 것으로 드러났지만, 그러한 오류의 원인에 대해서는 주로 학생들과 관련된 요인만 찾는 경향이 짙었다. 또한 오류에 대한 지도법에 관해서는 교사의 명확한 설명과 반복 그리고 학생들의 문제 풀이를 선호하였다. 한편, 수업 중 다양한 범례를 제시하거나 분류하기·그리기·만들기와 같은 활동의 중요성을 인식하였지만 이를 직접 실행하는 것에 대한 어려움을 토로하였다. 이러한 결과를 바탕으로 본 논문은 초임 초등 교사들의 전문성 발달 프로그램에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

주요용어 : 초임 초등 교사, 교수학적 내용 지식, 평면도형에 관한 학생들의 오류

### I. 서론

공교육의 질적 향상과 교사의 책무성이 강조되면서 교사 전문성에 대한 관심이 높아지고 있다. 교사의 전문성을 신장하기 위해서는 여러 가지 측면에서 노력이 필요하나 특히 교사의 지식에 따라서 교수·학습의 질이 달라진다는 점을 고려할 때 교사의 전문성을 신장하기 위해서 교사의 지식 향상에 중점을 두어야 할 것이다(최승현, 2007; NCTM, 2007).

교사 지식에 관한 연구는 Shulman(1986)이 교수학적 내용 지식(Pedagogical Content Knowledge[PCK])이란 개념을 제시하면서 본격적으로 이루어지기 시작했는데 연구자들마다 PCK의 개념과 구성 요소들을 조금씩 다르게 정의하고 있다. 그럼에도 불구하고 한 가지 주목할 점은 대부분 공통적으로 학생 이해 지식을 PCK의 구성 요소로서 중요하게 다루고 있다는 것이다(An, Kulm, & Wu, 2004; Marks, 1999). 이는 교사의 역할이 일방적으로 학생들에게 내용을 설명하고 전달하는 것이 아니라 학생이 개념을 탐구하고 이해하도록 돕는 것인 만큼 교사에게 무엇보다 학생 이해 지식이 중요하다는 점을 반영한 것이라 하겠다.

1) 본 논문의 일부 분석 내용은 ICME-12에서 발표되었음.

2) 대구동성초등학교 (gy9331@hanmail.net)

3) 한국교원대학교 (jeongsuk@knue.ac.kr), 교신저자

학생 이해 지식 중에서도 특히 학생들의 오류에 대한 지식은 매우 중요하다. 왜냐하면 학생들이 오류를 범했을 때 교사들이 이를 인식하지 못해 그냥 넘어가 버리거나, 인식한다고 하더라도 정확한 피드백을 주지 못하면 수학의 계통적 특성 상 하나의 오류는 학생들에게 다른 오류를 불러 일으켜 다음 학습에 장애로 작용하게 되고, 이러한 과정이 누적되면 고학년의 경우 수학을 기피하는 현상까지 나타날 수 있기 때문이다(김수미, 2003). 하지만 반대로 교사가 학생들의 오류에 대해서 잘 이해하고 민감하게 반응하여 수업 시간에 적절히 활용하면, 오히려 학생들이 수학 개념에 대해서 더욱 깊이 탐구하고 이해하는 발판이 될 뿐 아니라 활발한 의사소통의 장을 열어주는 기회가 될 수 있다(Kazemi & Stipeck, 2001).

이와 같은 이유로 최근 몇몇 연구자들은 학생 오류에 대한 교사의 지식을 집중적으로 연구하였다. 그 결과 각 나라의 문화에 따라, 또 교사들의 지식과 신념에 따라 차이가 있었으나 많은 교사들이 수업 시간에 발생한 학생들의 오류를 무시하거나 피하는 경향을 가지고 있고, 오류의 원인을 학생의 탓으로 돌리며, 오류를 처치함에 있어서는 학생들에게 탐구할 기회를 주기보다는 일방적 설명으로 끝나거나 이해할 때까지 반복 연습을 시키는 경향을 보였다(Schleppenbach et al., 2007; Son & Sinclair, 2010). 특히 수업과 학생에 대한 경험이 부족한 초임 교사의 경우, 특정 주제에 대해 학생들이 언제 어떠한 문제를 겪기 쉬운지 잘 이해하지 못하여 수업 중에 발생한 예상치 못한 상황에 유연하게 대처하지 못하며, 수업 계획에만 집착하는 경향이 있다(Borko & Livingston, 1989). 따라서 이에 대한 초임교사 교육이 필요한데 이를 위해서는 먼저 초임 교사들이 학생 오류와 원인에 대해서 어떻게 이해하는지, 오류에 대한 효과적인 지도법은 무엇이라고 생각하는지 살펴볼 필요가 있다.

하지만 국내에서는 학생 오류에 초점을 맞추어 교사 지식을 연구한 경우는 찾아보기 힘들며, 대부분 특정 영역에 대한 교사들의 지식을 SMK(Subject Matter Knowledge)와 PCK로 나누거나 또는 학생 이해 지식, 내용 지식, 교수법 지식으로 나누어 분석하는 연구였다(예, 김정은 · 방정숙, 2009; 오영열, 2004; 이종욱, 2003). 예외적으로 신보미(2008)는 고등학교 교사들을 대상으로 확률에 관한 학생들의 오개념 중 교사들이 잘 이해하는 것과 그렇지 못한 것이 무엇인지 상세히 밝혔는데 이 논문은 학생들의 오류에 초점을 맞추어 확률에 관한 교사 지식을 연구했다는 점에서 매우 의미 있는 연구라 하겠다. 하지만 내용이 중·고등학교 수준의 내용에 관한 것이므로 초등학교 수준에서는 시사점을 찾기가 어려우며, 실제적으로 교사의 전문성 신장을 위해서는 교사들의 학생 오류의 지식뿐 아니라 그에 따른 지도법에 대한 지식의 분석도 필요하다고 생각된다.

한편 도형 영역은 주위 사물을 이해하고 다른 영역의 내용을 학습하는데 도움을 주며(NCTM, 2000), 초등학교에서는 수와 연산 영역과 더불어 가장 큰 비중을 차지하는 영역임에도 불구하고 도형 영역에 대한 학생들의 선호도는 수와 연산 영역에 비하여 낮은 편이다. 또한 교사 지식에 대한 대부분의 선행 연구들이 수와 연산 영역에 집중되어 있어서(김정은 · 방정숙, 2009; 방정숙 & Li, 2008; 오영열, 2004; 이종욱, 2003), 도형에 관한 연구는 부족한 실정이다(예외, 곽주철 · 류희수, 2008). 이에 본 연구에서는 초임 초등 교사들이 예상하는 평면도형에 관한 학생들의 오류와 원인, 그리고 이에 대한 지도방법을 자세히 살펴봄으로써 초임 초등 교사들의 교수학적 내용 지식을 분석하고자 하였다. 이와 같은 연구를 통해 초임 교사들을 위한 전문성 개발 프로그램에 시사점을 제공하고자 한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 교수학적 내용 지식

Shulman(1986)이 PCK의 개념을 제시한 이후 몇몇 연구자들은 PCK의 구성요소 중 특히 학생 이해에 관한 지식에 주의를 기울였다. 이러한 과정에서 학생 이해 지식이 학생의 학습 과정, 학생들의 전형적인 이해나 오류, 학생들에게 어려운 것과 쉬운 것에 관한 이해를 포함하는 개념으로서 보다 상세화 되기도 하였고(Marks, 1990) 한편으로는 학생들이 가진 공통 개념이나 사고에 관해서 아는 것(knowing that)뿐만 아니라 그렇게 된 원인을 아는 것(knowing why)까지 포함하는 지식으로 정의되기도 하였다(Tirosh, 2000). 교사들이 학생 사고에 관한 지식을 갖추는 것은 특히 학생들의 이해를 위한 수업을 위해 중요한데, 학생 사고에 관한 지식은 구체적으로 수업 중 교사들이 학생들의 오개념을 다루고, 수학 학습에 참여시키며, 학생들이 가진 수학적 개념에 기반하거나 학생들의 수학적 사고를 향상시키는 방식에 영향을 주게 된다(An et al., 2004).

최근에는 수학교육에서 학생 중심 또는 탐구 기반(inquiry-based) 수업의 필요성이 강조됨에 따라서 수업 중 학생들의 오류에 대해서 교사들이 어떻게 지도하는지를 분석함으로써 교사 지식과 학생 오류 지도와의 관계를 밝히려는 연구가 이루어졌다(Ding, 2008). 예를 들어, 학습 주제에 관한 지식이 부족한 교사는 수업 시간에 학생들의 오류를 확인하지 못할뿐더러 오개념을 형성할 기회를 만들기도 한다. 또한 교사 지식이 있다고 하더라도 서로 잘 연결되어 있지 않으면 학생들의 오류를 지도할 때 정작 유연하게 사용하지 못하기도 한다. 이에 반해 교사가 잘 연결된 지식을 가지고 있으면, 수업시간에 학생들의 오류에 민감하게 되고, 발생된 오류와 관련하여 수학의 기초 개념이나 다른 관련된 개념과 연결하면서 학생들이 더 깊은 이해를 추구할 수 있도록 도울 수 있다는 점이 밝혀졌다. 한편, 교사의 내용 지식(content knowledge)은 학생들의 오류를 확인하는 것과 어느 정도 관련이 있으나 학생 오류를 효과적으로 지도하기 위해서는 내용 지식 외에 교수학적 전략에 관한 지식(knowledge of pedagogical strategies)을 충분히 가질 필요가 있다는 주장도 제기되었다(Son & Sinclair, 2010).

이와 같은 선행 연구들은 PCK중에서 특별히 학생 이해 지식의 구성요소들이 무엇인지, 수업과 어떻게 연결되어 있는지, 더 나아가 교사 지식이 학생 오류를 지도하는 것과 어떤 관련이 있는지에 대해서 여러 가지 의미 있는 결과들을 밝혔다. 그런데 국내에서는 교사들의 수학내용 또는 지도법에 관한 지식의 실태(예, 방정숙 & Li, 2008), 교사 지식의 변화 과정(예, 남윤석 · 전평국, 2006), 교사 지식의 개념과 구성 요소를 밝히기 위한 연구(예, 박경미, 2009)들이 주로 이루어졌고, 학생 이해 또는 학생 오류에 관한 지식에 초점을 맞춘 연구는 상대적으로 부족하다.

### 2. 평면 도형의 오류와 원인

평면도형에 관한 학생 오류와 그 원인을 분석한 선행연구(노영아 · 안병곤, 2007; 방정숙 · 김상화 · 박금란, 2006; 이종영 · 장영은, 2003)를 통해 삼각형과 사각형의 개념 및 성질과 관련하여 학생들이 자주 범하는 오류를 살펴보면 다음과 같다. 학생들은 삼각형과 관련해서는

둔각삼각형이나 직각삼각형에 비해 예각삼각형과 관련된 문제에서 오류를 많이 범하였고, 특히 정삼각형이 이등변 삼각형에 포함된다는 개념을 어려워하였다. 사각형에 대해서는 교과서에 제시된 형태를 벗어난 사다리꼴과 평행사변형을 찾거나, 여러 가지 사각형 사이의 관계에 관한 문제에서 오류를 많이 범하였다. 그리고 도형의 개념에 비해 성질에 관한 문제에서 오류를 많이 범하였는데, 예를 들어 마름모는 변의 길이가 같으므로 각도 같다고 생각하거나, 평행사변형의 모든 각이 같다고 생각하기도 하였다.

한편 Bingolbali 외(2011)는 학습장애 틀(obstacles to learning framework)이 학생 오류 원인에 대한 교사들의 지식을 알아보기 위해 유용하다고 하였다. 이 틀은 교사들이 학생 오류를 어디에서 찾는지에 따라 심리학적 원인(psychological causes), 교수학적 원인(pedagogical causes), 인식론적 원인(epistemological causes)의 세 가지 범주로 구성된다. 여기서 심리학적 원인은 자신이 가르치는 학생에게서 오류 원인을 찾고 교수학적 원인은 교사와 교수에서 찾으며 인식론적 원인은 수학적 개념 자체의 어려움과 추상성에서 찾는 것이다.

이에 Bingolbali 외(2011)의 범주에 따라 선행연구(노영아·안병곤, 2007; 방정숙 외, 2006; 이종영·장영은, 2003)에서 나타난 학생들의 평면도형 오류 원인을 나누어 보면 다음과 같다. 먼저 심리학적 원인은 교사들이 학생들의 오류 원인을 다음과 같이 설명하는 경우에 해당된다. 첫째, 학생들의 잘못된 개념 이미지(concept image)가 원인이라고 설명한다. 개념 이미지란 개념과 관련하여 개인이 마음속에 가진 모든 표상과 성질, 적용을 말하는 것으로 학생들이 가진 개념 이미지는 엄밀하고 형식적인 개념 정의(concept definition)와 다를 수 있는데(Vinner, 1983), 잘못 형성된 개념 이미지를 문제 해결 과정에 활용함으로써 오류를 일으킨다는 것이다. 둘째, 학생들의 낮은 기하학적 사고 수준이 원인이라고 설명한다. 학생들은 기하 학습에 있어서 시각적 인지 수준, 분석적 인지 수준, 비형식적 연역 수준, 형식적 영역 수준, 엄밀화 수준을 거치게 되는데(Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009) 학습하는 내용에 비해 학생들의 사고 수준이 낮으면 오류를 일으킨다는 것이다. 셋째, 학생들이 도형에 대한 정의나 성질을 잘 기억하지 못하는 것이 원인이라고 설명한다. 예를 들어 사다리꼴의 정의를 제대로 알지 못하기 때문에 평행사변형이 사다리꼴이라는 것을 이해하지 못한다는 것이다. 넷째, 도형에 관련된 문제를 어려워하며 기피하는 성향이 원인이라고 설명한다.

다음으로 교수학적 원인은 교사들이 학생들의 오류 원인을 다음과 같이 설명하는 경우에 해당된다. 첫째, 교과서에서 대부분 정형화된 모양이나 위치로 도형을 제시하기 때문이다. 예를 들어 교과서에 제시된 삼각형을 보면 밑변이 대부분 아래에 오고 높이는 삼각형의 내부에 주어지게 되는데, 이로 인해 학생들은 삼각형의 외부에서 높이를 찾아야하는 경우 오류를 범하게 된다는 것이다. 둘째, 학습 주제에 관해 교사들의 SMK가 부족하기 때문이다. 교사들이 관련된 도형 개념에 대해 정확하게 이해하지 못해 수업시간에 학생들에게 오개념을 유발하는 말이나 활동을 한다는 것이다. 셋째, 도형에 관한 교사들의 PCK가 부족하기 때문이다. 예를 들어 평행사변형의 개념을 위해 평행사변형에 관한 대표적인 모양 1-2개만 제시한다거나 평행사변형을 가르치는데 있어서 분류나 조작 활동을 생략한 채 ‘약속하기’ 형태로만 개념을 일방적으로 설명한다는 것이다.

마지막으로 인식론적 원인은 교사들이 교과서의 ‘약속하기’에 나타난 평면도형 관련 용어와 수학적 정의의 차이 때문에 학생들이 오류를 범한다고 하는 경우이다. 예를 들어 교과서에서는 물체의 본을 떠 보는 활동을 바탕으로 원을 동그란 모양이라고 약속하는데 이는 한 점으로부터 같은 거리에 놓인 점들의 집합이라는 수학적 정의를 명확히 하지 않음으로써 타원이나 내부가 채워진 경우도 원이라고 생각하는 오류를 범한다는 것이다.

### 3. 평면도형의 지도

우리나라 초등학교에서의 평면도형 교수·학습은 대부분 저·중학년에서 이루어지며, 그 내용은 기본적인 평면도형의 개념과 성질을 파악하고 공간 감각의 기초를 익히는 것으로 구성되어 있다(교육과학기술부, 2009). 평면도형의 지도법은 여러 가지가 있는데 여기에서는 평면도형의 개념과 성질을 중심으로 요약한다.

Reys 외(2009)를 살펴보면, 도형의 개념에 대해서 교사들은 형식적인 정의보다는 예와 예가 아닌 것을 통해 지도하기, 실물 모델을 바탕으로 도형을 인식하게 하기, 삼각형·정사각형·직사각형과 같이 일반적인 도형의 이름을 알도록 하되 기존 용어에 새로운 어휘를 연결하기 등의 방법을 제안한다. 또한 도형의 성질에 대해서는 학생들이 사용하는 어휘와 속성의 차이점에 주목하기, 학생들이 설명하거나 정당화하는 과정을 통해 도형의 성질에 대해 깊이 있게 탐색하기 등을 강조한다. 한편, 도형을 분류하는데 있어서 삼각형은 변이나 각을 기준으로 분류하여 정의하도록 한 후, 이 두 가지 분류 방법을 한꺼번에 사용해 보는 것도 권장한다. 또한 사각형을 분류할 때는 서로 소가 아니라 포함 관계에 있으므로 우선 사각형의 다양한 성질을 찾게 하고 해당되는 성질을 탐색하게 함으로써 학생들이 사각형의 포함관계를 이해하도록 지도해야 한다고 권고한다.

Baroody 와 Coslick(1998)은 일반적으로 교사들이 도형의 이름을 암기하는데 초점을 두고 제한된 예를 통해 개념을 가르치는 지도법에 대해 문제점을 제기하면서, 도형을 지도할 때 ‘다른 수학 영역 및 교과와 통합하여 지도할 것’, ‘비형식적 기하에 초점을 둘 것’, ‘내용 지식 뿐 아니라 기하 사고의 발달에도 초점을 둘 것’을 강조했다. 그리고 특히 기하 사고 발달을 위해서 도형의 다양한 예와 예가 아닌 것을 분석하도록 하고, 최소한의 핵심적 속성으로 도형을 정의하며, 도형 사이의 관계를 발견하도록 하며, 추측과 확인·비형식적 연역추론·비형식적 증명을 강조하도록 했다.

한편 우리나라의 연구를 살펴보면 배종수(2005)는 ‘개념 정의하기’ 단계에서는 학생들이 그린 도형을 가지고 기준에 따라 분류하며 분류한 것들의 공통적인 속성을 가지고 도형을 정의하도록 하고, ‘성질 발견하기’ 단계에서는 정의를 제외하고 나타낼 수 있는 도형의 특성을 발견하도록 하였다. 또한 방정숙 외(2006)는 도형을 정의할 때는 개념을 바로 제시하지 않고 도형의 속성을 비교·분석하여 최소한의 속성을 추론하여 학생들이 스스로 정의하게 하고, 예와 예가 아닌 도형을 구분하면서 정의를 명확히 하도록 하였다. 그리고 여러 가지 구체적 조작 활동을 통해 도형의 성질을 알아보도록 하였으며, 학생들에게 도형을 비교하며 하위 분류 하기 활동과 가설을 만들고 논리적으로 토론하기 활동을 하도록 권장하였다.

이러한 지도법을 종합해 보면, 도형의 개념을 지도할 때는 형식적으로 정의하는 것, 제한된 예를 다루는 것, 도형의 이름을 암기하는 것을 지양하고, 다양한 범례를 분류하고 분류된 도형들의 최소한의 속성을 추론하여 학생 스스로 도형을 정의할 기회를 가지도록 해야 한다는 점이 공통적으로 강조됨을 알 수 있다. 또한 도형의 성질을 지도할 때는 구체적 조작 활동을 통해 학생 스스로 도형의 특징을 찾고, 설명과 정당화 과정을 거치면서 도형의 성질을 깊이 있게 탐색할 수 있는 기회를 제공하는 것이 중요하다는 점을 알 수 있다.

### Ⅲ. 연구방법 및 절차

#### 1. 연구대상

본 연구는 평면도형 오류에 관한 초임 교사들의 지식을 알아보고자 하였으며 특히 평면도형 중에서도 삼각형과 사각형의 내용에 초점을 두어 분석하였다. 이에 교직 경력 3년 이하의 초등 교사 중 삼각형과 사각형에 관한 내용을 지도해 본 경험이 있는 교사 8명을 대상으로 하였다. 한편 참여 교사들은 모두 교육대학원 초등수학교육 전공 석사 1학기 학생으로서 수학에 관심이 많았다. 그리고 참여 교사 대부분은 자신의 반 학생에 대한 애정이 있고, 어떻게 하면 수학을 잘 가르칠지에 상당한 고민을 가지고 있었으나 짧은 경력과 바쁜 업무로 인해 어려움을 겪고 있었다.

#### 2. 자료 수집 및 분석

본 연구의 자료는 교육대학원 출석 수업기간을 이용하여 설문지와 전체 토의과정을 통해 수집되었다. 우선 설문지를 사용한 이유는 전체 토의에 앞서 충분한 시간을 가지고 제시된 문항에 따라 개별적으로 학생 오류에 관한 지식을 정리해 봄으로써 자신의 지식을 스스로 검토할 기회를 제공하기 위해서였다. 설문지는 방정숙 외(2006)의 연구 중에서 삼각형과 사각형의 개념 및 성질에 대한 학생들의 오류와 원인을 조사하기 위해 개발된 문항을 수정하여 사용하였다. 이 문항은 다음과 같은 측면에서 본 연구 목적에 적합하다고 판단되었다. 첫째, 여러 가지 삼각형과 사각형의 종류를 고르게 포함하고 있어서 삼각형과 사각형의 종류에 따라 분석하기에 용이하다고 생각되었다. 둘째, 측정이나 계산 과정 없이 도형의 개념과 성질을 다루는 문제로 이루어져 있어서 도형 영역에 한정하여 분석할 수 있다고 생각되었다. 셋째, 실제 초등학생들의 오답 유형과 원인이 분석되어 있어서 본 연구의 교사들이 예상하는 학생들의 오답 유형 및 원인과 간접적으로 비교할 수 있는 가능성이 있었다.

구체적으로 설문지 문항은 <표 1>에 제시한 것과 같이 삼각형의 개념, 삼각형의 성질, 사각형의 개념, 사각형의 성질이라는 4가지 범주로 이루어져 있고 각 범주는 6개의 문항으로 구성되었다. 문제는 모두 동일한 형태의 질문으로 삼각형 또는 사각형의 종류만 바뀌어 제시되었다.

설문 과정에서는 먼저 초임 교사들에게 문항을 제시하여 각자 풀어 보게 한 다음, 자신들이 가르쳤던 학생들의 반응과 관련된 수업 장면을 떠올려 보면서 각각의 문항에 대하여 예상되는 학생들의 오류와 그러한 오류를 범하게 된 원인을 추론하여 적도록 하였다. 만약 예상되는 오류가 없을 경우는 '오류 없음'으로 표시하게 하였다. 그리고 각 범주의 마지막에는 자신이 예상한 오류 유형과 원인을 바탕으로 학생들을 효과적으로 지도하기 위한 방법을 적어 보게 하였다.

설문지 작성이 끝난 후 교사들의 지식을 보다 심도 있게 알아보기 위해 전체 토의를 실시하였다. 일반적으로 토의법은 개별면담에 비해 설문지에서 제시된 교사 응답을 하나하나 면밀히 분석하는 데는 한계가 있을 것이다. 그럼에도 불구하고 본 연구에서는 토의법을 사용하였는데, 이는 연구자가 교사교육자라기보다는 현장 교사의 입장에서 토의에 참여하여 지식을 공유함으로써 면담자를 최대한 의식하지 않는 자연스러운 상황에서 설문지와 관련하여

평면도형에 관한 학생들의 오류에 대한 초임 초등 교사들의 교수학적 내용 지식 분석

보다 진술한 응답을 얻고자 했기 때문이었다. 이에 연구자는 본격적인 토의에 앞서 현장 교사로서 겪은 수학 수업과 관련된 여러 가지 경험들을 이야기함으로써 어떤 의견과 응답도 수용되는 분위기를 형성하도록 노력하였다. 초임 교사들은 교과서 내용이나 지도 경험 등을 떠올리면서 설문지 작성 때는 미처 생각하지 못했던 것들이나 지면의 한계로 인해 자세하게 나타내지 못했던 의견들을 나누도록 안내 되었으며 토의에 참석한 교사들의 다양한 응답을 듣고 그와 관련하여 자신의 의견을 추가적으로 이야기하는 적극적인 분위기가 조성되었다. 토의는 삼각형과 사각형 주제로 나뉘어 각 2시간 남짓 이틀에 걸쳐 이루어졌으며 전 과정은 모두 녹화하여 분석을 위해 전사하였다.

<표 1> 설문지 문항의 구성

문항	평가 범주	평가 내용	예시 문항
1~6	삼각형의 개념	삼각형, 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형, 이등변삼각형, 정삼각형의 개념	1. <보기>에서 삼각형을 모두 찾아보시오. 그렇게 찾은 이유를 적어 보시오. [<보기>는 [그림 1]참조] ○ 예상되는 학생들의 오류유형      ○ 예상되는 오류 원인
7~12	삼각형의 성질	삼각형, 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형, 이등변삼각형, 정삼각형의 성질	7. 모든 삼각형에 대하여 항상 옳은 성질을 모두 찾으시오. ① 대각선의 개수는 1개이다.      ② 각의 개수는 3개이다. ③ 세 내각의 합은 $160^\circ$ 다      ④ 꼭짓점의 개수는 3개이다. ⑤ 변의 개수는 3개이다. ○ 예상되는 학생들의 오류유형      ○ 예상되는 오류 원인
1~6	사각형의 개념	사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 개념	1. <보기>에서 사각형을 모두 찾고 그렇게 찾은 이유를 적어 보시오. [<보기>는 [그림 2]참조] ○ 예상되는 학생들의 오류유형      ○ 예상되는 오류 원인
7~12	사각형의 성질	사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 성질	7. 모든 사각형에 대하여 항상 옳은 성질을 모두 찾으시오. ① 대각선의 개수는 2개이다.      ② 각과 변의 개수는 4개이다. ③ 마주보는 두 변은 평행이다.      ④ 꼭짓점의 개수는 2개이다. ⑤ 4개의 직선으로 이루어져 있다. ○ 예상되는 학생들의 오류유형      ○ 예상되는 오류 원인

수집된 자료는 세 가지 측면 즉, 초임교사들은 학생들에게 주로 나타나는 오류가 무엇인지, 그리고 그러한 오류 원인을 주로 어디에 두는지, 마지막으로 오류에 대한 지도 방법에 대해 어떻게 생각하는지를 알아보기 위해 분석하였다. 여기서는 초임 교사들이 평면도형 오류 유형과 원인에 대해서 무엇을 알고 무엇을 모르는지에 초점을 두기보다는 초임 교사들이 예상하는 학생들의 오류 및 원인과 지도법에서 드러나는 특징을 찾는데 중점을 두었다.

분석 과정은 크게 설문지에 대한 분석과 토의 내용에 대한 분석으로 나뉘었다. 먼저 설문지는 초임 교사들이 생각하는 경향을 파악하기 위한 것으로 응답에서 드러나는 공통적인 내용을 코드화 하여 분석하였으며 코드는 다음과 같은 과정을 거쳐 설정되었다. 첫째, 설문지에 나타난 모든 응답을 문항 별로 정리하였다. 둘째, 각 응답들을 차례로 서로 비교하면서 어떤 일정 수의 범주로 분류하였다. 예를 들어 첫 번째 응답인 ‘마름모의 정확한 개념을 모르기 때문에’ 라는 응답에 대해 ‘E1, 개념 이해 부족’으로 코드를 설정하고 이후의 응답을 살펴보면 같은 의미이면 E1을 표시하고, 전혀 다른 의미이면 새로운 코드를 설정하였다. 셋째, 코드가 모두 설정된 후 다시 유사한 개념의 코드는 하나로 표시하여 코드 간 중복되는 경우가 없도록 하였다. 더불어 코드의 수가 너무 많지 않도록 하였다. 넷째 수정된 코드로

처음부터 다시 응답을 분석하여 코드화하였다. 최종 코드는 연구자 외 수학교육 전문가 2인의 검토를 거쳐 수차례 수정되어 <표 2>와 같이 결정되었다. 이 때 하나의 응답에 2가지 이상의 내용이 포함되어 있을 경우는 해당 코드를 모두 부여하여 분석하였다. 다음으로 토의 내용에 대한 분석은 설문지의 응답을 뒷받침하고 자세한 내용을 보충하기 위해 이루어졌으며 오류나 원인보다는 지도법에 초점을 두어 분석하였다.

<표 2> 평면도형 오류 원인과 지도법에 대한 코드

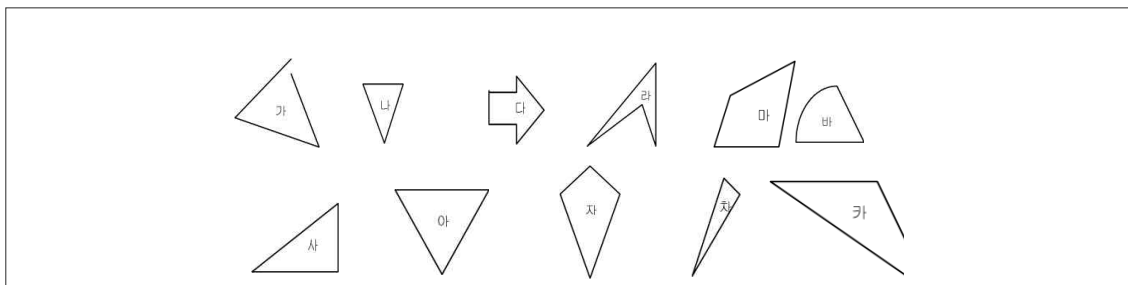
코드	오류 원인	코드	지도법
E1	개념 이해 부족	T1	명확한 설명과 반복
E2	대표적인 경우의 일반화	T2	다양한 범례 제시
E3	도형의 관계에 대한 이해 부족	T3	분류 활동
E4	시각적 판단	T4	그리기, 만들기 활동
E5	다른 개념과의 혼동	T5	개념 탐구 활동
E6	해당되는 부분(용어)에 고착	기타	기타
P	교과서의 제시 형태의 영향		
기타	위의 코드 외 응답		

#### IV. 연구 결과

##### 1. 평면도형 오류에 관한 초임 교사의 교수학적 내용 지식

###### 1) 삼각형에 관한 오류

삼각형에 관한 문제는 크게 개념에 대한 문제와 성질에 대한 문제로 나뉜다. [그림 1]은 삼각형 개념 문제의 보기이며, <표 3>은 삼각형 문제에 대해 초임 교사 8명 중 3명 이상<sup>4)</sup>이 예상한 응답을 나타낸 것이다.



[그림 1] 삼각형 개념 문제의 <보기> (문제 1~6)

4) 8명 중 4명(50%) 이상의 응답에 대해서만 표에 제시하고자 하였으나 분석 과정에서 3명의 교사가 동일하게 응답한 오류가 비교적 많았고, 4명 이상의 응답만 나타낼 경우 누락되는 문항이 있어 3명 이상의 교사들이 예상한 응답을 나타냄.



<표 3> 여러 가지 삼각형에 관해 초임 교사들이 예상하는 학생들의 오답

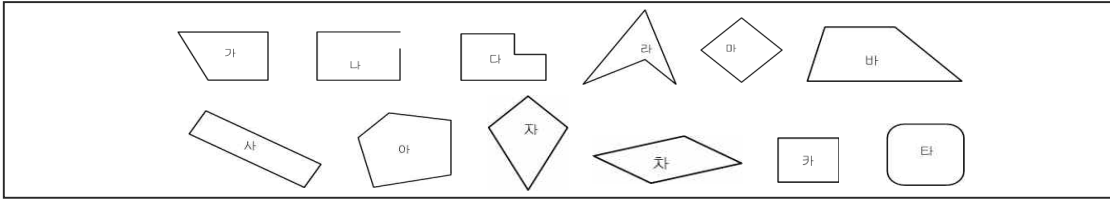
삼각형 개념 문제		예상 학생 오답	인원	삼각형 성질 문제	예상 학생 오답	인원	
1	삼각형을 모두 찾으시오	가	6	7	삼각형 성질에 대해 옳은 것	① 대각선의 개수는 1개이다.	6
		라	3			③ 세 내각의 합은 $160^\circ$ 이다.	3
		바	3			④ 두 변의 길이가 같다.	5
2	직각삼각형을 모두 찾으시오	오답없음	5	8	둔각삼각형에 대해 옳은 것	⑤ 두 각의 크기가 같다.	5
3	예각삼각형을 모두 찾으시오	차	3	9	직각삼각형에 대해 옳은 것	③ 두 변의 길이가 같다.	6
		라	3			② 2개의 각이 직각이다.	3
4	둔각삼각형을 모두 찾으시오	오답없음	3	10	이등변삼각형에 대해 옳은 것	① 세 변의 길이가 같다.	6
5	이등변삼각형을 모두 찾으시오	바	4			③ 세 각의 크기가 같다.	4
		아(누락)	3	11	정삼각형에 대해 옳은 것	③ 크기가 다르면 모양도 달라진다.	4
6	정삼각형을 모두 찾으시오	오답없음	4	12	예각삼각형에 대해 옳은 것	① 1개의 각이 예각이다.	5
						⑤ 세 각의 크기가 모두 다르다.	3

<표 3>의 문제 1번에서 6번까지는 <보기>에서 해당되는 삼각형을 모두 찾으라는 형태의 문제로 초임 교사들이 예상한 오류를 살펴보면 삼각형, 예각삼각형, 이등변삼각형의 개념에 대해서는 8명 모두가 오답을 예상하였으나 직각삼각형, 둔각삼각형, 정삼각형에 대해서는 오류가 없을 것이라고 예상한 경우가 많아 초임교사들은 삼각형의 종류에 따라 학생들이 겪는 어려움이 다르다고 생각하는 것으로 드러났다. 또한 ‘오답없음’을 예상하는 초임교사 비율은 직각삼각형, 정삼각형, 둔각삼각형 순으로 나타나 학생들이 이와 같은 순서로 어려움을 덜 겪는다고 생각하였다. 토의 과정에서는 정삼각형과 둔각삼각형은 4학년 때 배우게 되는데 직각삼각형은 3학년 때부터 배움으로써 학생들이 가장 익숙해 하는 개념이며, 정삼각형은 모두 닮은꼴이라서 잘 찾을 것이라고 하였다. 그리고 둔각삼각형에 대해 따로 언급은 없었지만 예각삼각형은 세 각이 모두 예각인데 비해 둔각 삼각형은 한 각만 둔각인지 확인하면 되기 때문에 다소 쉽다고 생각한 것으로 추측해 볼 수 있다.

<표 3>의 7번에서 12번까지는 삼각형 성질에 대해 옳은 설명을 모두 찾으라는 형태의 문제인데, 초임 교사들은 모든 문항에서 오류를 예상하였다. 삼각형의 개념과 관련된 문항에서는 직각삼각형, 둔각삼각형, 정삼각형에 대해서 오류가 없을 것이라고 예상한 점을 감안해보면, 초임 교사들은 삼각형 개념에 비해 삼각형의 성질에 관해 학생들이 어려움을 많이 느낀다고 생각했다. 한편 다른 삼각형에 비해 정삼각형의 성질에 관한 문제에서는 예상 오답이 하나밖에 없는 것으로 보아서 삼각형의 개념에서와 유사하게 삼각형의 성질에서도 정삼각형에 대해서는 학생들이 오류를 잘 범하지 않을 것이라고 예상하였다.

## 2) 사각형에 관한 오류

사각형 개념에 관한 학생 오류를 알아보기 위한 문항의 보기는 [그림 2]와 같으며, 학생 오류에 대한 초임 교사들의 예상은 <표 4>와 같다. 삼각형의 개념에서와 마찬가지로 3명 이상의 응답만 요약하였다.



[그림 2] 사각형 개념 문제의 <보기> (문제 1~6)

<표 4> 여러 가지 사각형에 관해 초임 교사들이 예상하는 오답

사각형 개념 문제	예상 학생 오답	인원	사각형 성질 문제	예상 학생 오답	인원
1 사각형을 모두 찾으시오	타	4	7 모든 사각형에 대해 항상 옳은 것	⑤ 4개의 직선으로 이루어져있다.	6
	라(누락)	3		③ 마주 보는 두 변은 평행하다.	5
2 사다리꼴을 모두 찾으시오	사, 차, 카, 마 (누락)	4	8 정사각형에 대해 옳은 것	⑤ 대각선의 길이는 서로 다르다.	3
3 평행사변형을 모두 찾으시오	사, 카, 마 (누락)	7		① 대각선은 서로 수직이다.	3
4 직사각형을 모두 찾으시오	카(누락)	5	9 직사각형에 대해 옳은 것	④ 대각선의 길이가 서로 다르다.	4
	나	3		③ 한 쌍의 마주보는 변이 평행하다.	3
5 미름모를 모두 찾으시오	자	4	10 사다리꼴에 대해 옳은 것	⑤ 두 밑각의 크기가 같다.	7
	카(누락)	3		② 대각선의 길이가 같다.	6
				① 한 쌍의 마주보는 변의 길이가 같다.	5
6 장사각형을 모두 찾으시오	마(누락)	4	11 평행사변형에 대해 옳은 것	③ 네 변의 길이가 모두 같다.	5
			12 미름모에 대해 옳은 것	① 네 각이 모두 같다.	4
				④ 두 쌍의 마주보는 변이 평행하다.	3

<표 4>를 살펴보면, 초임 교사들은 해당되는 사각형을 누락시켜서 오류를 범하는 경우를 가장 많이 예상하였는데, 이는 학생들이 해당되는 사각형의 대표적인 형태만 선택하고 정의에 의해서 판단하지 않아 범하는 오류를 예상한 것으로 보인다. 초임 교사들은 사각형 성질에 관한 모든 문제에 대해 오류를 예상하였으며 원인도 다양하게 제시하였다. 삼각형과 마찬가지로 사각형에서도 개념보다는 성질에 대해 학생들이 더욱 어려움을 느낄 것이라고 예상하였다. 하지만 초임 교사들은 제시된 문제에 대해 학생들의 오류와 원인을 예상하기 전까지 도형의 성질에 대해서 학생들이 특별히 어려워할 것이라고 생각하지 않았다. 이는 교사 입장에서 쉽게 이해되는 내용이므로 개념을 지도하는 과정에서 학생들이 자연스럽게 이해할 것이라고 생각하였기 때문인데 이에 대한 초임교사의 전형적인 반응은 다음과 같다.

UY교사: 그거(도형의 성질) 같은 경우에는 제가 알고 있어서 그런지 애들이 왜 어려워하지 하는 생각을(못했어요) ... 이거 당연한 건데 애들한테도 당연하지 그리고 그냥 넘어 가는 경향이 있어요. 그래서 개념은 좀 더 많이 설명을 하고 성질은 당연하기 때문에 설명을 할 필요가 없다고 생각해서.. 왜 그러냐고 애들이 물으면, 이거 당연한 건데 왜 나왔니 그러면서 그냥 넘어가고 그런 경우가 많았더라고요.

## 2. 평면도형의 오류 원인에 관한 초임 교사의 교수학적 내용 지식

초임 교사들은 설문지에 제시된 문제를 보고 학생들의 오답을 예상하면서 그에 따른 원인도 함께 예상하였는데, 같은 오답에 대해서도 원인은 다양하게 나타났다. 여기에서는 초임 교사들이 생각하는 오류 원인에 대한 전체적인 특징을 살펴보기 위해 설문지에서 나타난 8명 초임교사들의 응답을 코드화 하여 영역별로 <표 5>에 제시하였다.

<표 5> 초임 교사들이 예상하는 평면도형의 오류 원인

오류 원인 \ 내용	삼각형 개념	삼각형 성질	사각형 개념	사각형 성질	계
E1 개념 이해 부족	11	18	9	15	53
E2 대표적인 경우의 일반화	0	13	6	32	51
E3 도형의 관계에 대한 이해 부족	1	11	18	5	35
E4 시각적 판단	14	0	18	1	33
E5 다른 개념과의 혼동	0	10	0	12	22
E6 해당되는 부분(용어)에 고착	13	1	1	2	17
P 교과서의 제시 형태의 영향	0	1	4	0	5
기타	2	4	0	1	7

<표 5>를 살펴보면, 초임 교사들은 평면도형의 오류 원인으로 개념 이해 부족(E1), 대표적인 경우의 일반화(E2), 도형 관계에 대한 이해 부족(E3), 시각적 판단(E4), 다른 개념과의 혼동(E5), 해당되는 용어에 대한 고착(E6), 교과서의 제시 형태의 영향(P) 순으로 많이 예상하였다. 하지만 이는 문제의 내용에 따라서 다소 다르게 나타났는데, 예를 들어 삼각형의 개념에서는 오류의 원인으로 시각적 판단(E4)을 가장 많이 예상했으나 삼각형의 성질에서는 개념 이해 부족(E1)을 가장 많이 예상했다. 그리고 평면도형의 개념에 비해 성질에서 응답수가 많았는데 이는 도형의 성질을 묻는 문제에서는 오답을 2개 이상 고르고 그 원인을 각각 예상하도록 하였기 때문이다. 다음으로 이러한 설문지의 응답을 바탕으로 토의에서 드러나는 특징을 상세하게 분석하였는데, 토의 과정에서 시각적 판단(E4), 해당되는 부분(용어)에 고착(E6)에 관한 설명은 나타나지 않아 나머지 오류 원인에 대해서만 분석하였다.

### 1) 도형의 개념 이해 부족(E1)

설문지에서 가장 자주 언급된 평면도형 오류의 원인은 ‘도형 개념에 대한 이해 부족’이었는데 이 오류 원인은 토의 과정에서 크게 두 가지 형태로 나타났다. 우선 학생들이 도형의 정의에 사용된 용어나 선행 개념을 이해하지 못함으로써 도형의 개념을 정확하게 이해하지 못했기 때문에 오류를 범한다는 것이다. 예를 들어 삼각형의 정의를 말할 수는 있으나 ‘둘러싸인’의 의미를 몰라서 한 변이 끊어져 있는데도 불구하고 삼각형으로 선택한다는 것이다. 다음으로 도형의 개념이나 성질을 외우지 않거나 몰라서 오류를 범하는 경우다. 예를 들어 정사각형이나 마름모의 성질을 외우지 않아서 잘못된 성질을 선택한다고 답하는 경우다. 특히 초임 교사들은 학생들이 잘 외우지 않는다는 원인에 대해서 강조하여 이야기하였으며, <에피소드 1>에서와 같이 학생들이 이전의 중요한 내용을 암기하지 않음으로써 교사가 활동을 통해 개념을 가르치고자 하여도 그 활동이 의미가 없어진다고 어려움을 토로하였다.

<에피소드 1 : 내용을 기억하지 않는 오류 원인 >

HJ교사 : (삼각형의 내각의 합이 180°라는 것과 관련하여) 책에 친절하게 활동 자료에 삼각형 잘라가 지고 직선 만드는 거 있잖아요. 그게 나오거든요? 그걸 해도 모르더라고요. 직선이 180°라는 것을 모르는 상태에서 갖다 붙여 봤자 아이들은 모르더라고요. 모르는 애들은... 백 몇 도라는 것은 알아요. 정확하게 180°라는 건 몰라도.

연구자 : 직선이 180°라는 걸 애들이 모른다고요?

HJ교사 : 네.. 모르는 애들은 몰라요. 그 활동도 (180°를) 아는 애들만 답을 알 수 있는 거지, 그 활동을 해 가지고 직선이 180°라는 것을 모르면 삼각형에서는 (각을) 갖다 붙이면 (직선과) 같구나만 알지, 그걸(180°라는 걸) 모르더라고요. 공부 안하는 애들은 주로 안 외우는 버릇이 있어 가지고 그거 자체도 잘 모르는 것 같더라고요.

<에피소드 1>에서 나타나듯이 교사들은 활동을 통해 삼각형의 내각의 합을 가르치려고 하더라도, 학생들이 평각이 180°라는 것을 외우지 않고 있으므로 수업 시간에 다양한 활동을 하는 것이 삼각형의 내각의 합이 180°라는 개념과는 연결이 되지 않는다고 하였다. 따라서 다양한 활동을 통해 개념을 이해한다고 하더라도 이해한 후에는 반드시 암기하는 과정이 필요하다고 하였다. 그리고 수학적으로 부진한 학생의 경우에는 활동을 통해 개념을 이해하도록 지도하기는 어렵기 때문에 중요한 개념을 따로 외우라고 지도하지만 부진한 학생일수록 외우지 않는 경향이 더욱 강하여 지도가 어렵다고 하였다.

2) 대표적인 경우의 일반화(E2)

다음으로 초임교사들이 많이 생각하는 오류 원인은 ‘해당되는 도형의 대표적인 경우를 일반화시키기 때문’이었다. 특히 이 오류 원인의 경우 평면도형의 성질에 대한 문제에 관한 오류 원인으로써 많이 나타났다. 예를 들어, 둔각 삼각형의 경우 학생들이 둔각이등변삼각형의 경우만 떠올리기 때문에 “두 변의 길이가 같다.”, “두 각의 크기가 같다.”는 것을 둔각삼각형의 성질로 생각하고, 사다리꼴의 경우 등변사다리꼴만 생각하여 “대각선의 길이가 같다.”, “두 밑각의 크기가 같다.”, “한 쌍의 마주보는 변의 길이가 같다.”를 사다리꼴의 일반적인 성질로 고르는 오류를 범한다고 하였다.

그런데 몇 명의 교사들은 학생들이 대표적인 경우만 생각하게 된 보다 근본적인 원인에 대해서 설명하였다. 즉 교과서에서 도형의 개념을 제시할 때나 관련된 문제의 보기로서 다양한 형태의 도형을 제시하지 않기 때문에 학생들이 교과서에 나오는 전형적인 경우만 생각한다는 것이다. 그러나 대부분의 교사들은 교과서나 교사의 지도법에 대해 언급하지 않았으며 학생들에게서 오류 원인을 찾았다.

3) 도형 관계에 대한 이해 부족(E3)

설문지에 나타난 초임 교사들의 응답을 살펴보면 ‘도형 관계에 대한 이해가 부족하기 때문’이라는 오류 원인은 사각형 개념에 관한 문제에서 가장 많이 나타났다. 한편 토의 중에는 교사들이 이 원인에 대해서 좀 더 구체적으로 설명하였는데, 대부분의 학생들이 직사각형을 고르라는 문제에서 정사각형을 누락시키고, 평행사변형을 고르라는 문제에서 정사각형과 직사각형, 마름모를 모두 누락시켜 답하며 사각형의 성질에 관한 문제에서도 마찬가지로 포함

되는 성질을 모두 선택하지 못하고 누락시켜 오류를 범하는데 이러한 원인이 사각형의 포함 관계를 이해하지 못하기 때문이라는 것이다.

사각형과 마찬가지로 삼각형에서도 학생들은 포함관계를 매우 어렵하다고 하였다. 다음과 같이 각을 기준으로 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형으로 나누는 것은 세 가지 형태로 분명하게 나뉘므로 어려워하지 않으나 변을 기준으로 나누는 경우 정삼각형이 이등변삼각형에 포함이 되므로 특히 더 어려움을 느낀다는 것이다. 또한 학생들은 포함관계 이외에도 하나의 도형이 두 가지 개념을 동시에 가지고 있는 경우를 특히 어렵하다고 했는데, 예를 들어 직각이등변삼각형처럼 각을 기준으로 하면 직각삼각형이 되고 변을 기준으로 하면 이등변삼각형이 되는 경우 학생들은 쉽게 이해하기 못한다는 것이다. 이처럼 초임 교사들은 교수 경험을 통해 학생들이 포함관계를 특히 어렵하다는 것을 알게 된 만큼 확신에 찬 목소리로 설명하였다. 하지만 포함관계를 어려워하는 이유로는 교사가 여러 번 설명해도 학생들이 잊어버리기 때문이라고 하여 학생들의 발달 단계나 교수법의 원인보다는 학생들이 기억하지 않는다는 데서 주로 원인을 찾았다. 다음은 학생들이 삼각형의 관계에 대한 이해 부족으로 인해 오류를 범한다는 설명의 예이다.

HJ교사 : 제가 지금 가르치는데, …… 삼각형 여러 개를 주고 분류하는 게 수행평가였거든요. 애들이 예각하고 둔각은 다 맞았어요. 그런데 뭐를 많이 틀리냐하면 ‘이등변삼각형을 찾으시오’ 할 때 정삼각형을 빼고 찾은 애들이 되게 많았거든요. …… 분류 기준이 정확하잖아요. 예각하고 둔각은. 이등변하고 정삼각형은 찾을 때 이등변삼각형은 딱 정삼각형은 딱 두 삼각형이 [나뉘지 않고 포함되기 때문에] 이등변 삼각형이 정삼각형에 들어간다고 수업시간에 누누이 말했음에도 불구하고 애들이 좀 지나고 했더니 다 까먹어 가지고 그렇게 했던 거예요.

#### 4) 다른 개념과의 혼동(E5)

설문지에서 ‘학생들이 다른 개념과 혼동하여’ 오류를 범한다는 응답은 삼각형과 사각형의 성질에 대한 문제에서만 나타났다. 구체적으로 ‘대각선과 수선을 혼동하여’ 삼각형에 대각선이 1개 있다고 생각하거나, ‘변과 각을 혼동하거나’ 또는 ‘정사각형과 마름모를 혼동하여’ 마름모의 네 각이 모두 같다고 생각하는 오류를 범한다고 하였다. 한편 이와 관련하여 토의 과정에서는 학생들이 교과서에 제시된 약속하기 형태의 정의를 잘 이해하지만 여러 가지 개념이 동시에 제시되는 문제를 푸는 경우 이를 해결하면서 개념과 개념을 혼동하기 때문에 오류를 많이 일으킨다고 하였다. 게다가 이는 교사의 지도에 문제가 있기 보다는 여러 가지 개념이 동시에 제시되면 혼동을 일으키는 학생들의 성향 때문이므로 수업시간에 교사가 따로 지도하기보다는 학생들에게 관련된 내용의 문제를 많이 풀도록 함으로써 스스로 깨닫도록 해야 한다고 하였다.

### 3. 평면도형 지도법에 관한 초임 교사의 교수학적 내용 지식

초임 교사들은 평면도형에 관한 학생 오류의 지도법에 관하여 설문지에서는 간단하게 응답하였으나 토의 과정에서 보다 다양한 의견을 나누었으며 설문지 응답을 분석하여 <표 6>에 제시하였다.

<표 6> 평면도형 오류에 대한 지도법

지도법 \ 내용	삼각형 개념	삼각형 성질	사각형 개념	사각형 성질	계
T1 명확한 설명과 반복	9	4	4	5	22
T2 다양한 범례 제시	6	4	5	3	18
T3 분류 활동	3	2	3	1	9
T4 그리기, 만들기 활동	0	1	2	2	5
T5 개념 탐구 활동	1	1	1	3	6
기타	1	0	5	2	8

<표 6>을 살펴보면 평면도형 오류의 지도법에 관한 응답은 명확한 설명과 반복(T1), 다양한 범례 제시(T2), 분류 활동(T3), 개념 탐구 활동(T5), 그리기 만들기 활동(T4) 순이었으며 삼각형(사각형)의 개념과 성질에 관한 지도법이 크게 구분되게 나타나지는 않았다. 따라서 평면도형의 개념과 성질을 구분하지 않고 평면도형 오류에 대한 지도법의 특징을 알아보았으며 여기에서는 설문지의 응답을 바탕으로 토의 내용에서 드러나는 특징에 좀 더 초점을 맞추어 상세하게 분석하였다.

### 1) 교사의 명확한 설명과 반복(T1)

초임 교사들은 학생들의 오류에 대한 평면도형 지도법을 설명하면서 몇 가지 특징이 드러났는데, 그 중 하나가 교사의 명확한 설명이었다. 즉 교사들이 학생들에게 도형의 개념이나 성질 또는 포함관계에 대해서 명확하게 설명함으로써 학생들이 이해하고 기억하도록 해야 한다는 것이었다. 설문지의 응답을 살펴보면 초임 교사들은 학생들에게 도형의 개념이나 성질을 설명해준다거나 잊어버리지 않도록 다시 상기시킨다는 설명을 자주 했으며, 도형들 간의 관계에 대해서는 이해하기 쉽게 벤다이어그램을 가지고 설명한다고 하였다. 다음은 설문지에서 나타난 응답 중 일부분이다.

- 도형의 정의에 대해 잘 가르쳐 주고 다시 상기시킨다.
- 사각형의 종류의 정의와 성질을 학습한 후, 중학교에서 배우지만 벤다이어그램을 그려서 사각형의 관계를 파악하게 한다.

이러한 지도법은 토의 과정에서 보다 구체적으로 나타났다. 초임 교사들은 학생 오류의 원인으로 도형의 포함관계에 대한 이해 부족과 도형의 개념과 성질의 혼동을 주로 들었으며, 이러한 오류를 범하지 않기 위해서는 학생들이 도형의 개념, 성질, 포함관계를 잘 기억해야 한다고 강조하였다. <에피소드 2>는 교사의 명확한 설명이 학생들의 오류를 막는데 효과적이라는 초임교사들의 응답에 관한 것이다.

#### <에피소드 2 : 명확한 설명을 통한 지도>

MJ교사 : 삼각형은 아이들이 4학년 때 다 배웠던 건데 잊어버리고. 이등변삼각형 찾는데 정삼각형 빼고 찾고. 사각형도 직사각형 찾는데 정사각형 빼고 찾고. 너무 잘 모르는 거예요. 너무 답답

해서~ 중학교 때 하던 식으로 (웃으며) 벤다이어그램으로 그래서 좀 기억 좀 하라고. 그랬는데도 잘하는 아이들은 잘 하지만, 애들이 6학년인데도 포함관계를 잘 이해를 못하는 것 같아요. 그러니깐 6학년 되서도 잘 이해를 못하는데. 지금 4학년이 이 과정이 나오면 4학년은 얼마나 헛갈리겠어요? (웃음) 그래도 계속 반복해서 하다보니까 나중에는 잘 찾더라구요. 포함관계도 나중에는 계속 이야기 해 주고 벤다이어그램으로 그려주고 다양한 예 같은 것도 보여 주고 그러니깐 처음 보다는 확실히 잘 찾는 것 같더라구요.

JY교사 : 저도 사실 그렇게 가르치거든요(웃음). 5학년 애들한테 관계가 되게 잘 설명되어 있어요. 순서대로 화살표 방향으로 이렇게 그걸 보여주고 일기장에 이렇게 적게 하고 그런 식으로 했는데 사실 그렇게 하면 안 된다고 생각하실까봐 아무 말도 안하고 있었어요. 그런데 그것도 되게 좋은 방법 중에 하나인 것 같아요. 그리고 정의하고 성질이 되게 헛갈리잖아요. 기본적인 것을 딱 정식으로 제시했을 때 아이들이 조금 덜 헛갈리는 것 같긴 해요. 만약에 뭐라 뭐라 하면 ‘야.. 일기장 펴봐. 선생님이 뭐라고 적었어’ 그러면 애들이 막 넘겨서 보고 ‘아 이거요’ 막 이렇게 하더라고요. 그렇게 아예 모든 수준의 정의와 성질을 정리해서 제시해 주는 것도 나쁘지 않은 것 같았어요.

MJ교사 : 저는 근데, 필요충분관계 있잖아요? 정사각형이 직사각형이다. 직사각형이 정사각형이다. 이런 문제가 나오면 [학생들이] 잘 못하거든요. 그래서 그냥 화살표로 ‘왼쪽에서 오른쪽으로 갈 수 있는데 오른쪽에서 왼쪽으로 올 수는 없다’라고 이렇게 지도를 하는데. 잘 모르는 것 같기도 하고 이해가 안 되면 외우기라도 해라라고 해요. 외우고 이해는 나중에 고등학교 때 가서 하는 거죠(웃음).

<에피소드 2>에서 나타나듯이 두 교사는 학생들이 오류를 범하지 않기 위해서 학생들이 학습 내용을 잘 기억하는 것이 필요한데 이를 위한 효과적인 교수법은 교사의 명확한 설명이라고 생각했다. 이에 교사 자신들이 중학교 때 배웠던 벤다이어그램과 필요충분조건을 활용하였는데, 이러한 방법은 학생의 입장보다는 교사의 입장에서 효과적인 방법이라 할 수 있다. 교사들이 이와 같은 방법을 사용한 원인을 분명하게 알 수는 없으나 교수 경험을 통해 학생들이 어려워하는지 내용에 대해서는 알지만 이에 대한 분명한 원인과 적절한 지도법은 알지 못하기 때문에 교사 입장에서 가장 효율적인 방법으로 지도한 것으로 생각된다. 그리고 교사들은 시간이 지남에 따라서 학생들이 내용을 잊어버리지 않도록 하는 것이 필요하다고 생각했는데 이를 위해 학생들에게 설명한 내용을 수시로 반복하여 다시 설명하거나 중요한 내용을 일기장에 적고 확인하면서 외우도록 하였다. MJ교사의 설명에서 드러나듯이 학생들에게 개념을 이해시키기 보다는 내용을 외우는 것이 오류를 범하지 않도록 하기 위한 효과적인 방법이라고 생각했다.

그런데 초임교사들은 학생들의 오류를 범하지 않도록 하기 위해 명확한 설명과 반복이 필요하다는 것에는 어느 정도 동의하는 듯 보였으나 중학교에서 나오는 개념을 가지고 초등학생들에게 설명하는 것에 대해서는 의견이 조금씩 달랐다. <에피소드 3>은 사각형 개념을 지도하기 위해 벤다이어그램을 사용하는 것에 대한 논의의 일부이다.

<에피소드 3 : 벤다이어그램을 통한 지도>

JY교사 : 벤다이어그램이 굉장히 좋은 방법이라고 해서(그냥 사용하는 것이 효과적인지 모르겠어요) 계속 사용하면 모르겠지만요. 이거 한 번 가르치기 위해서 벤다이어그램을 했는데요. 애들이 이게(범위가) 크니까 제일 뭐가 있어야 할 것 같은 거 있잖아요. 안으로 왜 정사각형이 들어오는지에 대한 인식이 없어요. 정사각형은 이것도 되고 이것도 되는데 왜 가장 조그맣게 그려야 하는지 막 헛갈리기 시작하는 거예요. 그때 이게 모를 수도 있구나라는 걸 알게 되었어요.

(중략)

SM교사 : 처음에는 잘 이해를 못했는데 세 번 네 번 설명하니깐 이해를 하는 것 같았어요.

UY교사 : 중1에서 처음 배우는 게 집합이잖아요. 학원 같은 데서 중1과정을 다루니깐. 학생들이 알더라구요. 잘 이해하던데.

(중략)

HJ교사 : 이해를 시키기 위해서 벤다이어그램을 하는 건데, 반복을 하면서 이해를 시킨다는 것은 벤다이어그램 자체를 따로 시킨다는 거잖아요. 학생들의 학습량이 증가하는 것 같은데, 그건 아이들에게 별로 좋지 않은 것 같아요.

UY교사 : 저는 사용을 했는데, 애들의 이해도는 측정하지 않았던 것 같아요. 내가 이해하니깐 아이들도 이해하겠지 생각을 하고 그냥 사용했던 것 같아요. 애들도 그냥 별 말없이 이해했는지 어땠는지는 잘 모르겠는데. 상당히 어려운 부분이긴 해요.

논의가 거듭 되면서 몇 명의 초임교사들은 벤다이어그램을 통해 도형의 포함관계를 이해시키는 것이 바람직하지 않다는 것에 대해 지도 경험을 통해 구체적인 근거를 들었다. 즉 벤다이어그램을 가지고 도형의 포함관계를 나타내는 것이 교사들에게는 당연해 보일 수도 있으나 벤다이어그램을 처음 접하는 초등학생들에게는 익숙하지 않은 표현임으로 오히려 오개념을 일으킬 수 있으며, 이해한다고 하더라도 소수의 학생들이었다고 하였다. 또한 포함관계를 나타내기 위해 벤다이어그램에 대해서 설명하는 것은 학생들에게 학습량을 더욱 증가시킬 수 있다고 하였다.

반면 벤다이어그램이 효과적이라고 주장하며 근거를 드는 초임교사들도 있었다. 즉 처음에는 어려울 수 있으나 교사가 반복해서 사용하면 나중에는 학생들이 이해하였으며, 대부분의 학원에서 선행해서 배웠기 때문에 6학년 학생들이 이해하는 데는 큰 무리가 없었다는 것이었다. 하지만 한 초임교사가 학생들이 이해했는지 그렇지 않았는지에 대해서는 교사가 확인하지 않았으며 오히려 교사 입장에서 이해가 쉬웠기 때문에 학생들도 당연히 그럴 것이라고 생각하였다고 하여, 토의에 참여한 교사들이 다시 한 번 자신의 지도법에 대해서 반성하는 계기가 되었다.

## 2) 다양한 범례 제시(T2)

지도법에 대한 설문지 응답에서 범례 제시에 대한 설명이 비교적 자주 언급되었다. 범례를 제시하는 이유는 도형의 개념을 정확하게 지도하기 위해서라고 설명하였다. 초임 교사들은 수업 시간에 다양한 정례와 비례의 제시를 통해 도형의 개념을 도입하고, 개념을 정의한 후에도 다양한 범례를 제시함으로써 학생들이 제한된 개념 이미지를 방지해야 한다고 하였다. 그리고 특히 오개념을 유발할 수 있는 예를 수업시간에 의도적으로 제시하여 학생들의 오개념을 예방해야 한다고 하였으며, 다양한 범례 제시를 통해 삼각형 또는 사각형의 포함관계를 지도한다고 하였다. 다음은 범례 제시와 관련하여 설문지에 제시된 교사의 응답 중 일부이다.

- 정례와 비례를 제시하여 개념을 명확히 하며, 도형의 포함관계를 지도한다.
- 아이들이 오개념이 있을 수 있는 비례도 제시한다.



범례 제시에 대한 설문지 응답에 비해 토의 과정에서는 범례 지도에 대한 설명이 많지 않았다. 토의 과정에서 초임 교사들은 다양한 범례 제시에 대한 구체적인 방법이나 효과 보다는 교과서에서 다양한 범례를 다루지 않는 것에 대한 문제점과 다양한 범례 제시에도 불구하고 제한된 이미지를 가지는 학생들의 문제점에 대해서 이야기 하였으며, 다양한 범례를 제시하는 것이 매우 중요하다는 것은 이해하지만 어떻게 어느 정도 제시하는지 효과적인지에 대한 고민을 드러내었다.

### 3) 분류, 그리기와 만들기, 탐구 활동(T3, T4, T5)

설문지에 나타난 교사들의 응답을 살펴보면, 분류 활동(T3), 그리기와 만들기 활동(T4), 탐구 활동(T5)은 평면도형 오류를 위한 지도법으로 제시되었지만 교사의 설명과 반복(T1)과 범례 제시(T2)에 비해 자주 언급되지는 않았다. 다음은 설문지에서 나타난 응답 중 일부 분이다.

- 여러 종류의 삼각형을 펼쳐 놓고 관점(각도, 변의 길이)에 따라서 삼각형을 분류하는 활동을 통해 삼각형을 학습한다.
- 아동이 직접 도형을 만들며 설명할 수 있도록 한다.

한편 설문지와는 다르게 토의 과정에서는 탐구 활동(T5)에 관한 구체적인 언급이 없었는데, 이는 초임 교사들이 도형을 학습하는데 있어서 활동을 통해 학생들이 개념을 스스로 탐구하도록 해야 한다는 것을 예비교사 교육이나 초임교사 연수 프로그램을 통해 이해하고는 있으나 교수 경험을 통해 실질적으로 어떻게 해야 하는지 알지 못하기 때문이라 생각된다. 게다가 분류하기, 그리기 및 만들기와 같은 조작 활동(T3, T4)에 관해서 초임 교사들은 수업 시간에 겪는 어려움을 주로 이야기 하였고 그에 대한 구체적인 내용은 다음과 같다. 첫째, 조작활동을 위해 비싼 교구의 구입이 어렵다는 것이었다. 일정한 학교 예산 안에서 시골의 소수 학생들을 대상으로 교구를 구입하는 것은 가능하나 규모가 큰 학교에서 비싼 교구를 구입하는 것은 어렵다고 하였다. 둘째, 학생 관리가 어렵다는 것이었다. 교사가 조작 활동에 필요한 색종이나 가위, 풀과 같은 교구를 나누어 주면 찢거나 장난을 치는 학생들 때문에 수업에 집중을 하지 못하여 오히려 교사가 설명하는 수업 보다 효과가 떨어진다는 것이다. 셋째, 시간이 부족하다는 것이었다. 학생들의 훈련이 잘 되어있지 않으면 40분 내에 학생들과 조작 활동을 하고 정리하고 익히기 문제까지 하려면 시간이 늘 부족하다는 것이다. 이 외에도 교사들은 “학교에 교구가 비치되어 있어도 수업시간에 잘 활용하지 않게 된다.”, “공개 수업 외에는 자료를 잘 만들지 않는다.”고 하여 실제 수업시간에는 조작활동을 적극적으로 활용하지 않는다고 하였다. 다음은 교사들이 실제 수학 수업 중에 조작활동을 실행하는데 대한 어려움을 설명한 대표적인 예이다. 한편 토의 과정에서 Cabri 프로그램을 활용한 도형 지도에 대해서도 논의되었는데, 프로그램의 유용성을 설명하는 교사보다는 프로그램을 수업시간에 활용하는데 있어서의 어려움이나 장애에 대해 설명한 교사가 더욱 공감을 얻었다.

HJ교사 : 평행사변형 같은 경우 한 차시 40분이잖아요. 그 안에 구체물을 하고 이해를 시키고 익히기 문제까지 하려면 시간이 너무 부족한 것 같아요. 그러니깐 구체물 활동 안하고 그냥 어차피 평가

같은 것은 지필로만 보게 되어있으니깐요. 그러니깐 교사가 앞에서 그냥 이렇게 해라 저렇게 해라 이렇게만 되는 거지. 그러니깐 학습량이 조금 줄고, 하나를 가지고 수업시간이 좀 길어진다면은 구체물 가지고 하고 이해를 시키고 익히고 할 것 같은데 시간이 부족한데 학습량은 너무 많잖아요.

#### 4) 관련된 문제 익히기

설문지의 응답에서는 나타나지 않았지만 토의 과정에서 초임 교사들은 학생들에게 도형의 개념이나 성질을 학습한 후 관련된 문제들을 많이 풀어보게 함으로써 학생들의 오류를 줄일 수 있다고 하였다. 한 초임교사는 학생들이 수업시간에 도형의 성질은 잘 설명하면서도 그러한 성질을 가지고 어떤 삼각형인지 추론하는 문제는 어려워하며, 정삼각형의 세 내각의 크기가 같다는 것은 알지만 정삼각형의 한 각을 묻는 문제에서는 답을 하지 못한다고 하면서 수업 시간에 교과서 내용을 지도하는 것으로 그치면 안 되고 관련된 문제를 따로 풀어보도록 해야 한다고 하였다. 또 다른 초임 교사는 수업시간에 학생들이 학습 내용에 대해서 잘 이해했지만 실제 관련된 문제를 푸는 것은 그 이상을 요구하며, 다양한 문제를 풀어본 학생들이 문제에 익숙하여 오류를 잘 범하지 않는다고 하였다.

또한 초임 교사들은 학생들이 관련된 문제를 해결함으로써 수업시간에 배운 개념을 더욱 확실하게 이해하고, 다양한 문제에 적용할 수 있는 힘을 기를 수 있다고 하였다. <에피소드 4>는 학생들에게 관련된 문제를 많이 풀도록 하는 지도법에 대한 초임교사들의 설명이다.

##### <에피소드 4 : 관련된 문제 익히기를 통한 지도>

NY교사 : 제가 학습자였을 때는요. 문제집을 통해서 많이 적용해서 이해를 다졌던 것 같아요, 학교에서 가르쳐 주었던 것을 기반으로 해서, …… 문제집을 풀잖아요. 다양한 수준의. 그러면서 아, 이렇게 적용되는구나. 이 개념을 다시 확인할 수도 있고, 저는 되게 좋았거든요. 그래서 저희 반 공부 잘하는 애들은 문제를 따로 뽑아서 풀라고 주기도 하거든요. 교사가 다양한 문제를 파악하고 있는 것은 중요한 것 같구요. 문제를 제시하고 같이 풀어보고 함으로써 아이들의 개념을 다시 점검할 수도 있고 한계를 주는 것은 좋은 것 같아요. 한계 내에서 다양함을 주는 것은 좋은 것 같아요. 하지만 적당한 선이 아이들 마다 다른 것 같아요.

연구자 : 애들이 그 과정을[문제를 푸는 과정을] 통해서 무엇을 배웠으면 하는지.

JY교사 : 명확하게 개념을 이해하는가에 대해서요. 문제를 풀면서 생각을 하게 되는 거죠. 다지기 수준?

YJ교사 : 수업시간에 하는 건 한계가 있거든요. 모든 애들에게 맞추어야하니깐 중간 수준에 해야 하는데, 근데, 실제로 시험 문제를 보면 거기에 맞추다 보면 어떤 애들은 너무 쉬울 수도 있고 어떤 애들은 너무 어려울 수도 있으니깐 단계별로 할 때는 문제집 문제를 많이 활용하게 되죠.

(중략)

HJ교사 : 교과서랑 사실 문제집이랑 너무 차이가 나요. 교과서는 너무 쉬운데 문제집은 너무 어려운 거예요. 애들을 가르칠 때도 어려운 문제는 확 빼 버리고 앞에 쉬운 것만. 교과서 위주로. 제가 풀어 보고 싶은 것. 애가[학생들이] 이 개념을 알고 있나? 이런 거 확인하고 싶은 것.

<에피소드 4>에서 나타나듯이 NY교사는 자신이 학습자였을 때의 경험을 통해 학생들에게 관련된 문제를 제시하고 풀도록 하는 것이 오류를 줄이는데 효과적인 지도법이라고 이해했다. 하지만 학습자였을 때와는 달리 교사의 입장에서는 다양한 수준의 학생들을 고려해야 하므로 학습자에게 적절한 수준의 문제를 구분하여 제시해야하는 것이 필요하다고 하였다.

한편 YJ교사는 관련된 문제를 제시하는 것이 수준별 학습에 효과적이라고 하였다. 즉 수업 시간에는 중간 수준의 학생들에게 맞추기 때문에 실제 수준별 학습이 어렵다는 것이다. 또한 HJ교사는 교사가 제시하는 문제들이 교과서 수준에 맞아야한다고 했는데, 이는 학생들에게 문제를 제시하는 목적이 교사의 입장에서는 학생들이 교과서의 개념을 잘 학습했는지 확인하고, 학생들의 입장에서는 수업시간에 배운 개념들을 스스로 점검하고 다지기 위한 것인 만큼 교과서의 범위를 넘어서지 않아야한다는 것이다. 교과서 수준 이상의 문제는 학생들에게 학습 부담을 증가시키며 수학에 흥미를 떨어뜨리므로 피해야한다고 하였다.

## V. 논의

본 연구에서는 평면도형의 오류, 오류의 원인, 오류와 관련한 지도법이라는 세 가지 측면에서 초임 초등 교사들의 교수학적 내용 지식을 살펴보았다. 이 부분에서는 선행 연구와 비교하여 연구 결과를 분석하고 이를 통해 얻을 수 있는 시사점을 논의해 보고자 한다.

첫째, 평면도형 오류에 관한 지식 측면에서 초임 교사들은 평면도형의 개념보다 성질에서 학생들의 오류가 많을 것이라고 예상했다. 이를 좀 더 자세히 살펴보면, 삼각형의 개념에 대해서는 여러 가지 삼각형 중 예각삼각형과 이등변삼각형을 좀 더 어려워할 것이며, 삼각형의 성질에 대해서는 정삼각형을 제외한 나머지 삼각형에 대해 다양한 오류를 범할 것이라고 예상했다. 또한 사각형의 개념에 대해서는 사각형 종류에 상관없이 포함관계를 제대로 이해하지 못하기 때문에 발생할 수 있는 오류를 주로 예상하였으며, 사각형의 성질에 대해서도 다양한 오류를 예상하였다.

이와 관련하여 실제 초등학교 학생들을 대상으로 평면도형의 오류를 분석한 방정숙 외(2006)의 결과를 참조해 보면, 평면도형 개념보다는 성질에 대한 문제에서 학생들의 오답률이 높았고, 다른 종류의 삼각형에 비해서 예각삼각형과 이등변삼각형 개념을 어려워하였으며 사각형의 포함관계에 관한 오류가 많았다. 게다가 학생들이 보인 오류의 대부분에 초임 교사들이 예상한 오류가 포함되었기 때문에 초임 교사들은 비교적 평면도형과 관련된 학생들의 오류를 잘 이해하고 있다고 해석할 수 있겠다. 다른 한편으로 초임 교사들의 예상이 실제 학생들의 오류와 다르게 나타난 경우도 있었는데, 예를 들어 정삼각형의 개념과 성질에 대한 문제에서 교사들의 예상과 다르게 실제 학생들의 오류율은 낮지 않았다. 자신이 가르치는 학생들에 대한 오류를 교사가 보다 잘 이해하고 있는 것이 효과적인 수업을 위해 매우 중요한 만큼 추후 교사들이 예상하는 오류와 그들이 가르치는 학생들의 실제 오류 사이의 관계를 면밀히 살펴보는 연구가 필요하다고 생각된다.

한편, 본 연구에서 초임교사들은 학생들의 오류를 예상할 때 “학생들이 직각은 3학년 때부터 배워서 가장 잘 찾고 틀리는 경우가 가장 없다.” 또는 “이등변삼각형을 찾을 때 정삼각형을 빼고 찾는 학생이 많다.”와 같이 자신들의 교수 경험을 자연스럽게 말하는 경우가 많았다는 점에 주목할 필요가 있다. 연구대상 교사들이 초임교사들임을 감안할 때 짧은 경력에도 불구하고 비교적 학생들의 오류를 잘 파악하고 있는 것은 아무래도 초등수학교육에 대한 교사 자신의 관심을 바탕으로 평상시에 학생들의 오류를 주의 깊게 관찰하려는 경험에서 비롯되었다고 생각된다.

둘째, 평면도형의 오류 원인에 관한 지식 측면에서 살펴보면, 초임 교사들은 ‘시각적으로

비슷해 보이기 때문에’, ‘개념 정의를 제대로 이해하지 못하기 때문에’, ‘다른 개념과 혼동을 일으켜서’, ‘포함관계를 잘못 이해하거나 이해하지 못하기 때문에’, ‘대표적인 경우만 생각했기 때문에’, ‘해당되는 부분(용어)만 있으면 무조건 선택하므로’라는 원인을 주로 들었고, ‘교과서에서 표준화된 형태만 제시되어 있기 때문에’라는 원인은 매우 적게 언급하였다. 이를 선행연구와 관련지어 살펴보면, 초임 교사들이 예상하는 오류의 원인 중 대부분이 Bingobali 외(2011)의 ‘심리학적 원인’에 해당된다. 게다가 부진 학생의 경우에 대해서는 교사가 아무리 잘 가르친다고 하더라도 중요한 내용을 외우지 않고 기억하지 못해서 오류를 많이 범한다고 하여 학습자의 특성 중에서도 기하 사고 수준의 발달이나 제한된 ‘개념 이미지’ 보다는 학생들이 ‘정의나 성질을 잘 기억하지 않는 것’ 또는 ‘도형에 관련된 문제를 어려워하며 기피하는 것’이라는 원인을 강조하였다.

학습할 내용에 대해서 학생들이 어떤 어려움을 가지고 있는냐에 대해서 교사가 이해하는 것만큼이나 그러한 어려움의 원인이 무엇인지를 이해하는 것 역시 매우 중요하다(Shulman, 1986; Tirosh, 2000). 그러나 이러한 오류의 원인에 대해서 교과서나 교사의 특성을 고려하지 못한 채 학생들의 탓으로만 돌리는 것은 초임 교사들의 제한된 관점을 드러낸다고 생각된다. 이에 예비교사 교육과정이나 교사 전문성 발달 프로그램을 통해서 학생들의 오류 원인에 대해서 생각할 수 있는 기회를 제공되 특히 학생, 교과서, 교사 등 다양한 측면에서 오류 원인을 탐구할 수 있는 기회를 제공하는 것이 필요하다고 생각된다.

셋째, 평면도형 지도법에 관한 지식 측면에서 살펴보면, 초임 교사들은 평면도형의 오류를 지도하는데 있어서 교사의 명확한 설명과 반복을 중요하게 생각하였다. 즉 교사가 수업시간에 아무리 잘 가르쳐도 학생들이 잘 잊어버려 오류를 범하기 때문에 교사는 이를 방지하기 위해 학생들에게 기억하기 쉬운 형태로 설명하고 중요한 내용을 수시로 연습시켜 기억하도록 해야 한다는 것이다. 그런데 이러한 지도법은 경험이 부족한 초임교사나 예비교사들에게서 빈번히 나타나는 것으로써 학생들의 오류 원인은 정확하게 다루지 않는다는 점과 학생들에게 오류의 원인에 대해서 깊이 생각할 기회를 제한하고 교사의 설명을 수동적으로 받아들이도록 한다는 점을 생각한다면 비효율적인 지도 방법이라고 할 수 있다. 학생들의 오류가 수학을 학습하는 과정에서 자연스럽게 발생하는 것이라는 점을 감안해 본다면, 교사는 수업시간에 학생들이 범하는 오류에 대해서 피해야 할 대상으로 간주할 것이 아니라 학생들의 사고를 이해하고 의미 있는 수학적 담화를 위한 기회나 이를 통해 관련 수학 개념을 보다 면밀히 탐구할 수 있는 발판으로 활용할 수 있어야 할 것이다(Bray, 2011; NCTM, 2000).

그리고 초임 교사들은 평면도형의 오류를 지도할 때 다양한 범례를 제시하고, 분류하기·그리기·만들기와 같은 조작활동이 유용하다고 하였다. 이는 관련 문헌에서 공통적으로 제안하는 지도법, 즉 다양한 범례를 분류하고 분류된 도형들의 최소한의 속성을 추론하여 학생 스스로 도형을 정의할 기회를 가지도록 하며, 구체적 조작을 통해 도형의 특징을 학생 스스로 찾고, 설명과 정당화 과정을 거치면서 도형의 성질을 깊게 탐색할 수 있도록 한다는 내용과 표면적으로 대동소이한 것처럼 보인다. 그러나 토의 중에 드러난 초임 교사들의 응답을 살펴보면 이러한 지도법의 구체적인 방법이나 효과 보다는 주로 문제점에 관한 것이었으며 그 문제점은 교사의 지식 측면뿐만 아니라 재정 측면, 학생 관리 측면 등 다양하였다. 예를 들어 제한된 개념 이미지를 방지하고 오개념을 가지지 않도록 하기 위해서 다양한 범례를 제시하는 것이 중요하지만 어떤 범례를 얼마만큼 제시해야하는지 잘 모르겠다고 하였다. 또한 도형을 분류하고 직접 그리고 만들어 보는 활동이 중요하지만 실제 수업에서는 학생들이 자료를 사용하는데 훈련이 되어 있지 않아 의도한 대로 수업을 이끌지 못하고 산만한 수

업 분위기가 되며 시간이 많이 걸린다고 하였다. 이는 예비교사 교육이나 초임 교사 대상 연수 프로그램을 통해 범례 제시나 구체물 조작 활동이 도형 지도에서 중요하다는 것은 인지하지만 이를 수업에서 효과적으로 실행하기에는 교수 경력이 부족해 나타난 반응으로 생각된다. 따라서 초임 교사들을 위한 전문성 발달 프로그램에서는 특정 지도법을 피상적으로만 제시하기보다는 구체적이고 자세한 지도 사례를 다룸으로써 초임 교사들이 자신들의 지도법에 대해서 깊이 있게 반성함은 물론 직접 적용하기에 용이하도록 배려할 필요가 있겠다.

## 참고문헌

- 김경은, 방정숙 (2009). 분수 연산에 관한 예비교사의 교수학적 내용 지식 분석. *교원교육*, 25(1), 157-184.
- 김수미 (2003). 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구. *학교수학*, 5(2), 209-221.
- 곽주철, 류희수 (2008). 평면도형에 대한 교사의 PCK와 수업 실제의 비교 분석. *학교수학*, 10(3), 423-441.
- 교육과학기술부 (2009). 수학 1-1. 서울: 두산동아(주).
- 권유미, 안병곤 (2005). 초등 수학 교과서에 사용되고 있는 수학 용어에 대한 학생들의 이해도 분석 -도형 영역을 중심으로- *한국초등수학교육학회지*, 9(2), 137-159.
- 남윤석, 전평국 (2006). 교육실습 과정에서 배우는 초등예비교사의 수학 교수학적 내용 지식에 관한 사례연구. *수학교육*, 45(1), 75-96.
- 노영아, 안병곤 (2007). 도형 영역의 오류 유형과 원인 분석에 관한 연구: 초등학교 4학년을 중심으로. *학교초등수학교육학회지*, 11(2), 199-216.
- 박경미 (2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토. *수학교육*, 48(1), 93-105.
- 방정숙, 김상화, 박금란 (2006). 초등교사와 수학과 교수법적 내용 지식 정립을 위한 교수·학습 자료 개발. 2005년도 교과공동연구 결과보고서. (과제번호: KRF-2005-030-B00045)
- 방정숙, Li, Y. (2008). 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석. *수학교육*, 47(3), 291-310.
- 배종수 (2005). 초등수학교육 내용지도법: 제 7차 교육과정을 중심으로. 서울: 경문사.
- 신보미 (2008). 확률에 대한 교사의 교수학적 내용 지식 분석. *학교수학*, 10(3), 509-533.
- 오영열 (2004). 초등수학에 대한 예비교사들의 이해: 분수의 곱셈을 중심으로. *학교수학*, 6(3), 267-281.
- 이종욱 (2003). 초등교사의 분수 지식 실태 분석. *수학교육*, 44(1), 67-85.
- 이종영, 장영은(2003). 도형과 관련된 문제해결과정에서 초등학생의 오류 유형과 원인 분석 연구.
- 최승현 (2007). 교육과정 개정에 따른 수학과 내용 교수 지식(PCK) 연구. 연구보고 RRI 2007-3-2. 서울: 한국교육과정평가원.
- An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school Mathematics teachers in China and The U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(2), 145-172.

- Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to k-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 권성룡 외 11인 공역(2005). *수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게?* 서울: 경문사.
- Broko, H. & Livingston, C. (1989). Cognition and improvisation: Differences in mathematics instruction by expert and novice teacher. *American Educational Research Journal*, 26(4), 473-498.
- Bingolballi, E., Akkoç, H., Oamantar, F. M., & Demir, S. (2011). Pre-service and in-service teachers' views of the sources of students' mathematical difficulties. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(1), 40-59.
- Bray, W. S. (2011). A collective case study of the influence of teachers' beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(1), 2-38.
- Ding, M. (2008). Teacher knowledge necessary to address student errors and difficulties about equivalent fraction. In G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics*(pp. 147-171). Rotterdam, Netherlands: Sense
- Kasemi, E. & Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *Elementary School Journal*, 102(1), 59-80.
- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 14(3), 3-11.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). *학교수학을 위한 원리와 기준*. 서울: 경문사.
- \_\_\_\_\_ (2007). *Mathematics teaching today* (2nd Ed.). Reston, VA: The Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2011). *수학 수업의 현재와 미래*. 서울: 경문사.
- Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics*(9th ed). New York: John Wiley & Sons. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 공역(2012). *초등 교사를 위한 수학과 교수법*. 서울: 경문사.
- Schleppenbach, M., Flevares, L. M. Sims, L. M. & Perry, M. (2007). Teachers' responses to student mistakes in Chinese and U. S. mathematics classrooms. *The Elementary School Journal*, 108(2), 131-147.
- Son, J. W. & Sinclair, N. (2010). How preservice teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics*, 110(1), 31-46.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology*, 14, 293-305.

## Novice Elementary Teachers' Knowledge of Students' Errors on Plane Figures

Song, KeunYoung<sup>5)</sup> · Pang, JeongSuk<sup>6)</sup>

### Abstract

This paper examined eight novice elementary teachers' knowledge in terms of the types and sources of students' errors and teaching strategies on plane figures through a questionnaire and teachers' discussion. The teachers tended to predict students' diverse error types, but they attributed the sources of such errors mainly to their characteristics. The analysis of teachers' responses of teaching strategies revealed that they recognized the importance of the teacher's clear explanation and students' own problem-solving, while they were somewhat negative in presenting diverse examples and classifying, drawing, or constructing figures. Building on these results, this paper provides the implications for novice teachers' professional development programs.

Key words : Novice elementary teachers, Pedagogical content knowledge, Students' errors on plane figures

---

<sup>5)</sup> Daegu Dongseong Elementary School (gy9331@hanmail.net)

<sup>6)</sup> Korea National University of Education (jeongsuk@knue.ac.kr)