대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 14, No. 3, 357 ~ 375. Sep 2012

패턴의 유형에 따른 학생들의 일반화 방법 조사 - 초등학교 6학년 학생들을 중심으로-

이 명 기* · 나 귀 수**

본 연구는 증가패턴의 유형에 따른 6학년 학생들의 일반화 방법의 특징을 조사하는 데에 그 목적이 있다. 본 연구에서는 ax, x+a, ax+c, ax2, ax2+c 유형과 관련된 총 6개의 문항들로 검사지를 구성하였으며, 이 검사지를 활용하여 초등학교 6학년 학생 290명의 일반화 방법을 조사하였다. 본 연구의 결과로서 대수적 일반화와 관련하여 학생들은 ax 유형에서 가장 높은 대수적 일반화 수행 정도를 나타냈고, 그 다음으로는 ax2, x+a, ax+c, ax2+c의 순서로 낮은 수행 정도를 나타냈다. 또한 학생들의 일반화 수행 정도는 동일한 패턴 유형이라고 하더라도 패턴의 맥락에 따라 큰 차이가 나는 것으로 확인되었는 바, 학생들의 패턴 일반화 활동을 더욱 풍부하게 하기 위해서는 가능하면 다양한 맥락의 패턴을 학생들에게 제공하는 것이 바람직하다고 할 수 있다.

Ⅰ. 서론

많은 사람들이 대수는 문자를 사용하여 식을 만들고 복잡한 방정식을 푸는 것이라고 생각한다. 이처럼 대수를 문자 사용과 같다고 생각하는 것은 대수를 일반화된 산술이라고 보는 입장이다. 그러나 대수는 규칙들의 집합으로 보는 것이 바람직하다(김성준, 2002). 대수에서 문자와 기호를 다루는 절차가 핵심이기는 하지만 대수는 단순히 기호를 조작하는 것 그 이상의 것이다.

NCTM(2000)은 대수의 규준을 제안하는 동시에 대수적 사고를 발현시키기 위해 여러 가지 활동을 제안하고 있다. NCTM(2000)에서는 대수 규준으로서 '규칙성, 관계, 함수의 이해' 및 '대수 기호를 이용한 규칙성과 구조의 표현 및 분석'을 제안하고 있다. '규칙성, 관계, 함수의 이해'와 관련하여, 3~5학년 학생들이 수 패턴과 기하 패턴을 탐구하고 문장이나 기호를 사용하여 수학적으로 표현할 것을 강조하고 있다. 또한 학생들이 패턴의 구조와 패턴이 증가하고 변화하는 방식을 분석하며, 분석 결과를 이용하여 패턴 속의 수학적 관계를 일반화할 것을 강조하고 있다. 학생들이 규칙성을 언어적으로 설명하고 그 규칙성이 어떻게 될 것인가를 예측하고 일반화하는 활동에 적극적으로 참여하는 것이 중요하다는 것이다. '대수 기호를 이용한 규칙성과 구조의 표현 및 분석'과 관련하여, 3~5학년 학생들이 변수의 개념과 변수의 용법을 이해해야 한다고 강조하고 있다. 그리고 학생들이 변수 개념과 용법을 이해하기 위해서는 패턴을 탐구하고 관계를 기록하면서 자신들의 사고를 표현할

* 경기이천초등학교, under-see@hanmail.net, 제 1저자
** 청주교육대학교, gsna21@cje.ac.kr, 교신저자

필요가 있음을 강조하고 있다.

우리나라의 경우 2009년 개정 수학과 교육과정에서 초등학교 수학은 ‘수와 연산’, ‘도형’, ‘측정’, ‘확률과 통계’, ‘규칙성’ 영역으로 구분되어 있으며, 여기서 대수와 규칙성에 해당하는 내용은 주로 ‘규칙성’ 영역에서 다루어지고 있다(교육과학기술부, 2011). 2009년 개정 수학과 교육과정에서 대수 및 패턴과 관련된 내용을 살펴보면, 1∼2학년에서는 학생들이 물체, 무늬, 수의 배열에서 규칙을 찾아 여러 가지 방법으로 나타내고, 학생 자신이 정한 규칙에 따라 물체, 무늬, 수 등을 배열하는 활동을 할 것을 강조하고 있다. 3∼4학년에서는, 학생들이 다양한 변화 규칙을 찾아 설명하고 그 규칙을 수나 식으로 나타내고, 두 양의 대응 관계를 나타낸 표에서 규칙을 찾아 설명하고 □와 △를 사용하여 식으로 나타낼 수 있어야 함을 강조하고 있다. 5∼6학년에서는 학생들이 두 수 사이의 대응 관계를 x와 y를 사용하여 식으로 나타내고, 정비례 관계와 반비례 관계를 이해하여 그 관계를 표나 식으로 나타낼 수 있어야 함을 강조하고 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 국내외의 수학과 교육과정에서는 학생들이 규칙성을 인식하고 확장하는 활동을 바탕으로 기호와 식을 활용으로 규칙성을 일반화하는 활동을 지속적으로 경험하는 것이 중요함을 강조하고 있다. 학생들에게 더욱 의미 있는 일반화 활동을 제공하기 위해서는 우선 학생들의 일반화 방법의 특징과 수준을 확인할 필요가 있다. 이러한 맥락에서, 본 연구는 패턴의 유형에 따른 초등학교 6학년 학생들의 일반화 방법의 특징을 조사하고자 한다. 본 연구에서 보고되는 우리나라 초등학교 6학년 학생들의 일반화 방법의 특징은 학생들에게 더욱 의미 있는 일반화 활동을 제공하기 위한 기초 자료로 활용될 수 있을 것이다.

Ⅱ. 선행 연구 고찰

본 연구에서는 증가패턴의 유형에 따른 학생들의 일반화 방법의 특징을 조사하고자 한다. 따라서 본 연구의 핵심 주제는 패턴의 일반화이다. 패턴에 기초한 대수 교육은 전통적인 대수 교육과 큰 차이가 있다(김성준, 2002). 첫째, 문자의 사용과 관련하여 전통적인 대수 교육에서는 문자의 사용의 첫 단계로 미지수를 찾기 위한 절차와 대수식의 조작, 방정식의 풀이 등을 강조한다. 이에 비해 패턴에 기초한 대수 교육에서는 두 변수들 사이의 관계를 파악하기 위해 언어적인 측면을 강조하면서 문자를 도입할 것을 강조한다.

둘째, 대수를 도입하는 시기에 있어서 전통적인 대수 교육에서는 중학교 이후에서 대수 학습이 가능하다고 주장하는 반면, 패턴에 기초한 대수 교육에서는 대수 학습과 관련된 내용이 조기에 학습 가능하다고 주장한다. 패턴에 기초해서 대수를 조기에 도입하려는 시도는 미국, 영국, 호주를 비롯한 여러 국가의 대수 교육과정에서 나타난 가장 중요한 변화라고 할 수 있다.

셋째, 일반성의 획득 순서와 관련하여, 전통적인 대수 교육에서는 학생들이 대수식을 단순화하고, 미지수를 구하기 위해 방정식을 풀고, 그 과정에서 표현을 바꾸는 방법 등을 학습하면서 문자의 사용 규칙에 대하여 학습한다고 주장한다. 이러한 문자의 사용을 학습한 뒤에야 학생들은 변수와 함수에서 일반성의 개념을 비로소 다룰 수 있다는 것이다. 반면에 패턴에 기초한 대수 교육에서는 학생들이 초등학교에서부터 시각적 패턴들과 수열의 일반적 규칙들을 경험하고 일련의 관계를 통해 일반성을 발달시킬 수 있다고 주장한다. 다시 말해 대수 문자의 사용과 이를 통한 일반성의 획득은, 문자 자체에서 시작하는 것이 아니라 패턴과 관계를 표현하는 과정에서 자연스럽게 강조되어야 한다는 것이다. 따라

서 패턴에 기초한 대수 교육에서는 패턴의 일반화 과정에서 문자를 도입할 것을 강조한다.

강현영(2007)은 패턴 활동을 통한 대수 학습과 관련하여 의미있는 교수학적 시사점을 제안하였다. 강현영(2007)은 시각적 패턴의 규칙을 여러 가지 언어적 방식을 통해 표현하는 과정을 경험하게 한 후에 기호를 사용하여 규칙을 다시 표현할 수 있도록 학생들을 지도할 것을 제안하였다. 여기에서 시각적 패턴은 패턴이 그림으로 표현되는 도형 패턴, 기하 패턴, 그림 패턴 등을 의미한다. 또한 교사는 학생들이 시각적 패턴의 반복적인 성질을 인식하는 것뿐만 아니라 이러한 인식을 넘어 관계적인 성질을 탐구할 수 있도록 지도할 필요가 있다고 제안하였다. 학생들이 구체적인 맥락 속에서 반복되는 패턴을 찾고 패턴과 수의 관계를 파악하여 일반화할 수 있도록 지도할 필요가 있다는 것이다.

한편, 일반화 방법과 관련하여 Lannin(2005)은 실험 연구를 통해 학생들이 사용하는 일반화 전략을 다섯 단계로 분류하였다. Lannin(2005)에 따르면 학생들의 일반화 방법은 크게 비명시적과 명시적 단계로 구분된다. 비명시적 단계에는 그리거나 세기(counting), 순환적인 관계 인식(recursive)라는 두 개의 하위 단계가 있다. 그리고 명시적 단계에는 전체-부분(whole-object), 추측과 확인(guess and check), 맥락적(contextual) 인식 단계라는 세 개의 하위 단계가 있다(정홍춘 외, 2008에서 재인용). Lannin(2005)은 또한 일반화 과정에서 학생들이 기호를 사용하고 선행 지식과의 연결을 도모할 수 있게 된다고 주장하였다. 일반화를 위한 패턴 탐구 활동이 수학적인 발견을 경험하게 하며, 탐구 상황에 따른 서로 다른 종류의 일반화가 수학 학습에 촉진제가 될 수 있다는 것이다.

강현영(2007)은 일차식으로 표현되는 시각적 패턴을 도형의 개수에 따라 분류하였다. 도형의 개수가 5, 6개 미만인 단계인 '준비 연습(warm-up exercise)', 도형의 개수가 10~20개로서 단계적으로 그림을 그리거나 세어서 문제를 해결할 수 있는 단계인 '근거리 생성(near-generation)', 도형의 개수가 100개 이상으로서 일반화의 필요성이 제기되는 단계인 '원거리 생성(far-generation)'으로 구분하였다. 그리고 패턴의 규칙을 표현하는 단계로서 언어적 표현 단계와 기호적 표현 단계의 두 단계로 구분하였다.

Warren & Cooper(2008)는 반복 패턴과 기하적 증가패턴에 대한 교수 실험을 통해 기하적 패턴이 학생들이 대수를 탐구하도록 돕는 데에 중요한 역할을 한다고 제안하였다. 확장된 패턴을 만들고, 표에 수를 기록하고, 일반성을 표현하기 위해 토의를 하고 언어와 기호를 사용하는 활동은 대수적 사고를 발달시키는 데에 중요한 역할을 한다는 것이다. 많은 학생들이 시각적 표현을 조작하여 일반화하는 것을 어려워하지만 패턴 자체를 분해하고 재구조화하는 것에 초점을 맞춘 활동은 학생들의 일반화 과정을 촉진할 수 있다. Warren & Cooper(2008)는, 비록 학생들이 일상적인 언어로 일반성을 표현하는 것에 익숙하고 일반성을 추상적인 기호 체계를 사용해 표현하는 것을 어려워한다고 하더라도, 기호를 사용한 일반화 활동에 학생들을 적극적으로 참여시킬 필요가 있다고 주장하였다.

이러한 선행 연구들과 비교하여, 본 연구는 학생들이 스스로 패턴을 탐구하고 일반화하는 방법을 조사하고 분석한다는 점에서 그 의의가 있다고 할 수 있다. 한편, 본 연구에 참여한 학생들은 서로 다른 증가패턴 유형을 탐구하고 일반화하는 활동을 경험하였다. 따라서 본 연구는, 위에서 살펴본 선행 연구들(김성준, 2002; 강현영, 2007; Warren & Cooper, 2008)의 주장과 일관되게, 학생들에게 패턴을 탐구하고 일반화하는 경험을 제공한다는 점에서 그 의의가 있다고 할

수 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상 및 절차

본 연구에서는 경기 용인시에 소재한 D초등학교, 충북 청주시에 소재한 G초등학교, 충북 증평군에 소재한 S초등학교 세 학교를 선정하여 조사 연구를 실시하였다. 각 학교마다 성별, 학업 성취도와 상관없이 초등학교 6학년 3∼4개 학급을 임의로 선정하여 90∼100명의 학생이 참여하여 총 290명의 학생들이 본 연구에 참여했다. 학교별 연구 참여 학생들에 대한 정보는 다음의 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 학교별 연구 참여 학생 수

학교	학급명	학생 수
D초등학교	1	32
	2	38
	3	36
	소계	106
G초등학교	1	32
	2	28
	3	33
	소계	93
S초등학교	1	21
	2	22
	3	21
	4	27
	소계	91
총	10 학급	290

본 연구에 참여한 학생들은 우리나라의 국가 수준 수학과 교육과정에 따른 교과서를 활용한 정규 수학 수업을 받은 학생들이며, 패턴의 일반화와 관련되어 우리나라 수학 교과서에서 다루는 내용 이외의 다른 특별한 내용은 학습하지 않은 학생들이다. 검사 시간은 초등학교 한 차시 수업 시간인 40분으로 했고, 시간이 부족하거나 추가 시간을 원하는 학생이 있을 경우 5분의 시간을 더 활용할 수 있도록 하였다. 검사 주의 사항으로는, 해결 과정이 매우 중요하므로 식, 그림, 말로 된 설명 등 학생들이 검사지에 적은 것은 지우지 않도록 학생들을 안내하였다. 그리고 검사 문항 중 하위 문항 (3)번에서는 그림을 자세히 그리지 않고 간단히 그려도 좋다고 안내하였다. 검사 시간을 관리한 교사들은 검사지의 인쇄 상태나 시간에 대한 학생들의 질문에만 응답하였으며 검사 문항의 내용에 대한 질문에는 응답하지 않았다.

2. 검사 도구

본 연구에서 사용한 검사지는 선행 연구(강현영, 2007; 김은숙, 2009), 초등학교 수학 교과서(교육과학기술부, 2010a, 2010b), MIC(Mathematics in Context) 교과서(Britannica, 2001)를 참고하여 제작되었다. 제작된 검사지는 수학교육 전문가, 초등 수학교육을 전공한 11명의 초등학교 교사들에 의해 타당성이 검증되었다. 본 연구의 검사지는 ax, x+a, ax+c, ax2, ax2+c 유형의 증가패턴과 관련된 6개의 문항으로 구성되어 있으며, 각각의 문항에는 5개의 하위 문항이 존재한다. 본 연구에서 활용한 검사지의 6개 문항에 대한 대략적인 정보는 다음의 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 Ⅲ-2> 문항 정보

문항	패턴 유형	식 (일반화)
1	ax	4x
2	x+a	x+2
3	ax+c	2x+1
4	ax+c	4x+4
5	ax^2	x^2
6	ax^2+c	x^2+1

본 연구에서 활용한 검사지에 제시된 각 문항의 구체적인 내용은 다음의 <표 Ⅲ-3>과 같다.

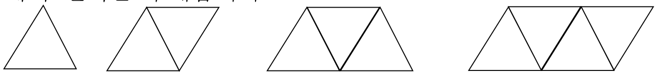
<표 Ⅲ-3> 문항 내용

1. **<바둑돌 문제>**다음은 바둑돌의 배열을 나타낸 것입니다. 바둑돌의 개수를 구해봅시다.

```
o o    o o o o    o o o o o o    o o o o o o o o
o o    o o o o    o o o o o o    o o o o o o o o
 1        2            3                 4
```

(1) 다음 단계를 그려 보세요.
(2) 이 패턴의 규칙을 설명해 보세요.
(3) 20번째 단계보다 더 큰 단계를 하나 골라 그려 보고 설명해 보세요.
(4) 더 큰 단계의 바둑돌의 개수를 찾아내는 방법을 설명해 보세요.
(5) 이 패턴에서 바둑돌의 개수를 찾아내는 식을 써 보세요.

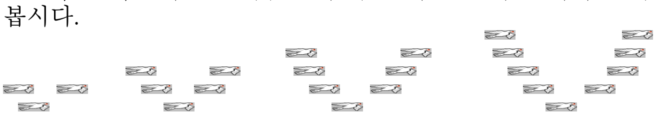
2. **<삼각형 문제>** 다음은 변의 길이가 1cm인 정삼각형을 배열한 것입니다. 만들어진 도형의 둘레의 길이를 구해봅시다.



1 2 3 4

(문제 1과 상동)

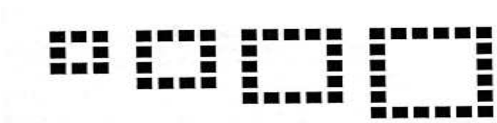
3. **<새 문제>** 새들은 다음 그림과 같이 V-형태를 띠며 날아갑니다. 몇 마리씩 날아가는지 알아봅시다.



1 2 3 4

(문제 1과 상동)

4. **<타일 문제Ⅰ>** 다음은 정사각형 타일로 더 큰 정사각형을 만든 그림입니다. 타일의 개수를 알아봅시다.



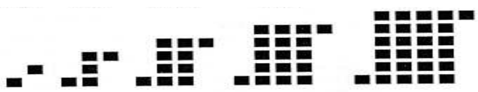
(문제 1과 상동)

5. **<달걀 문제>** 다음은 달걀을 배열해 놓은 것입니다. 달걀 개수를 세어 봅시다.

1 2 3 4

(문제 1과 상동)

6. **<타일 문제Ⅱ>** 다음은 정사각형 타일을 이용하여 S-모양을 만들어 놓은 그림입니다. 타일의 개수를 알아봅시다.



1 2 3 4 5

(문제 1과 상동)

<표 Ⅲ-4> 하위 문항의 분석 내용

하위 문항	내용	분석 내용				
		패턴의 규칙알기	산술적 일반화	대수적 일반화		
				사실적 일반화	맥락적 일반화	기호적 일반화
(1)	다음 단계를 그리기	○				
(2)	패턴의 규칙 설명하기	○				
(3)	큰 단계를 그리고 규칙 설명하기		○	○		
(4)	큰 단계에서 바둑돌(타일)의 개수 찾는 방법 설명하기				○	
(5)	일반화하기					○

각 문항에 포함된 5개의 하위 문항의 구체적인 내용은 다음의 <표 Ⅲ-4>와 같다.

하위 문항 (1)과 (2)는 학생들에게 일반화를 시도하기 전에 다음 단계의 규칙성을 그리고 패턴의 규칙을 설명할 것을 요구하는 문항이다. 하위 문항 (3)은 큰 단계를 그리고 규칙을 설명하는 문항이며, 하위 문항 (3)에 대한 학생들의 응답에서 학생들의 산술적 일반화와 사실적 일반화의 방법을 확인할 수 있다. 하위 문항 (4)는 큰 단계에서 바둑돌 또는 타일의 개수를 찾는 방법을 설명하는 문항이며, 학생들의 맥락적 일반화 방법을 확인하기 위한 문항이다. 하위 문항 (5)는 패턴을 일반화할 것을 요구하는 문항이며, 학생들의 기호적 일반화 방법을 확인하기 위한 문

<표 Ⅲ-5> 일반화 방법 분석 기준

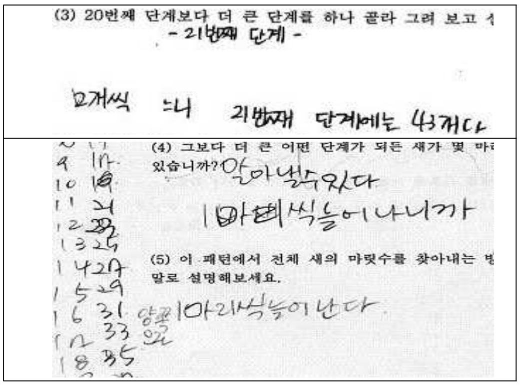
일반화(Generalization)				
단계	산술적 (Arithmetic)	대수적 (Algebraic)		
		사실적 (Factual)	맥락적 (Contextual)	기호적 (Symbolic)
의미	산술의 영역에 있음. 패턴의 규칙을 알아내지만, 차례대로 모든 단계를 반복적으로 계산하여 값을 구함.	반복하여 계산하지 않아도 연속되는 단계의 규칙을 일반화할 수 있음. 구체적인 상황(단계)에서 값을 구할 수 있지만 일반화된 표현을 제시하지 못함.	일반화를 표현할 때, 상황에 의존하여 일반적인 대상을 ‘다음 그림’이나 ‘윗줄’과 같은 방식으로 언어적으로 명시할 수 있음.	문자와 숫자로 이루어진 상징을 통해 일반화를 표현하고 기호를 통해 공식으로 구체화함.
예시 (3번 문항)	7단계 새의 수는 ‘3+2+2+2+2+2+2+=15’ 그래서 15마리	날개모양을 보니 1단계는 ‘1+2’ 2단계는 ‘2+3’ 3단계는 ‘3+4’, 20단계는 ‘20+21’ 이므로 41마리.	양쪽에 각각 단계수만큼 새가 있으므로 단계의 두 배를 하고 가운데 한 마리를 더하면 된다.	2x+1, 단계+단계+1, □×2+1 등과 같이 문자나 기호를 사용하여 일반적인 식의 형태로 표현함.

항이다.

3. 분석 도구

본 연구에서는 Radford(2006)의 대수의 일반화 단계 4단계를 참고하여 <표 Ⅲ-5>와 같이 분석 기준을 설정하고 학생들의 일반화 방법을 분석하였다. 산술적 일반화보다 대수적 일반화가 고차원적이고, 대수적 일반화에서는 사실적 일반화에서 기호적 일반화로 갈수록 고차원적인 방법이라고 할 수 있다.

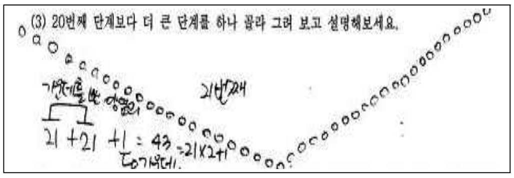
3번 문항를 예로 들어 분석 기준을 설명하면, [그림 Ⅲ-1]은 산술적 일반화 방법에 해당한다. 특정 단계의 값을 구하는 데 있어서 반복적으로 계산하여 값을 구하는 것은 산술의 영역에 있는 산술적 일반화로써 대수적 일반화와 구별된다. [그림 Ⅲ-1]에 제시된 방법을 살펴보면, 1단계, 2단계, … 21단계의 모든 단계를 차례대로 반복적으로 계산하여 21단계의 값을 구했음을 확인할 수 있다.



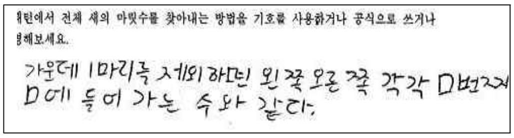
[그림 Ⅲ-1] 산술적 일반화의 예

다음의 [그림 Ⅲ-2]는 사실적 일반화 방법의 예를 보여 준다. [그림 Ⅲ-2]에 제시된 방법을 살펴보면, 모든 단계에서의 새의 마릿수를 반복하여 계산하지 않고도 규칙을 일반화하여 21단계 새의 수를 21+21+1=43으로 구하고 있음을 알 수 있다.

[그림 Ⅲ-3]은 맥락적 일반화에 해당하는 방법이다. [그림 Ⅲ-3]에 제시된 방법은 상황에 의존하여 일반화를 언어적으로 표현하고 있다.

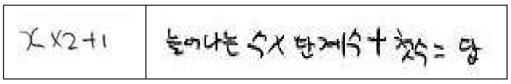


[그림 Ⅲ-2] 사실적 일반화의 예



[그림 Ⅲ-3] 맥락적 일반화의 예

[그림 Ⅲ-4]는 기호적 일반화 방법의 예를 보여 준다. [그림 Ⅲ-4]에 제시된 방법에서는 새의 수를 구하는 일반적인 식으로서 'x×2+1'를 제시하고 있다. [그림 Ⅲ-4]에 나타난 응법에서 '늘어나는 수×단계수+첫수'라는 언어적 표현이 미흡하기는 하지만, 일반적인 식 'x×2+1'이 수학적으로 옳기 때문에 기호적 일반화 방법이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅲ-4] 기호적 일반화의 예

Ⅳ. 결과 및 논의

1. 전체적인 경향 분석

<표 Ⅲ-6> 패턴 유형에 따른 일반화 방법

<table>
<tr><th rowspan="2">패턴의 유형</th><th rowspan="2">문항</th><th rowspan="2">산술적 일반화</th><th colspan="3">대수적 일반화</th><th rowspan="2">오답</th><th rowspan="2">계</th></tr>
<tr><th>사실적 일반화</th><th>맥락적 일반화</th><th>기호적 일반화</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ax</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">86
(29.7)</td><td colspan="3">194 (66.8)</td><td rowspan="2">10
(3.5)</td><td rowspan="2">290
(100%)</td></tr>
<tr><td>23
(8.0)</td><td>18
(6.0)</td><td>153
(52.8)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x+a</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">83
(28.6)</td><td colspan="3">142 (49.0)</td><td rowspan="2">65
(22.4)</td><td rowspan="2">290
(100%)</td></tr>
<tr><td>4
(1.4)</td><td>8
(2.8)</td><td>130
(44.8)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">ax+c</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">129
(44.5)</td><td colspan="3">139 (47.9)</td><td rowspan="2">22
(7.6)</td><td rowspan="2">290
(100%)</td></tr>
<tr><td>8
(2.8)</td><td>10
(3.4)</td><td>121
(41.7)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">140
(48.3)</td><td colspan="3">90 (31.1)</td><td rowspan="2">60
(20.7)</td><td rowspan="2">290
(100%)</td></tr>
<tr><td>8
(2.8)</td><td>8
(2.8)</td><td>74
(25.5)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ax^2</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">62
(21.4)</td><td colspan="3">148 (51.0)</td><td rowspan="2">80
(27.6)</td><td rowspan="2">290
(100%)</td></tr>
<tr><td>16
(5.5)</td><td>6
(2.1)</td><td>126
(43.4)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ax^2+c</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">85
(29.3)</td><td colspan="3">73 (25.2)</td><td rowspan="2">132
(45.5)</td><td rowspan="2">290
(100%)</td></tr>
<tr><td>3
(1.0)</td><td>4
(1.4)</td><td>66
(22.8)</td></tr>
</table>

본 연구에서 나타난 학생들의 패턴의 유형에 따른 일반화 수행 정도를 나타내면 다음의 <표 Ⅲ-6>과 같다. <표 Ⅲ-6>을 해석할 때 유의할 점을 예로 들어 설명하면, 1번 문항의 ‘사실적 일반화’에 해당하는 23명은 사실적 일반화까지만 할 수 있는 학생이 23명이라는 뜻이다. 다시 말해서, 사실적 일반화 방법을 사용한 어떤 학생이 기호적 일반화 방법까지 사용했다면 그 학생은 ‘기호적 일반화’에 해당하는 학생으로 간주되었다.

학생들의 일반화 방법에서 나타난 전체적인 특징을 논의하면 다음과 같다.

첫째, 본 연구에서 다룬 증가패턴의 유형 중 학생들의 대수적 일반화 수행이 가장 높은 패턴은 ax 유형이고, 그 다음으로는 ax2, x+a, ax+c, ax2+c의 순서로 대수적 일반화 수행이 낮게 나타났다. 대수 교육에서 추구하는 궁극적인 목표인 기호적 일반화 수행과 관련하여 살펴보면, ax 유형에서 기호적 일반화 수행이 가장 높게 나타났고, 그 다음으로는 x+a, ax2, ax+c, ax2+c의 순서로 기호적 일반화 수행이 낮게 나타났다. 여기에서 주목할 점은 규칙성을 일반적인 식으로 표현했을 때, 그 식에 연산이 한 종류씩만 포함되어 있는 유형에서 대수적 일반화 수행 정도가 높게 나타났다는 점이다. 학생들의 대수적 일반화 수행 정도가 상대적으로 높게 나타난 ax 유형, ax2 유형, x+a 유형에는 일반화를 표현한 식에 각각 덧셈, 덧셈, 곱셈 연산이 각각 하나씩만 포함되어 있다. 반면에 ax+c 유형과 ax2+c 유형을 일반화한 식에는 곱셈과 덧셈이 동시에 포함되어 있다.

둘째, 기호적 일반화에 성공한 학생들의 비율이 일차식인 ax+c 유형보다 이차식인 ax2 유형에서 더 높게 나타났다. 이러한 현상이 나타난 이유로는, 우리나라 학생들이 ax+c 형태의 식보다 ax2 형태의 식을 암묵적으로 더 많이 다루었기 때문이 것으로 파악된다. 우리나라의 수학과 교육과정의 위계를 살펴보면(교육인적자원부,

2007; 교육과학기술부, 2011), 학생들이 ax+c 유형이나 ax2 유형과 관련된 규칙성의 일반화를 직접적으로 경험하는 것은 가능하지 않다. 그러나 우리나라 학생들은 예를 들어, 정사각형의 넓이 구하기와 관련된 활동에서는 ax2 형태의 식을 간접적으로 경험할 수 있다. 이러한 이유로 인해 기호적 일반화에 성공한 학생들의 비율이 일차식인 ax+c 유형보다 이차식인 ax2 유형에서 더 높게 나타난 것으로 파악된다.

셋째, 동일한 ax+c 유형의 3번 문항과 4번 문항에 대한 학생들의 대수적 일반화 수행 정도를 살펴보면 그 차이가 크게 나타남을 확인할 수 있다. 3번 문항과 4번 문항에서 대수적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 각각 139명(47.9%), 90명(31.1%)이며, 기호적 일반화에 성공한 학생들은 각각 121명(41.7%), 74명(25.5%)로 나타났다. 또한 3번 문항과 4번 문항에서 오답을 제시한 학생들은 각각 22명(7.6%), 60명(20.7%)로 나타났다. 동일한 ax+c 유형의 문항들임에도 불구하고, 학생들은 3번 문항에 비해 4번 문항에서 일반화를 하는 데에 더 큰 어려움을 겪은 것으로 확인되었다. 3번 문항의 맥락은 V자로 뻗어나가는 패턴이고 4번 문항의 맥락은 가운데가 비어 있으면서 네 방향으로 뻗어나가는 패턴이다. 기호적 일반화에 성공한 학생들의 방법을 살펴보면, 3번 문항의 V자 패턴을 재구조화하여 일반화하는 것이 4번 문항의 가운데가 비어 있는 네모 패턴을 재구조화하여 일반화하는 것보다 더 수월했음을 확인할 수 있다. 이러한 결과로부터 알 수 있는 것은, 똑같은 증가패턴 유형이라고 하더라도 제시된 맥락이 학생들의 일반화 수행 정도에 큰 영향을 미친다는 것이다. 일반화해야 할 맥락이 어떤 것인가에 따라 학생들의 일반화 수행 정도에 큰 차이가 나타남을 확인할 수 있다.

넷째, ax+c 유형의 3번 문항과 4번 문항에서는 산술적 일반화 방법을 나타낸 학생들의 비율(각각 44.5%, 48.3%)이 다른 문항들보다 매우 높게 나타났다. 3번 문항과 4번 문항에서 산술적으로 일반화한 학생들은 증가하는 양에 주목하여 처음 단계부터 연속적으로 수를 더하여 특정한 단계에서의 새의 마릿수나 타일의 개수를 구한 학생들이다. 이 학생들은 증가하는 양에 의존하여 산술적으로 특정 단계에서의 새의 마릿수나 타일의 개수를 구할 수는 있었지만, 변화하는 새의 마릿수나 타일의 개수가 단계의 수와 어떻게 관련되는가는 해결하지 못하였다. 이 학생들의 일반화 방법을 살펴본 결과, 산술적 일반화에 머무른 대부분의 학생들은 증가하는 양 a에만 주목하여 ax 형태의 잘못된 식을 제시하였다.

다섯째, 학생들이 이차식인 ax2 유형에서 보인 상대적으로 높은 일반화 수행 정도는 패턴의 일반화와 관련된 수학 교수・학습에 시사하는 바가 크다고 할 수 있다. 148명(51.0%)의 학생들이 대수적 일반화에 성공하였고, 이 중에서 126명(43.4%)의 학생들은 기호적 일반화에 성공하였다. 이것은 ax2 유형의 식이 이차식이라고 하더라고 적절한 상황이 주어진다면 초등학교 학생들이 의미 있는 일반화 활동을 경험할 수 있음을 시사한다고 할 수 있다. 특히 ax2 유형의 패턴에서는 단계가 커질수록 증가하는 양이 일정하지 않기 때문에 학생들에게 인지적 갈등을 유발하기에도 효과적이라고 생각된다.

2. 증가패턴 유형별 반응 분석

이하에서는 각각의 문항에 대한 학생들의 일반화 방법을 자세히 살펴보기로 한다.

가. 증가패턴 ax 유형: 1번 문항

증가패턴 ax 유형은 우리나라의 4학년 교과서에서 자주 다루는 유형이다. 1번 문항에서 대수적 일반화 방법과 산술적 일반화 방법을 나타낸

학생들은 각각 194명(66.8%), 86명(29.7%)이었고, 오답을 제시한 학생들은 10명(3.5%)이었다.

1) 산술적 일반화

산술적 일반화 방법을 나타낸 86명(29.7%)의 학생들의 응답은 크게 두 가지로 분류될 수 있다. 첫 번째는 예를 들어 21번째 단계에 해당하는 그림을 그려 바둑돌의 개수를 하나씩 모두 세어 21번째 바둑돌의 개수를 구하는 방법이다. 두 번째는 4씩 늘어나는 규칙성을 찾거나 '4, 8, 12, 16 …'의 수 패턴을 보고 각 단계의 바둑돌의 개수가 4의 배수가 된다는 것은 인식하였지만, 여기에서 더 나아가지 못하고 4씩 계속 더해서 21번째 바둑돌의 개수를 구하는 방법이다. 두 방법 모두 특정 단계의 바둑돌의 개수를 세거나 연속적인 더하기로 구할 수는 있었지만 대수적으로 나아가지는 못하였다.

2) 대수적 일반화

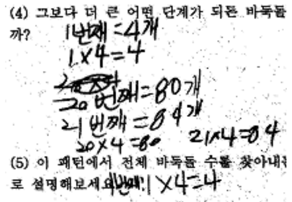
- 사실적 일반화

산술적 일반화에서 한 단계 더 발전하여 대수적 일반화의 사실적 일반화 방법을 나타낸 23명(8.0%)의 학생들은 특정한 몇몇 단계를 선택하여 일반화할 수 있었다. 사실적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 [그림 Ⅳ-5]에 제시된 학생 S1F1과 S1F2와 같이 4를 연속하여 더하지 않고도 규칙성을 활용하여 답을 구할 수 있었다. 산술적 일반화에서 한 단계 더 발전하여 대수적 일반화의 사실적 일반화 방법을 나타낸 23명(8.0%)의 학생들은 특정한 몇몇 단계를 선택하여 일반화할 수 있었다. 사실적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 [그림 Ⅳ-5]에 제시된 학생 S1F1과 S1F2와 같이 4를 연속하여 더하지 않고도 규칙성을 활용하여 답을 구할 수 있었다.

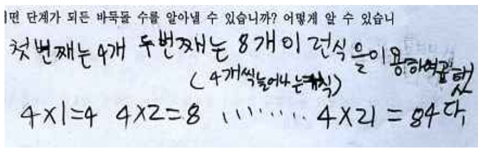
- 맥락적 일반화

맥락적 일반화 방법을 나타낸 18명(6.0%)의 학생들은 각 단계의 바둑돌의 개수가 4의 배수임을 알고 이것을 말로 기술한 학생들이다. [그림 Ⅳ-6]에서 학생 S1C1은 21단계의 바둑돌의 개수를 구하는 동시에 그 과정을 설명하고 있다. 이 학생은 4단계를 예로 들어 설명한 후 '몇 번째, □ 번째, 이 □에 들어가는 수와 4를 곱하면 바둑돌의 수를 구할 수 있다'라고 일반화했다.

학생 S1F1의 일반화 방법

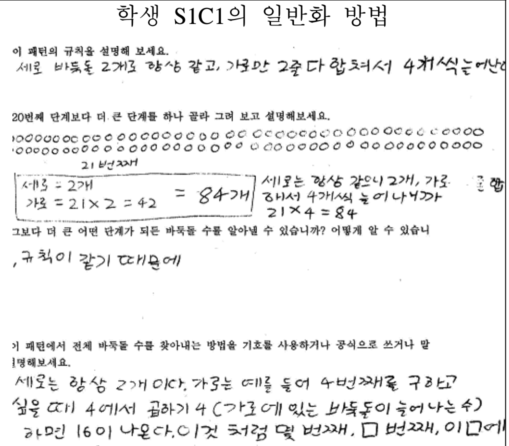


학생 S1F2의 일반화 방법



[그림 Ⅳ-5] ax 유형: 사실적 일반화의 예

학생 S1C1의 일반화 방법



[그림 Ⅳ-6] ax 유형: 맥락적 일반화의 예

- 기호적 일반화

1번 문항에서 기호적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 153명(52.8%)이었다. 이 학생들은 '4, 8,

12, 16 …’ 으로 변하는 수에 근거하여 바둑돌의 개수는 ‘단계×4’라는 식을 제시하거나, 세로는 항상 2개이고 가로는 ‘단계수×2’이라는 것에 착안하여 바둑돌의 개수는 ‘세로×가로’에서 ‘2×(단계수×2)’라는 식을 제시하였다.

3) 오답

1번 문항에 대해 오답을 나타낸 학생들은 10명(3.5%)이었으며, 이 학생들의 응답은 다시 두 가지로 분류될 수 있었다. 첫 번째는 규칙성을 전혀 찾지 못하고 5단계와 6단계의 바둑돌의 개수를 구하지 못한 경우이다. 두 번째는 단계가 늘어날수록 바둑돌의 개수가 4개씩 증가한다는 규칙성은 찾았지만 다음 단계에 적용하지 못하여 5단계와 6단계의 바둑돌의 개수를 구하지 못한 경우이다.

나. 증가패턴 x+a 유형: 2번 문항

증가패턴 x+a 유형은 우리나라 교과서에 자주 등장하는 형태이며, 식으로 일반화하는 문제 또한 교과서에서 다루고 있다. 2번 문항에서 대수적 일반화 방법과 산술적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 각각 142명(49.0%), 83명(28.6%)이었으며, 오답을 제시한 학생들은 65명(22.4%)이었다. 증가패턴 x+a 유형이 우리나라 교과서에서 자주 다루는 형태인 점을 고려할 때 오답을 제시한 학생들이 비율이 다소 높게 나타났다고 할 수 있다.

1) 산술적 일반화

2번 문항에서는 83명(28.6%)의 학생들이 산술적 일반화 수준에 머물러 있었다. 이 수준의 학생들은 5단계의 그림을 그려서 둘레의 길이가 7cm라는 것을 구하고, 삼각형 하나가 늘어날 때마다 둘레의 길이가 1cm씩 늘어난다는 규칙을 설명할 수 있었다. 그러나 단계가 늘어날 때마다 1을 연속하여 더하는 방식으로 일반화를 시도함으로써 20단계 이상 큰 단계에서는 도형의 둘레의 길이를 구하지 못하였다.

2) 대수적 일반화

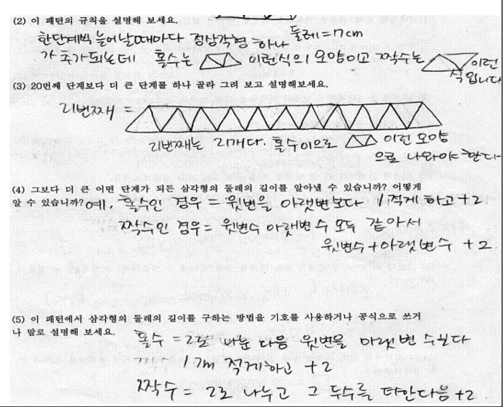
- 사실적 일반화

2번 문항에서 사실적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 4명(1.4%)이었다. 이 학생들은 단계의 수에 2를 더하여 특정 단계에서의 도형의 둘레의 길이는 구할 수 있었다. 그러나 도형의 길이를 구하는 일반적인 방법을 제시하지는 못하였다.

- 맥락적 일반화

2번 문항에서 맥락적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 8명(2.8%)이었다. [그림 Ⅳ-7]은 맥락적 일반화 방법을 나타낸 학생 S2C1의 방법을 제시한 것이다. 이 학생은 먼저 홀수 단계와 짝수 단계에서의 도형의 모양이 각각 사다리꼴과 평행사변형 모양으로 서로 다르다는 것을 인식하였다. 그 다음에는 홀수 단계에서는 ‘2로 나눈 다음 윗변을 아랫변 수보다 1개 적게 하고+2’, 짝수 단계에서는 ‘2로 나누고 그 두 수를 더한 다음+2’라는 일반화된 표현을 제시하였다.

학생 S2C1의 일반화 방법



[그림 Ⅳ-7] x+a 유형: 맥락적 일반화의 예

• 기호적 일반화

2번 문항에서 기호적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 130명(44.8%)이었다. 대다수의 학생들은 'x+2'의 형태의 식을 제시하였고, 일부 학생들은 '(단계-2)+4'와 같은 식을 제시하였다. '(단계-2)+4'라는 식을 제시한 학생들은, 각 단계의 도형에서 양 끝에 있는 삼각형은 두 개의 변이 둘레에 포함되고 도형의 안쪽에 있는 삼각형은 한 변만 도형의 둘레에 포함된다는 인식에서 시작하였다. 각 단계의 도형에서 삼각형의 개수는 단계의 수와 같으므로 안쪽에 있는 삼각형의 개수는 '단계-2'개이고, 따라서 둘레의 길이를 '(단계-2)+4'라고 설명하였다.

3) 오답

2번 문항에서 오답을 제시한 학생들은 65명(22.4%)로 나타났다. 오답을 제시한 대부분의 학생들은 도형의 둘레의 길이와 도형에 포함된 삼각형들의 변의 개수를 혼동하였다. 대표적인 응답을 예로 들어 설명하면, 하나의 삼각형의 둘레는 3cm이고 하나의 삼각형에 또 하나의 삼각형을 붙이면 삼각형의 둘레가 총 5cm가 된다는 것이다. 따라서 5단계 도형의 둘레의 길이는 하나의 삼각형에 4개의 삼각형을 붙였으므로 '3+2+2+2+2=11cm'라고 답하였다. 이 학생들은 문제에서 요구하는 '도형의 둘레의 길이'의 의미를 정확하게 이해하지 못하여 오답을 제시했다고 할 수 있다.

다. 증가패턴 ax+c 유형: 3번 문항

3번 문항에서 대수적 일반화 방법과 산술적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 각각 139명(47.9%), 129명(44.5%)이었고, 오답을 제시한 학생들은 22명(7.6%)이었다. 산술적 일반화를 나타낸 학생들과 대수적 일반화를 나타낸 학생들의 비율이 거의 유사하게 나타났다.

1) 산술적 일반화

산술적 일반화 방법을 나타낸 129(44.5%)명의 학생들은 단계가 하나 커질 때마다 새가 2마리씩 늘어나는 규칙성에 집중하여 구체적인 단계에서의 새의 마릿수를 구하였다. 예를 들어 21단계에서 새의 마릿수를 구할 때 '3, 5, 7, …, 43'과 같이 2씩 늘이면서 43을 구하였다.

2) 대수적 일반화

• 사실적 일반화

사실적 일반화 방법을 사용한 8명(2.8%)의 학생들은 단계의 수와 새의 마릿수의 관계를 파악하여 일반화했으나 특정 단계에서의 새의 마릿수만을 구할 수 있었다. 예를 들어 21단계에서 새의 마릿수를 구할 때 왼쪽에 있는 새가 22마리, 오른쪽에 있는 새가 21마리이므로 새는 모두 23마리가 있다고 응답하였다.

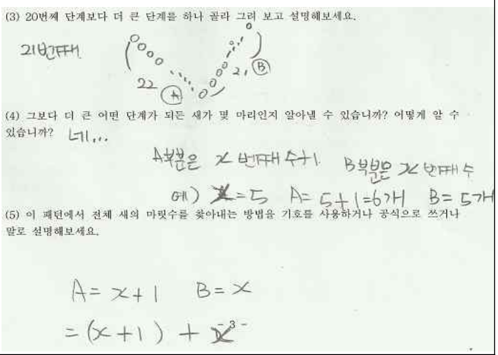
• 맥락적 일반화

맥락적 일반화 방법을 사용한 10명(3.4%)의 학생들은 학생 자신의 언어로 일반화를 시도하였다. 예를 들어 '가운데 1마리를 제외하면 왼쪽과 오른쪽 각각에 □번째 □에 들어가는 수와 같다'와 같이 일반화를 표현하였다.

• 기호적 일반화

기호적 일반화에 성공한 121명(41.7%)의 학생들이 제시한 식은 크게 두 가지 형태로 나타났다. 첫 번째는 가운데에 있는 새와 양쪽에 있는 새를 구분하여 '(x×2)+1'라는 식을 제시한 경우이다. 두 번째 형태는 새를 절반으로 나누어 한 쪽은 x, 다른 쪽은 x+1이므로 새의 마릿수는 'x+(x+1)'이라는 식을 제시한 경우이다([그림 Ⅳ-8] 참고).

학생 S3S1의 일반화 방법



[그림 Ⅳ-8] ax+c 유형: 기호적 일반화의 예

3) 오답

3번 문항에서 오답을 제시한 학생들은 22명(7.6%)로 나타났다. 이 학생들의 대부분은 단계가 늘어날 때마다 2씩 늘어나는 규칙을 인식하였지만 'x+2'나 'x×2'라는 잘못된 식을 제시하였다.

라. 증가패턴 ax+c 유형: 4번 문항

4번 문항에서 대수적 일반화 방법과 산술적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 각각 90명(31.1%), 140명(48.3%)이었고, 오답을 제시한 학생들은 60명(20.7%)이었다. 동일한 증가패턴 ax+c 유형의 3번 문항과 4번 문항에 대한 학생들의 일반화 방법은 크게 차이가 나타났다. 3번 문항에서는 대수적 일반화와 산술적 일반화를 시도한 학생들의 비율이 각각 139명(47.9%), 129명(44.5%)로 비슷하게 나타났지만, 4번 문항에서는 대수적 일반화를 시도한 학생들이 90명(31.1%)로서 산술적 일반화를 시도한 학생들 140명(48.3%)보다 낮게 나타났다. 또한 오답을 제시한 학생들도 3번 문항에서는 22명(7.6%)이었지만, 4번 문항에서는 60명(20.7%)로 높게 나타났다

1) 산술적 일반화

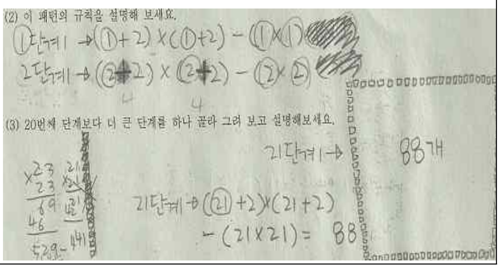
4번 문항에서 산술적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 140명(48.3%)이었다. 이 학생들은 1단계부터 21단계까지의 타일의 개수를 계속 적으면서 21단계에 있는 타일의 개수를 구하였다.

2) 대수적 일반화

- 사실적 일반화

4번 문항에서 사실적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 8명(2.8%)이었다. 사실적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 21단계와 같은 구체적인 단계에서 타일의 개수를 구할 수 있었지만 일반화된 표현을 제시하지는 못하였다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-9]에 제시된 학생 S4F1의 방법을 살펴보면, 이 학생은 속이 모두 채워져 있는 도형의 타일의 개수에서 속에 있는 타일의 개수를 빼서 테두리에 있는 타일의 개수를 구하고 있다. 1단계와 2단계에서 타일의 개수를 각각 (1+2)×(1+2)-(1×1), (2+2)×(2+2)-(2×2)로 구한 다음, 21단계의 타일의 개수를 (21+2)×(21+2)-(21×21)=88로 구하고 있다. 그러나 이 학생은 일반화된 수학적 표현을 제시하지는 못하였다.

학생 S4F1의 일반화 방법



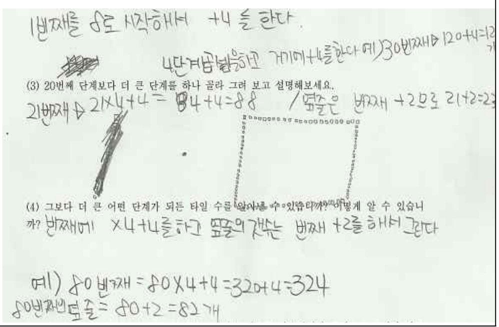
[그림 Ⅳ-9] ax+c 유형: 사실적 일반화의 예

- 맥락적 일반화

4번 문항에서 맥락적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 8명(2.8%)이었다. 맥락적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 문제의 상황에 의존하여 일반화를 언어적으로 설명하였다. 예를 들어 [그림

Ⅳ-10]에 나타난 학생 S4C1은 21단계와 30단계의 타일의 개수를 구한 후에 '번째에 ×4+4를 하고 옆줄의 개수는 번째 +2를 해서 그린다'라고 설명하고 있다. 이 학생은 일반화된 표현을 제시하기 위해 노력하고는 있지만 기호적 일반화에는 성공하지 못하고 있다.

학생 S4C1의 일반화 방법



[그림 Ⅳ-10] ax+c 유형2 : 맥락적 일반화의 예

• 기호적 일반화

4번 문항에서 기호적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 74명(25.5%)이었다. 싱징적 일반화에 성공한 학생들이 제시된 패턴을 재구조환 방법은 7가지로 다양하게 나타났다. 이 중에서 대표적인 2가지 방법을 살펴보면, 첫 번째 방법은 1단계, 2단계, 3단계, 4단계의 타일의 개수가 각각 8, 12, 16, 20이므로 타일의 개수가 4씩 늘어나고, 4×2에서 시작하여 '4×3, 4×4, …'와 같이 타일의 개수가 증가한다고 설명하였다. 결국 4에 단계의 수보다 1 더 큰 수를 곱하므로, y를 단계의 수라고 했을 때 타일의 개수는 '4×(y+1)'이 된다고 설명하였다. 두 번째 방법은 패턴을 속이 채워진 정사각형으로 보고 속에 있는 타일의 개수를 빼는 방식으로 설명하였다. 21단계의 타일의 개수는 (23×23)-(21×21)=88이며, □를 단계의 수라고 하고 □+2를 △라고로 했을 때 타일의 개수는 '(△×△)-(□×□)'라고 설명하였다.

3) 오답

4번 문항에서 오답을 제시한 학생들은 60명(20.7%)로 나타났다. 이 학생들의 대부분은 단계의 수가 늘어날수록 타일의 개수가 4개씩 늘어나는 규칙에 주목하여 'x×4'라는 옳지 않은 식을 제시하였다. 또는 '가로×세로'를 이용하여 타일의 개수를 구하려는 시도를 하였지만 속에 있는 타일의 개수를 처리하지 못하고 '(단계+2)×(단계+2)'와 같은 잘못된 식을 제시하였다.

마. 증가패턴 ax2 유형: 5번 문항

5번 문항에서 대수적 일반화 방법과 산술적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 각각 148명(51.0%), 62명(21.4%)이었고, 오답을 제시한 학생들은 80명(27.6%)이었다. 증가패턴 ax2 유형과 관련된 내용이 초등학교 교과서에서 거의 다루어지지 않는 점을 고려했을 때, 148명(51.0%)이라는 다수의 학생들이 대수적 일반화 방법을 활용하고 있음을 주목할 필요가 있다.

1) 산술적 일반화

5번 문항에서 산술적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 62명(21.4%)이었다. 다른 문항들에서는 연속적으로 동일한 수를 더하여 큰 단계에서의 값을 쉽게 구할 수 있었다. 그러나 ax2 유형에서는 연속적으로 같은 수가 증가하는 것이 아니기 때문에, 산술적 일반화를 한 학생들 대부분은 6단계의 그림을 그려서 달걀의 개수를 직접 세어서 답을 구하였다.

2) 대수적 일반화

• 사실적 일반화

5번 문항에서 사실적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 16명(5.5%)이었다. 사실적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 특정 단계를 예로 들어 설명하였다. 예를 들어, 1단계, 2단계, 3단계의 달

걀의 개수가 각각 1×1=1, 2×2=4, 3×3=9이라는 것에서 규칙성을 파악하여 21단계의 달걀의 개수는 21×21=441라고 구하였다. 또한 100번째 달걀의 개수는 100×100을 계산해서 10000이 된다고 응답하였다. 그러나 일반적인 표현을 제시하지는 못하였다.

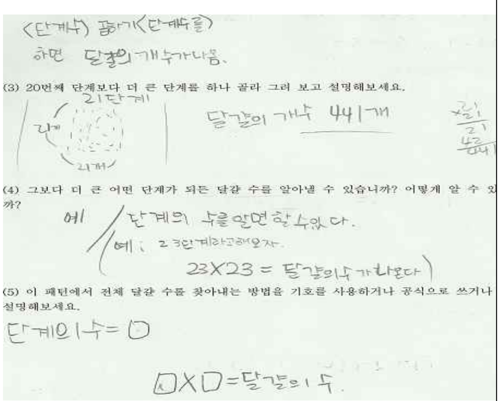
- 맥락적 일반화

5번 문항에서 맥락적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 6명(2.1%)이었다. 맥락적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 문제의 상황에 의존하여 일반화를 언어적으로 설명하였다. 예를 들어, 한 학생은 '그 단계 곱하기 단계를 하면 된다'와 같이 언어적으로 설명하였다. 이 학생은 일반화된 표현을 제시하기 위해 노력하고 있지만, 기호적 일반화에 성공하지 못하고 맥락적 일반화에 머무르고 있음을 알 수 있다.

- 기호적 일반화

5번 문항에서 기호적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 126명(43.4%)이었다. 학생들이 제시한 일반화된 표현은 '□×□', '단계 수×단계 수' 등으로 나타났다([그림 Ⅳ-11] 참고).

학생 S5S1의 일반화 방법

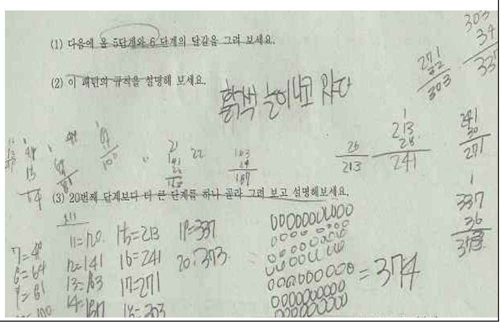


[그림 Ⅳ-11] ax2 유형: 기호적 일반화의 예

3) 오답

5번 문항에서 오답을 제시한 학생들은 80명(27.6%)로 나타났다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-12]에 제시된 학생 S5W1의 방법을 살펴보면, '홀수씩 늘어나고 있다'고 규칙을 설명한 후 실제로 20단계까지 일일이 숫자를 더하고 있다. 그리고 홀수씩 늘어난다는 자신의 규칙에 따라 수를 계속 더했지만 20단계에서는 틀린 답을 제시하고 있다.

학생 S5W1의 일반화 방법



[그림 Ⅳ-12] ax2 유형 : 오답의 예

바. 증가패턴 ax2+c 유형: 6번 문항

6번 문항에서 대수적 일반화 방법과 산술적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 각각 73명(25.2.0%), 85명(29.3%)이었고, 오답을 제시한 학생들은 132명(45.5%)이었다. 초등학교 6학년 학생들에게 가장 생소한 증가패턴이었던 만큼 대수적 일반화 방법을 나타낸 학생들의 비율이 6개의 문항 중에서 가장 낮게 나타났다.

1) 산술적 일반화

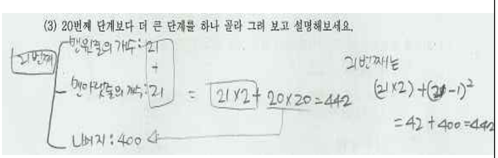
6번 문항에서 산술적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 85명(29.3%)이었다. 이 학생들은 1단계, 2단계, 3단계, 4단계, 5단계의 타일의 개수가 2, 5, 10, 17, 26이며, 각 단계에서 다음 단계로 갈수로 타일의 개수가 각각 3, 5, 7, 9개로 늘어난다는 규칙성을 이용하여 6단계 타일의 개수가 26+11=37이라는 것을 구하였다.

2) 대수적 일반화

● 사실적 일반화

6번 문항에서 사실적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 3명(1.0%)이었다. 사실적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 각 단계에 있는 타일의 개수를 구하기 위한 규칙성을 인식하여 특정 단계에서의 타일의 개수를 구하였다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-13]에 나타난 학생 S6F1의 방법을 살펴보면, 21단계에서 맨 윗줄과 아랫줄의 타일 개수는 각각 21개이며 그 사이에 있는 나머지 타일 개수는 20×20=400이므로, 타일의 개수는 442개라고 설명하고 있다.

학생 S6F1의 일반화 방법



[그림 Ⅳ-13] ax2+c 유형: 사실적 일반화의 예

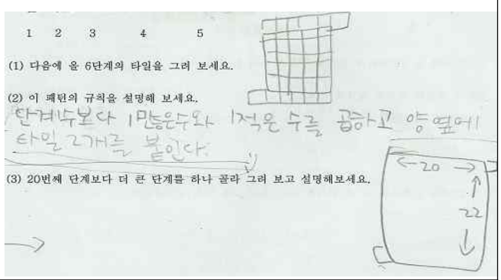
● 맥락적 일반화

6번 문항에서 맥락적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 4명(1.4%)이었다. 맥락적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 문제의 상황에 의존하여 일반적인 규칙성을 언어적으로 설명하였다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-14]에 나타난 학생 S6C1의 방법을 살펴보면, 단계에 제시된 모양을 큰 직사각형 모양 1개와 날개 타일 2개로 재구조화하고, '단계 수보다 1 많은 수와 1 적은 수를 곱하고 양옆에 타일 2개를 붙인다.'고 언어적으로 설명하고 있다.

● 기호적 일반화

6번 문항에서 기호적 일반화 방법을 나타낸 학생들은 66명(22.8%)이었다. 이 학생들은 먼저 제시된 도형을 가운데 직사각형 모양 1개와 양쪽 날개 2개로 재구조화하였다. 그런 다음에는 가운데 직사각형 모양의 가로와 세로에 각각 '단계-1', '단계+1'개의 타일이 있으므로 '단계-1'과 '단계+1'을 곱하여 직사각형 모양에 들어 있는 타일의 개수를 구하고 양쪽에 있는 타일 2개를 더하여서, '(x+1)×(x-1)+2'라는 식을 제시하였다.

학생 S6C1의 일반화 방법



[그림 Ⅳ-14] ax2+c 유형 : 맥락적 일반화의 예

3) 오답

6번 문항에서 오답을 제시한 학생들은 132명(45.5%)로 나타났다. 6개의 문항 중에서 오답을 제시한 학생들의 비율이 가장 높게 나타났다. 이 학생들의 대부분은 6단계의 타일 그림은 정확하게 그렸지만 규칙성을 제대로 찾지 못하여 일반화를 전혀 시도하지 못하였다.

Ⅴ. 결론

본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들의 증가 패턴의 유형에 따른 일반화 방법의 특징을 조사하였다. 본 연구의 결과를 바탕으로 패턴의 일반화와 관련된 교수학적 시사점을 제하면 다음과 같다.

첫째, 학생들에게 증가패턴의 일반화 활동을 제공할 때는, 규칙성을 일반적인 식으로 표현했을 때 그 식에 연산이 한 종류만 포함되어 있는 것부터 두 종류 이상이 포함되어 있는 것으로 진행할 필요가 있다. 본 연구에서 학생들의 대수

적 일반화 수행 정도가 높게 나타난 유형은, 규칙성을 일반적인 식으로 표현했을 때 그 식에 연산이 한 종류씩만 포함되어 있는 유형이었다. 학생들의 대수적 일반화 수행은 ax 유형에서 가장 높게 나타났고, ax2, x+a, ax+c, ax2+c 유형의 순서로 낮게 나타났다. 또한 대수적 일반화의 가장 높은 수준인 기호적 일반화에서는, ax 유형에서 기호적 일반화 수행이 가장 높게 나타났고, 그 다음으로는 x+a, ax2, ax+c, ax2+c 유형의 순서로 수행 정도가 낮게 나타났다. 그러므로 증가패턴의 일반화 활동을 학생들에게 제공하고자 할 때는 ax x+a, ax2, ax+c, ax2+c의 순서로 점진적으로 제공하는 것이 바람직하다고 할 수 있다.

둘째, 학생들이 패턴의 일반화를 학습할 때 가능하면 다양한 맥락의 패턴을 학생들에게 제공할 필요가 있다. 본 연구 결과, 동일한 증가패턴 유형이라고 하더라도 패턴의 맥락에 따라 학생들의 일반화 수행 정도는 그 차이가 크게 나타났다. 예를 들어, 동일한 ax+c 유형의 증가패턴인 3번 문항과 4번 문항에 대해, 기호적 일반화에 성공한 학생들은 각각 121명(41.7%), 74명(25.5%)로 나타났다. 이는 동일한 패턴 유형에 대해 가능하면 다양한 맥락을 제공하고, 학생들에게 익숙한 전형적인 패턴 맥락뿐만 아니라 학생들에게 생소한 여러 가지 맥락을 제공할 필요가 있음을 시사한다. 패턴 탐구의 장점은 여러 가지 표현의 변환을 통하여 수학 내 영역간의 연결성, 실생활과의 연결성, 타 교과와의 연결성을 높일 수 있는 다양한 자료를 활용할 수 있다는 것이다(김성준, 2002). 따라서 학생들이 다양한 맥락 속에서 수학적 패턴을 찾고 일반화하는 경험을 할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

셋째, 본 연구에서 학생들이 이차식 ax2 유형의 5번 문항에서 보인 상대적으로 높은 일반화 수행 정도는 패턴의 일반화와 관련된 수학 교수·학습에 시사하는 바가 크다고 할 수 있다. 본 연구 결과, 5번 문항의 대수적 일반화와 기호적 일반화에 성공한 학생들은 각각 148명(51.0%), 126명(43.4%)로 상대적으로 높게 나타났는데, 이는 우리나라 학생들에게 익숙한 x+a 유형의 일반화와 거의 유사한 수행 정도이다. 이것은 ax2 유형의 일반화가 이차식으로 표현되기는 하지만, 적절한 상황이 주어진다면 초등학교 학생들이 ax2 유형에서 의미있는 일반화 활동을 경험할 수 있음을 시사한다. 특히 단계가 커질 때 증가하는 양이 일정한 패턴에 익숙한 학생들에게 단계가 커질 때 증가하는 양이 일정하지 않은 ax2 유형의 패턴은 학생들에게 인지적 갈등을 유발하기에도 효과적이라고 할 수 있다.

넷째, 본 연구에서 조사한 이차식 ax2+c 유형의 6번 문항에 대해서는 학생들의 일반화 수행이 매우 낮게 나타났다. 산술적 일반화와 대수적 일반화에 성공한 학생들이 각각 85명(29.3%), 73명(25.2%)로 다른 유형의 일반화 수행에 비해 매우 낮은 수준인 것으로 나타났다. 또한 오답을 제시한 학생들이 132명(45.5%)으로서 학생들이 6번 문항을 일반화하는 데에 큰 어려움을 겼었음을 알 수 있다. 따라서 이차식 ax2+c 유형의 패턴 일반화 활동을 초등학교 학생들에게 제공하는 것은 바람직하지 않다고 할 수 있다.

한편, 본 연구에서는 증가패턴에 국한하여 학생들의 일반화 방법을 조사하였다. 증가패턴의 여러 유형에 따른 학생들의 일반화 방법을 조사한 것과 유사하게 감소패턴의 여러 유형에 따른 학생들의 일반화 방법을 조사하는 것도 의미있는 추후 연구 주제가 될 수 있을 것이다. 또한 증가패턴과 감소패턴에 대한 학생들의 일반화 방법을 비교 조사하는 연구도 추후에 수행될 필요가 있다고 생각된다.

참 고 문 헌

강현영(2007). 패턴탐구를 통한 일반화와 기호표현-시각적 패턴을 중심으로. **학교수학, 9**(2), 313-326.

교육인적자원부(2007). **2007년 개정 수학과 교육과정**. 교육인적자원부.

교육과학기술부(2010a). **수학 4-1**(실험본). 두산동아.

교육과학기술부(2010b). **수학 5-1**(실험본). 두산동아.

교육과학기술부(2011). **2009년 개정 수학과 교육과정**. 교육과학기술부.

김상미(1997). **수학적 패턴에 관한 학습 프로그램 개발 연구-초등학교 4학년을 대상으로**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

김성준(2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰-패턴에 기초한 대수 도입을 중심으로. 수학교육학연구, 12(3). 353-369.

김성준(2003). '초기대수'를 중심으로 한 초등대수 고찰. **수학교육학연구, 13**(3), 309-327.

김은숙(2009). 초등학교 6학년의 패턴의 일반화를 통한 대수 학습에 관한 연구. **학교수학, 23**(2), 399-428.

김정환(2003). **교육연구 및 통계방법**. 원미사.

류창열(1998). **교육연구기법**. 배영사.

우정호 외(2006). **수학교육학 연구방법론**. 경문사.

이양락 외(2005). **2004년 국가수준 교육성취도 평가 연구-총론**. 한국교육과정평가원 연구보고. RRE 2005-1-1.

정홍춘(2008). 패턴에 기초한 대수 문제해결에서 나타나는 중학생들의 일반화 전략 및 수학적 표현. **학교수학, 24**(4), 219-236.

최신애(2000). **초등학교 수학학습에서의 패턴 탐구 활동에 관한 연구**. 인천교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Britannica (2001). *Mathematics in Context.* 나온교육연구소(역), 수학으로 보는 세상. 서울: 도서출판 나온.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 류희찬 외 공역 (2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. 경문사.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *PME-NA 2006 Proceeding, 28.*

Smith, M. (2007). *Improving instruction in Algebra: Using cases to transform mathematics teaching and learning Volume 2.* Teachers College Press.

Warren, E. & Cooper, T. J. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. *Algebra and algebraic thinking in school mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Examining the Students' Generalization Method in Relation with the Forms of Pattern
- Focused on the 6th Grade Students -

Lee, Muynggi (Icheon Elementary School)
Na, Gwisoo (Cheongju National University of Education)

This research intends to examine how 6th graders (age 12) generalize various increasing patterns. In this research, 6 problems corresponding to the ax, x+a, ax+c, ax2, and ax2+c patterns were given to 290 students. Students' generalization methods were analysed by the generalization level suggested by Radford(2006), such as arithmetic and algebraic (factual, contextual, and symbolic) generalization. As the results of the study, we identified that students revealed the most high performance in the ax pattern in the aspect of the algebraic generalization, and lower performance in the ax2, x+a, ax+c, ax2+c in order. Also we identified that students' generalization methods differed in the same increasing patterns. This imply that we need to provide students with the pattern generalization activities in various contexts.

Key Words: elementary mathematics(초등학교 수학), algebraic thinking(대수적 사고), increasing pattern(증가 패턴), generalization(일반화)

논문접수 : 2012. 8. 19
논문수정 : 2012. 9. 5
심사완료 : 2012. 9. 14