대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 14, No. 3, 315 ~ 330. Sep 2012

초등학교 수준별 수학 수업에서 열린 문제의 활용과 열린 문제 구성 방법에 관한 연구

이 종 영*

다양한 수준에 있는 학생 모두에게 일정 정도의 수학을 가르치기 위해서 제7차 교육과정부터 우리나라에서는 수준별 수업을 교육과정에서 권장하고 있다. 주로 사용되는 수준별 수업 방식은 학생들을 그 수준에 따라 두 세 그룹으로 분리한 후 각 수준에 맞는 별도의 활동과 과제를 제시하는 것이다. 본 연구에서는 이런 분리된 수준별 수업을 개선하기 위하여 여러 수준의 학생들을 통합하여 지도하는 방안을 모색하고자 하였다. 영재아를 지도하거나 창의성을 신장하기 위한 수학 수업과 관련해서만 열린 문제에 관한 연구가 이루어져왔다. 그러나 본 연구는 보통의 수학 교실에서 열린 문제는 다양한 수준의 학생들도 반응을 보일 수 있고, 이러한 다양한 반응을 교사가 통합할 수 있다면 낮은 수준의 학생이 잠재적 발달수준으로 수준 상승이 이루어지도록 도울 수 있다는 논의를 바탕으로 열린 문제와 병행 과제를 활용하는 방안을 생각하여 보았다.

Ⅰ. 서론

미국에서는 새롭게 도래될 정보화 사회에 학생들을 적응시키기 위하여 그리고 경제적인 측면에서 이전보다 수학적 소양을 갖춘 노동자의 필요성, 과학 기술과 고용 양상의 빠른 변화에 대처하기 위해 평생 교육을 받을 수 있는 유연성 있는 노동력 확보와 학생들이 받는 교육의 상이한 질을 통해 야기되는 사회적 불평등, 정치적인 측면에서 정치적 사회적 의사결정이 기술적으로 매우 복잡한 현대 사회에서 교육을 잘 받아 올바른 판단 능력과 정보를 잘 갖춘 민주 시민 양성의 필요성 등 이러한 다방면적인 문제를 해결하기 위하여 수학 교육의 개선을 1990년대부터 모색하여 오고 있다(NCTM, 1989). 이런 모색은 한 마디로 '수학적 힘의 신장'으로 말할 수 있는데, '수학적 힘'이란 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학에 관한 또는 수학을 통한 의사소통 능력, 수학 내에서 또는 수학과 다른 학문적 영역 사이의 연결 능력, 문제해결이나 의사결정 과정에서 수량과 공간에 관한 정보를 찾고 평가하고 사용하려는 성향과 자신감을 포함하는 것으로 인지적 측면과 정의적 측면을 모두 포함하고 있는 것이다.

NCTM(1989)의 "수학교육과정과 평가의 새로운 방향"에서 강조되기 시작한 수학적 의사소통 능력은 수학 교수 학습에서 그 중요성이 널리 받아 들여 지고 있다. 새로 개정된 수학교육 과정에서도 의사소통과 관련된 다음과 같은 목표를 제시하고 있다(교육과학기술부, 2011).

수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활주변이나 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으

* 전주교육대학교, goma@jnue.kr

로 해결하는 능력을 기른다(3쪽).

수학적 의사소통이란 학생들 사이에 그리고 교사와 학생들 사이에 수학에 관한 정보, 아이디어, 느낌 등을 교환하기 위해 읽고, 쓰고, 아이디어를 토론하는 활동 또는 과정이다. 수학에 대한 생각과 이해 정도를 표현할 수 있는 지속적인 기회를 갖는다면 학생들은 수학을 아는 것이 수학을 행하는 것임을 깨닫고 수학을 확장시킬 수 있을 것이다(이종희, 김선희, 1998; p. 691). 따라서 학생들은 누구나 수학적 아이디어를 이해할 수 있도록 표현하고 그 표현을 이해할 수 있는 능력을 배워야 한다.

오늘날 수학 교실에서 학생들의 의사소통 능력이 강조되고 있는 것은 수학적 아이디어를 표현하고 수학에 관해 토론하고, 읽고, 쓰고, 듣는 활동을 통하여 수학적 사고 능력과 판단 능력을 길러줄 수 있기 때문이다. 또한 수학적 의사소통을 통해 자신의 아이디어나 생각을 말이나 글로 표현함으로써 자신의 수학적 사고를 체계화하고 다른 사람과 수학적 의사소통을 통해 학생들 자신의 사고 과정을 재정립하고, 지식을 구성해 나갈 수 있기 때문이다(이은주, 이대현, 2011).

수학은 학생들 사이에 학력 격차가 심한 교과이며 한 교실에 다양한 수준의 학생들이 존재하고 있다. 개념과 용어, 기호의 이해 정도가 다른 학생들이 각기 자기 수준에서 주어진 수학적 상황에서 다양한 반응을 보이고 이런 다양한 반응들을 교사들이 의사소통을 통해 서로 관련시키는 역할을 할 수 있다면, 수준이 낮은 학생들이나 수준이 높은 학생에게 모두 유익한 활동이 될 수 있다는 것이 본 연구의 기본 아이디어이다. 이런 아이디어를 실현하기 위해 다른 수준의 학생들이 자신이 처해 있는 수준에서도 적절한 수학적 반응을 보일 수 있는 상황 구성에 관하여 살펴보고자 한다.

이런 상황을 구성하기 위해 본 연구자가 생각한 것이 열린 문제를 도입하는 것이다. 수업 시간에 교사가 하는 발문이나 사용하는 문제의 대부분이 닫힌 발문 닫힌 문제라고 한다(Haylock, 2007). 우리나라 수학교과서에 제시된 수학 문제도 거의 모두가 닫힌 문제이다.

따라서 본 연구에서는 교과서에 제시된 닫힌 문제를 어떻게 열린 문제를 변화시킬 것인지 그 방법에 관한 논의와 더불어 열린 문제가 제시되고 그 후에 이루어지는 교사와 학생들 사이의 의사소통 혹은 학생들 사이의 수학적 의사소통을 통해 얻을 수 있는 유익에 관하여 살펴보려고 한다. 이는 기존의 수준별 수업을 개선하는데 일조할 수 있을 것이다.

II. 이론적 배경

1. 수학 학습에서 의사소통의 역할

비고츠키 이론에서 '내면화' 과정은 매우 중요하다. 피아제(J. Piaget)는 어린 아동의 물리적 세계와의 상호작용에 관심을 두면서 상호작용의 결과가 내면화되는 것을 주로 발달의 자연적인 순서와 관련시킨 반면 비고츠키는 내면화를 사회적, 문화적인 것과 관련시킨다. 그에게 있어 내면화는 사회적 현상을 심리적으로 변형시키는 과정이며, 외적인 수준에서 수행되어 왔던 활동 유형 중 어떤 측면이 내적인 수준에서 실행되는 과정이다. 그리고 공유된 환경에 있던 정신기능들이 개인 내로 들어오는 지점을 그는 자신의 독창적인 개념인 '근접 발달영역'이라고 하였다. 비고츠키는 아동발달에 영향을 미치는 사회적 관계를 강조하는데, 여기에서 사회적 관계란 '교수적 관계'를 말하는 것으로서 이때 교수자는 교사, 부모와 같은 성인이거나 자신의 또래일 수

있다. 자신의 환경 속에 있는 이들과의 상호작용을 통해 '중재된 학습 경험'을 가짐으로써 아동 내부의 발달 과정은 일깨워지고 아동이 이를 내면화함으로써 독립적인 성취를 이룰 수 있게 된다(Vygotsky, 1978).

비고츠키와 논점이 다소 다르지만 피아제 역시 또래 아동들과의 협동 활동이 아동의 인지 발달에 영향을 미친다고 주장한다. 피아제에 의하면, 아동들의 협동 활동은 인지적 갈등을 낳는 상황을 초래하고, 또래들과의 인지적 갈등, 불일치를 통해 아동들은 자신의 견해와 타인의 견해 간의 차이점을 깨닫게 된다. 이러한 불일치 상황들은 아동으로 하여금 자신의 인지구조를 조절하거나 재조직하는 기회를 갖게 하여 인지 발달을 촉진시키는 수단이 되는 것이다.

비고츠키와 피아제의 이론이 보여주듯이 교수학습에 있어서 아동들 사이의 협동 활동과 의사소통에 의한 그 활동의 공유는 본질적인 부분을 차지한다고 할 수 있다. 이것은 수학 교육에서도 그러하다. 최근의 세계 수학교육계에서 수학적 의사소통 능력의 신장이 중요하게 여겨지는 것도 이와 같은 이유로 볼 수 있다. 수학 수업에서 교사와 학생 사이의 의사소통뿐만 아니라 학생들 사이의 의사소통이 강조되면 다음과 같은 효과를 기대할 수 있다(유현주, 2000).

첫째, 다른 사람들의 사고 방식과 전략들을 고려함으로써 자신들의 수학적 지식이 명확해지고 확장된다. 아동들이 다른 사람들과 의사소통 하려고 함으로써 발생하게 되는 학습 기회는 대화하는 과정에서 자신의 생각을 말로 표현할 때 그리고 함께 활동하는 동료가 하는 말을 해석하고 이해하려고 노력하는 과정에서 발생하게 된다. 협력적인 의사소통은 학생들이 표현함으로써 그리고 또래가 하는 표현을 이해하려고 할 때 자신의 인지적 구성을 재개념화 함으로써 자신이 이해했는지 여부를 명확하게 할 수 있도록 해준다.

둘째, 다른 사람들과 의사소통하기 위해 학생 스스로의 수학적 사고를 체계화하고 명백하게 할 수 있는 기회를 제공한다. 어떤 수학적 개념, 아이디어나 문제에 대한 해결 방법은 의사소통을 통해서 논의의 대상이 되며, 수정하거나 세련되게 만들거나 반성할 대상이 될 수 있다. 여러 가지 사고는 순식간에 이루어지기 때문에 그것을 외부로 표현하지 않으면 초기에 가졌던 생각이나 아이디어는 그 타당성이나 일반화 가능성이 점검될 수 없기 때문에 그 수준 이상으로 발전될 수 없다. 수학적 아이디어와 추론은 언어나 문장으로 표현될 때 좀더 쉽게 점검되고 이해된다. 학생들은 교실에서 보고 듣는 수학을 자신의 것으로 만들어 내면화 하지 않는 한 파지하지 못한다. 일단 자신이 가지고 있는 아이디어가 공개되면 그것들은 점검되고 수정되고 확대될 수 있다.

2. 수학 저성취 학생의 특성과 저성취 원인

일반적인 학습 부진아에 대한 정의는 매우 다양하다. 그래서 이화진 외(1999)는 학습 부진에 대한 누구나 합의할 수 있는 개념이 없는 것으로 보고서 학교 교육에서 학습부진아를 기초학습 부진아와 기본학습 부진아로 구분하여 학습 부진아를 기초학습 부진아와 기본학습 부진아로 구분하여 기초학습 부진아는 주로 전통적인 3R's 즉 읽기(reading), 쓰기(writing), 셈하기(arithmetic)의 기능에 장애를 보이는 학생, 기본학습 부진아는 학습 저성취 학생으로 구분하였다.

학습부진아에 대한 합의된 개념이 없는 이유는 학습부진아에 대한 연구가 교육학, 심리학, 의학 등 여러 학문의 각기 상이한 관점에서 상이한 필요를 충족시키기 위해 진행되었기 때문이며, 기준에 따라서 학습 지진, 학습불안, 학습

저성취 등을 의미하고 있다고 한다(윤성재, 1990).

수학에서 '학습 저성취'는 1차원적인 현상이 아니다. 이것은 수많은 다양한 특징을 가지고 있고, 다양한 여러 형태로 학습부진이 나타나며, 매우 복잡한 요인들이 엉켜있다. 많은 수학 학습 부진아들은 교육과정 상의 대부분 영역에서 부진학생들이다. 영국에서는 10세에서 11세 학생 중에서 수학 학습부진아 215명으로 이루어진 표본에서 75%가 그러한 경향을 보이고 있다고 한다. 또한 전체 교육과정에서 평균 혹은 평균 이상의 성취도를 보이는 상당한 학생들이 특별히 수학에서 어려움을 갖고 있다고 한다(Haylock, 1986).

학습저성취와 관련되는 요인들로 독해 능력과 여러 언어적인 문제가 대표적으로 언급되는며(이화진 외 1999), 또한 그림을 반전시켜 인식하거나 입체물에 대한 빈약한 분류 능력과 같은 지각상의 어려움, 학교에서 뒤떨어진 행동을 보이게 하는 사회성과 정서상의 문제들과 수학 불안을 생각할 수 있다. 또한 운동 기능 장애, 잦은 결석, 어려운 가정 환경, 신체 장애, 건강 문제, 집중 장애를 학습 부진과 관련된 다른 요인으로 생각할 수 있다(Haylock, 1991 pp. 41-44). 수학에 대한 부정적인 태도를 지닌 학생들이 수학 학습에서 특히 어려움을 가지고 있으며, 또한 수학 저성취 학생들은 수행 능력에 일관성이 현저하게 없다고 한다(Houssart, 2004). 즉 어느 순간에는 잘 풀던 수학 문제를 다른 순간에는 전혀 풀지 못한다고 한다.

수학 부진아 즉 수학 저성취 학생 지도에 대한 연구 결과를 보면, 수학 저성취 학생들은 때때로 교사가 예상치 못했던 정도의 수학 성취를 하는 것으로 교사들을 놀라게 한다고 한다. 자신들을 매혹시키는 수학적 과제가 제시될 때 수학 저성취 학생들이 보여주는 예상 밖의 능력과 성취 결과의 예들은 목적 지향적인 과제, 실생활 문제, 수학이 쓸모 있음을 알도록 수학을 사용할 기회를 제공할 때 학습 저성취 학생들은 교사가 기대하지 않았던 일들을 하는 것을 보여주는 것을 볼 때, 이는 수업 자료가 개별학생들에게 맞춤식으로 주어진다면, 높은 성취를 보이는 학생들이 보이는 정도의 수학적 사고의 특징을 학습 부진아들이 보여줄 수 있다는 증거가 된다. 올바른 과제가 제시되었을 때, 수학 부진아들은 예와 반례를 구분하는 능력, 일반화하는 능력, 효율적인 활동 방법을 고안하는 능력, 그리고 높은 수준의 추상화로 이행하고 있음을 보여준다고 한다(Haylock, 2007).

수학 부진에 영향을 미치는 요인에는 '부적당하거나 부적절한 수업'이 있으며, 수학 부진아들의 요구를 만족시켜 준다면서 상업적으로 만들어진 수학 학습지에 대한 경직된 사용, 부진아들이 사전 내용을 충분히 이해하기도 전에 성급하게 새로운 과정으로 이행하는 것, 무의미한 판에 박힌 절차로 수학 과정을 지도하는 것, 그리고 의미도 없고 특별한 목적도 없이 너무나 많은 단절된 과제를 학생들에게 제공하는 것 등을 수학을 지도할 때 나타나는 가장 커다란 결점이라고 한다. 또한 수학 부진아동들을 성공적으로 지도하고 있는 교사들은 학생들이 자신의 의미를 구성할 수 있도록 하고, 생각하거나 과제를 완수할 시간을 충분히 주며, 학생들의 질문으로부터 수학 과제를 만들어 낼 수 있고, 정서적으로 완정된 분위기를 제공할 줄 아는 교사들이라고 주장한다(Haylock, 1991).

Freudenthal(1991)에 의하면 학생들의 수학 학습에서 수준의 상승은 연속적이지 않으며 많은 단계에서 비약(jump)을 거치게 된다. 이는 어느 단계에서 학습의 성공이 곧바로 다음 단계에서 학습의 성공으로 항상 연결되는 것은 않는다는 의미이다. 경험상으로 볼 때 어느 순간에 학

습되는 내용에 대하여 주의집중을 할 수가 없거나 전혀 알아들을 수 없는 외국어처럼 들리다가도 며칠 또는 몇 개월 지난 후에 이해하게 되는 경우가 있으며, 특정 학년에서 전혀 이해하지 못하였던 것이 다음 학년에서 관련된 내용을 학습하면서 자연스럽게 학습되는 경우가 있다. 이는 한 학급 내에도 다양한 수준의 학생들이 혼재하여 있고, 저성취 학생을 위한 적절한 환경 조성이 필요함을 시사한다. 본 논문에서는 이런 다양한 수준의 학생들을 고려할 수 있는 방안에 관하여 살펴보고자 한다.

III. 수준별 수업에서 열린 문제의 필요성

수준별 수업에 관한 기존 연구는 중등학교의 경우 학생들을 수준별 능력별로 상중하 세 그룹으로 나누고 각 그룹에 적절하게 각기 다른 수준의 수업 내용과 학습 자료를 제공하는 것이었다(황혜정, 1998; 정태범 외, 2000). 초등학교의 경우 학생들의 능력과 수준이 다르더라도 동일한 내용을 가지고 기본 수업을 한 후 최종 단계에 가서야 각 수준에 맞는 문제를 제시하는 식이다. 수업 말미에 다른 문제가 제시되기 때문에 각기 다른 수준의 문제를 서로 관련시키기 어렵고, 수학 저성취 아동이 우수한 학생들과의 상호작용을 통해 뭔가 학습할 기회가 주어지지도 않는다. 뿐만 아니라 수업 말미에 가서야 이루어지는 수업 분기는 교사가 저성취 학생에 대한 적절한 피드백을 제공하거나 수업 시간에 학습한 주제에 대한 저성취 학생의 부족한 부분을 보완할 시간이 부족하다. 이런 문제점을 보완하기 위하여 이론적 배경에서 살펴본 수학 저성취 아동에 대한 연구 결과들을 가지고 이들을 지도하기 위해 열린 문제가 필요함을 수준별 수업과 아울러 살펴본다.

첫째, 수학 저성취 학생들에게 수학에 대한 올바른 신념, 자신감, 수학에 대한 흥미 등을 길러 줄 수 있도록 수학 지도가 이루어져야 한다. 비록 현재 학습하고 있는 수학 내용에 대한 이해가 부족하더라도 학생들이 처해있는 수준에서도 수학적 답변을 할 수 있고, 이런 답변이 학급 전체의 수학 학습에 일조할 수 있는 즉 낮은 수준의 학생이 수학 학습 공동체에 일원임을 느끼고 자신이 공동체에 뭔가 도움이 되고 있다는 경험을 제공하여 주는 것이 필요하다. 전통적인 수업은 한 학급 내에서 학생들의 수준이 다양하기 때문에 낮은 수준의 학생들은 보통 수업에서 소외되기 십상이다. 또한 수업 시간에 이루어지는 교사의 발문이 대부분 닫힌 발문이기 때문에 낮은 수준의 학생들이 수학 학습 공동체에 일조하기는 어렵다. 이를 개선하기 위해서는 수학 수업에서 이루어지는 교사의 발문이나 문제가 닫힌 것보다는 열린 것으로 제시하여 각기 다른 수준의 학생들이라도 뭔가 반응을 보일 수 있어야 한다. 이런 다양한 반응들이 수학적 의사소통을 통하여 학생들의 수학적 지식이 성장해 갈 수 있다.

둘째, 수학 학습 부진아들의 주요한 특징이 언어적 이해 능력이 상당히 저조하다는 것이다. 성공적인 수학 학습을 위해서는 언어 능력이 필요한데, 언어 능력을 신장시켜주는 것은 수학 수업의 범위를 벗어난 것으로 생각할 수 있다. 초등학교에서 이루어지는 기존의 수준별 수업은 수업 말미에 학생들에게 각기 수준에 맞는 문제를 제공하고 해결하도록 하는 식이다. 언어적 능력이 부족한 학생에게 그 능력에 맞는 문제만 제시하여 준다고 하면, 주어진 언어적 수준의 문제를 해결할지 몰라도 그 이상의 능력으로 진전하기는 한계가 있을 것이다. 따라서 서로 다른 수준의 문제가 수준이 낮은 학생들에게 제시되어

학생들이 비록 낮은 수준의 문제를 해결하더라도 보다 높은 수준의 문제를 살펴볼 기회를 제공하여 주고 그에 대해 이해하려고 시도하는 것이 필요하다. 따라서 다양한 수준의 문제가 학생들에게 동시에 제시되어 비록 해결할 수 없는 문제가 있더라도 살펴볼 기회를 제공해 주어야 한다. 물론 여기서 주어지는 다른 수준의 문제가 열린 문제로 구성되는 것이 필요하다.

셋째, 수학적 성취가 낮은 수학 학습부진아를 효과적으로 지도한 연구들은 부진아에게 적절한 과제가 제시된다면 상당한 수학적 능력을 발휘한다고 한다. 그러나 기존 수준별 수업은 수업 말미에만 수준별 수업분기가 이루어지고 있다. 따라서 수업 말미가 아닌 주요한 수학적 개념을 지도하는 주 수업 시간 즉 도입과 전개 과정에서 다양한 수준의 아동들을 고려하여야 한다. 그러나 도입과 전개 과정에서 다양한 수준의 아동들을 분리시켜 지도하는 것은 불가능하기 때문에 도입과 전개 과정에서 사용하는 자료가 다양한 수준에 있는 모든 학생들에게 유의미한 단일한 것이어야 한다. 이는 기존의 닫힌 형태로 제시하는 것으로는 불가능하다.

넷째, 기존 수준별 수업에서 수업 말미에 제공하는 수준별 학습지는 각 수준에 해당하는 많은 문제로만 구성되어 있고, 다른 수준의 문제를 살펴볼 수도 없고, 각기 다른 수준의 문제에 접근하는 방법을 관련시키지도 않고 있다. 그래서 낮은 수준의 학생이 높은 수준으로 상승할 수 있는 기회가 원천 봉쇄되고 있는 상황이다. 다시 말하면 학생들이 늘 실제적 발달 수준에 머물러 있게 만들 뿐이다. 따라서 다른 수준의 문제가 동시에 제공되고 이 두 문제를 적절히 관련시키고 수준 낮은 학생들이 수준 높은 학생들의 활동을 관찰 모방할 수 있는 교수·학습 활동이 이루어진다면 낮은 수준의 아동들이 잠재적 발달 수준으로 이행할 수 있는 기회가 될 것이다. 이는 낮은 수준 학생과 높은 수준의 학생들을 분리하여 지도하는 것보다 통합하여 지도하는 것이 의미가 있음을 시사한다.

Ⅳ. 열린 문제를 통한 수준별 수업의 가능성

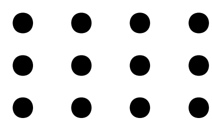
1. 열린 문제를 통한 수학 지도

수준별 수업의 궁극적인 목적은 수업 시간에 한 학급의 다양한 수준과 능력을 가진 학생들의 요구를 만족시켜 주어야 하는 것이다. 이는 각기 학생들에게 각기 다른 과제를 제시하는 것이 적절할 수 있지만 수업을 준비하는 교사의 입장에서는 적절하지 못하다. 따라서 서로 다른 수준에 있는 학생들 비록 저성취 학생이라고 하더라도 각자의 수준에서 여러 접근 방법이나 과정을 통해 다룰 수 있는 하나의 문제를 전체 학생들에게 제시하고, 이 문제에 대한 상이한 접근 방법을 통해 모든 학생들이 유익함을 얻거나 수학 지식이 성장할 수 있는 상황을 제공할 수 있다면 기존의 수준별 수업을 개선하는데 일조할 수 있을 것이다.

다양한 반응이 가능하고 다양한 접근 방식이 가능한 문제를 열린 문제라고 한다. 이 열린 문제는 반드시 하나의 정답만이 존재하는 것은 아니다. 이런 열린 문제가 수학 수업에 제시된다면 다양한 수준의 학생들이 접근 할 수 있을 것이다. 우선 다음에 주어진 닫힌 문제와 열린 문제를 비교하여 보자.

<문제 1> $3\times4=12$는 어느 구구단에 포함될까?

<문제 2> 다음 그림을 수식을 이용하여 나타내어 보아라.



[그림 Ⅳ-1] 닫힌 문제와 열린 문제의 예

닫힌 문제 <문제 1>에 대해 학생들은 3단이나 4단이라고 말할 수 있을 것이다. 그러나 곱셈에 대한 개념이 형성되어 있지 않은 학생은 올바른 대답을 하지 못할 수도 있다. 또한 이 발문을 통해 $3\times4=12$라는 사실을 어떤 학생이 대답하지 못한다고 하면, 이 학생은 곧바로 이어지는 논의에 기여할 기회가 없게 된다. 열린 문제 <문제 2>의 경우는 어떤 수준에 있더라도 반응을 보일 수 있다. 가령 곱셈 개념이 형성되어 있지 않는 학생은 $4+4+4=12$라고 할 수 있고 다른 학생들은 $3\times4=12$ 혹은 $4\times3=12$라고 쓸 수 있다. 또한 보다 높은 수준의 학생들은 나눗셈을 이용하여 $12\div3=4$ 혹은 $12\div4=3$ 혹은 더 나아가 $3\times2+3\times2=12$라고 쓸 수 있다. 이 발문에서는 올바른 반응이 하나만 있는 것이 아니므로 저성취 학생이 대답한 $4+4+4=12$도 옳은 반응이다. 이 반응을 가지고 교사가 곱셈의 핵심 개념인 동수누가를 전체 학생들에게 설명하면서, 곱셈의 의미를 다시 확인시켜 줄 수 있는 기회가 된다. 이 낮은 수준 학생의 반응도 교사에 의해 가치 있는 것으로 받아들여지면 이 학생도 학습 공동체에 일조한 것이다. 수준이 다르더라도 이 답변을 통해 열린 문제를 살펴 본 후에 교실에서 이루어지는 대화에서 그 대화 내용이 풍부해질 수 있을 뿐만 아니라 모든 수준의 아동이 대화에 참여할 수 있고 기여할 수 있을 것이다. 이런 접근은 소외되는 학생이 없이 모든 학생들이 학습 공동체의 중요하고 가치있는 일원이 되는 기회를 제공하여 주며, 수학 저성취 학생을 수동적인 학습자가 아니라 능동적인 학습자로 만들 수 있다는 점에서 교육적 이점이 크다.

열린 문제가 주어진 후에 이루어지는 학급 논의에서 학생들이 학습한 내용을 공고히 하고, 자신감을 갖도록 하기 위해서는 교사의 역할이 중요하다. 그래서 교사는 다양한 수준에 있는 모든 학생들이 전체 토의를 통해 뭔가를 얻을 수 있도록 이를 효과적으로 관리하여야 한다. 모든 학생들이 성공적으로 자신의 의견을 개진할 수 있는 기회를 주기 위해 가장 간단한 답변을 할 수 있는 학생을 불러 의견을 말하게 할 수 있다. 그렇게 함으로써 우리가 개진할 의견이 아직 많이 남아있다는 메시지를 학생들에게 전달하여 주면서 많은 학생들이 자신의 의견을 개진할 기회를 늘릴 수 있다. 그리고 이런 열린 문제 상황에서는 오직 한 가지 정답만이 있는 것이 아니며 가능한 많은 답변들이 가치 있고, 수업을 하는 자신에게 도움이 된다는 메시지를 항상 학생들에게 전달해 주어야 한다. 또한 교사는 서로 다른 수준에서 제시된 학생들의 답변을 서로 연결시켜 주어야 한다. 가령 '12와 14의 공통점은 무엇인가?'에 대한 열린 발문에 어느 학생은 '두 수 모두 10과 20 사이의 수'라고 말할 수 있고 다른 학생은 '두 수 모두 짝수이다'라고 말할 수 있다. 그러면 교사는 다음과 같은 후속 발문을 통해 이 두 답변을 통합할 기회를 학생들에게 제공하여야 한다.

- 10과 20사이에 있는 짝수가 되는 수는?
- 어느 수가 짝수인지 어떻게 알 수 있지?
- 어느 수가 10과 20사이의 수인지 어떻게 알 수 있지?

이런 후속 발문들은 학생들에게 도전감을 제공하여 줄 수 있고, 또한 학생들이 도달하여 있는 실제적 발달 수준에서 잠재적 발달 수준으로 이행할 수 있는 비계(scaffold)의 역할을 할 수 있다.

이런 열린 문제를 이용한 수업에서 다른 교육적 이점을 얻을 수 있다. 많은 학생들이 심지어 성인들도 수학은 어렵고 반갑지 않은 과목으로 인식하고 있는데 그 주된 이유가 수학은 참과 거짓이 분명하여 자신의 의견을 말할 때 그것이 수학적으로 옳지 않을까 하는 두려움을 갖고 있기 때문이라고 한다. 이러한 수학에 대한 그른 신념은 학생들이 수학적 시도를 하는 것조차 방해하며, 한번 실패하면 계속해서 실패할 것이란 생각을 하게 되고 이런 생각은 결국에 수학을 학습하는 것을 포기하게 만들 수 있다. 열린 문제가 다루어지는 수업은 수학에 대한 그런 신념을 희석시켜 줄 수 있다.

2. 병행과제를 이용한 수학 지도

병행과제는 다양한 수준에 있는 여러 학생들의 요구에 맞게 고안된 두 세 개의 과제를 말한다. 초등학교에서 흔히 이루어지는 수준별 수업에서 수업 말미에 각기 다른 수준인 두 세 그룹의 학생들에게 제공되는 상이한 수준의 문제와는 다르다.

먼저, 기존의 수준별 수업에서는 낮은 수준의 학생들에게 제시되는 문제는 구체적인 상황이나 그림 형태의 문제 그리고 높은 수준의 학생들에게는 기호적으로 언어적으로 이루어진 문제가 주어지지만, 병행과제에서 제시되는 문제는 동일한 상황의 문제가 제시된다. 다만 언어적인 수준의 차이가 약간 있거나 제시된 수의 크기가 다를 뿐이다.

둘째, 기존 수준별 수업에서 제시되는 수준별 문제는 각 학생에게 해당 수준의 문제만 제시되기 때문에 다른 수준의 문제를 해결할 필요도 없고 살펴볼 수도 없다. 그러나 병행과제에서 제시되는 문제는 다른 수준의 문제가 동시에 제시되기 때문에 문제 선택권이 학생에게 주어진다.

셋째, 기존 수준별 수업에서는 상이한 수준별 문제를 서로 관련시켜 보는 활동이 주어지지 않지만, 병행과제를 이용한 수준별 수업에서는 학생들이 각기 자기 수준에 맞는 문제를 해결하였더라도 교사가 두 수준의 문제 모두에 해당하는 공통된 후속 발문을 통해 두 수준의 문제를 서로 관련짓도록 유도하여 낮은 수준의 학생들을 잠재적 발달 수준으로 이행하도록 촉진하기 위한 과제라는 점이다.

넷째, 기존 수준별 문제들이 닫힌 문제로 구성되는 반면 앞서 논의한 열린 문제나 열린 발문이 모든 수준의 아동들에게 적절하고 교육적 이점이 있기 때문에 병행과제에서 제시되는 문제도 기본적으로 열린 문제로 구성된다.

다섯째, 기존 수준별 수업에 제시되는 문제들은 종이 한 장에 들어가는 많은 수의 문제가 제시되지만, 병행과제에서 제시되는 문제는 각 수준별 한 개씩 두 세 개의 문제로 구성된다. 이는 학생들이 주어진 문제를 맞혔는지 여부에 관심을 갖는 것이 아니라 다른 수준의 문제를 해결하는 방식이 경우에 따라서는 동일할 수도 있어, 낮은 수준의 학생들에게 보다 높은 수준의 문제를 도전해볼 수 있는 기회를 제공한다. 따라서 주어진 문제의 수준은 학생들이 판단하여 자기가 해결할 수 있는 문제를 선택하는 것이지 학생에게 수준이 정해진 문제가 제시되는 것은 아니다.

두 문제가 서로 밀접하게 관련되어 있고, 모든 수준의 학생들에게 동시에 제공된다는 의미를 나타내기 위해 본고에서 논의하는 새로운 수준별 학습에서 사용하는 과제를 ‘병행과제’라고 명칭을 붙였다.

예를 들어 5학년에서 백분율의 개념과 관련된 다음과 같은 병행과제를 생각하여 보자.

<선택 1>	20과 30 사이의 자연수 $\boxed{\text{(가)}}$ 가 다른 수 $\boxed{\text{(나)}}$ 의 80%라고 한다. 두 수 (가)와 (나)를 찾아보시오.
<선택 2>	20과 30 사이의 자연수 $\boxed{\text{(가)}}$ 가 다른 수 $\boxed{\text{(나)}}$ 의 150%라고 한다. 두 수 (가)와 (나)를 찾아보시오.

[그림 Ⅳ-2] 서로 다른 수준의 문제로 이루어진 병행과제의 예

<선택 1>에서는 100%보다 작은 백분율이 주어져 있고, 반면에 <선택 2>는 100%보다 큰 백분율이 주어져 있는 보다 어려운 과제이다. 그렇지만 두 문제 모두 언어적으로 제시되어 있으며 수가 한 수로 정해진 것이 아니라 범위가 주어졌기 때문에 문제가 열려 있다. 또한 문제를 낮은 수준의 학생들은 그림을 통해서 접근할 수도 있으며, 높은 수준의 아동은 기호를 가지고 계산에 의해 구할 수도 있을 것이다. 만약, 낮은 수준의 학생이 <선택 1>를 그림을 이용하여 해결하였다면 이 그림은 교사가 백분율을 구하는 방법을 재설명할 때 사용할 수 있어 낮은 수준의 학생도 전체 학급 학습에 기여할 기회를 갖게 된다.

학생들이 어떤 문제를 해결하였든지 모든 학생들에게 공통된 후속 질문을 하는 것이 필요하다. 위의 병행문제와 관련해서 다음과 같은 질문이 공통된 질문이 될 수 있다.

- (가)와 (나) 중 어느 수가 더 큰가?
- (가)와 (나) 중 어느 수가 더 큰지 혹은 더 작은지 어떻게 알 수 있니?
- 20과 30사이의 자연수 대신에 20과 30사이의 소수로 문제를 변형하였을 때도 전과 동일한 방법으로 해결할 수 있는가?

병행과제를 제시할 때 교사의 역할은 앞에서 논의한 열린 문제를 이용한 수학 지도에서 살펴본 바와 비슷하다. 우선 주어진 두 문제 모두 가치가 있으며 어느 문제를 해결하건 각 수준에 있는 학생들의 모든 반응에 관심이 있다는 메시지를 학생들에게 던져주는 것이 중요하다. 교사가 학생들에게 답변을 요구할 때 한 문제를 완결한 학생에게 답변을 요구하고 그런 다음에 다른 문제를 완전히 해결한 학생에게 답변을 요구하는 것은 두 문제에 대해 교사가 서로 다른 가치를 두고 있다는 메시지를 학생들에게 전달하여 줄 수 있기 때문에 적절하지 못하다. 그리고 학생들에게 두 문제 중 어느 문제를 해결하였는지를 먼저 물어보는 것은 학생들이 자기가 평가 당하고 있다는 느낌을 갖게 될 수 있어 적절하지 못하다. 그래서 교사는 학생이 답변을 하는 중에 어느 문제를 해결하였는지가 자연스럽게 드러날 때까지 기다려야 한다.

병행과제에서는 학생들이 주어진 문제 중에서 자신이 해결할 문제를 선택하여야 한다. 문제의 선택권이 학생에게 주어졌을 때 고려하여야 할 점들이 있다. 두 수준의 문제가 학생에게 주어졌을 때 학생들이 자기 수준에 맞지 않는 문제를 선택하지 않고 낮은 수준 혹은 높은 수준의 문제를 해결하려고 할 수 있다. 따라서 수준이 낮은 문제를 항상 위에 제시될 필요는 없다. 학생들이 관심이 내가 어떤 문제를 풀 수 있는지에

관심을 갖도록 해서 수준에 대한 판단은 학생의 몫이 되어야 한다. 경우에 따라서는 학생들에게 어느 문제가 자신이 쉽게 해결할 수 있는지를 물어 볼 수 있고 또한 높은 수준의 학생들에게는 특정 문제를 풀도록 지시할 수도 있다. 그럼에도 학생들이 스스로 선택한 문제를 해결하는 것이 중요하다. 만약 어느 학생이 자신이 이해하고 있는 수준을 뛰어넘는 문제를 선택하여 고군분투하고 있다면 그러한 도전에 대한 칭찬도 필요하다. 만약 어느 학생이 반복적으로 자신의 능력 수준보다 낮은 수준의 문제만을 선택하여 해결한다면 일단 그 선택한 문제를 해결하도록 하고 그 후에 다른 문제를 시도하여 보도록 격려해주는 것도 필요하다.

Ⅴ. 닫힌 문제를 열린 문제로 만드는 전략 탐색

1. 수준별 수업을 위한 열린 문제의 특성

먼저 저성취 학생을 위한 열린 문제와 병행문제를 이용한 수학지도에 관한 논의에서 살펴본 교육적 잇점을 얻기 위해서는 열린 문제가 다음과 같은 기준을 만족하여야 한다.

첫째, 모든 열린 문제는 수학적으로 유의미한 상황을 포함하여야 한다.

둘째, 모든 열린 문제는 학생들이 어느 수준에 있건 다양하고 적절한 반응을 보일 수 있여야 한다.

셋째, 병행과제에 제시된 문제는 낮은 수준의 아동도 접근 가능한 것이어야 하며 동시에 다른 문제는 높은 수준의 아동에게는 어느 정도 도전감을 줄 수 있는 문제이어야 한다.

넷째, 병행과제에 포함된 문제를 포함하여 열린 문제는 그 후에 이루어지는 논의 과정에 모든 수준의 아동들이 참여할 수 있는 문제이어야 한다.

다섯째, 열린 문제는 적당한 정도의 모호성을 가져야 한다.

열린 문제가 가져야 하는 모호성과 관련하여 다음과 같은 논의가 가능하다. 주어진 열린 문제가 너무 모호하면 문제가 학생들에게 넌센스 문제로 비쳐질 수 있거나 오히려 학생들의 반응을 제한할 수도 있어 교사가 의도하는 바를 학생들이 이해하지 못할 수 있다. 하지만 문제가 어느 정도 모호성을 가져야 그 반응 범위가 넓어져 어떤 수준에 있는 아동도 반응을 할 수있을 것이다. 예를 들어 초등학교 1학년에서 한 자리 수의 가르기와 모으기 혹은 한 자릿수의 덧셈과 뺄셈을 지도할 때 학생들에게 할 수 있는 '6은 무엇인가?'이라는 열린 문제를 생각하여 보자. 이것은 학생들에게 어떤 반응을 요구하는 것인지 지나치게 모호하다. 이 문제를 수정한 열린 문제 '다른 수를 이용하여 6을 나타내어 보자'는 모호성이 줄어들었고, 학생들에게 무엇을 요구하는지 분명하다. 이 문제에 대한 학생들은 반응은 '2에 4를 더하면 6이 된다.' 혹은 '4가 더 있으면 10이 되는 수'라는 언어적 표현, '7-1=6'이라는 기호적 표현을 한 반응도 가능하고, 그림을 통해 표현하는 학생도 있을 것이다. 제시되는 문제가 지나치게 명확하다면 특정 수준의 이해를 요구하는 문제가 되어 다른 수준에 있는 학생들에게는 적절하지 않은 문제 즉 닫힌 문제가 될 것이다.

2. 닫힌 문제를 열린 문제로 만드는 가능한 전략

초등학교 수학 교과서에 들어있는 거의 모든 문제들이 닫힌 문제들이다. 지금부터 교과서에 제시된 닫힌 문제를 가지고 열린 문제를 만드는 방법에 관하여 살펴보고자 한다. 그 방법으로 본

연구자는 아래와 같은 다섯 가지 전략을 고안하였다. 이를 초등학교 3학년 1학기 수학 익힘책(교육과학기술부, 2010)에 있는 닫힌 문제를 열린 문제로 바꾸는 방법을 예를 통하여 살펴본다.

- 문제 방향 바꾸기
- 문제에 주어진 수들을 빈 공란(blank)로 대치하기
- 특정 수들이 포함된 문장이나 문제 만들기
- 문제를 변형하기
- 공통점과 차이점을 묻는 문제로 변경하기

이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

① 문제 방향 바꾸기 전략

닫힌 문제가 있을 때 그 문제에서 구하고자 하는 것과 주어진 것을 서로 맞바꾸는 방법이다. 이는 문제 해결 과정에서 문제 해결 방법을 찾기 위한 전략 중 하나인 역할 바꾸기와 유사하지만 문제를 열린 문제로 만들기 위해 약간의 수정이 필요하다는 점에서 다르다. 단순한 역할 바꾸기 한 문제 역시 닫힌 문제가 되기 때문이다. 가령 초등학교 3학년 수학 교과서에 제시된 문제 '20의 $\frac{1}{2}$은 무엇인가?'를 생각하여 보자. 여기서 구하고자 하는 것은 10이고 주어진 것은 20이다. 이 문제를 단순히 주어진 것과 구하고자 하는 것으로 바꾼 문제 '어떤 수의 $\frac{1}{2}$이 10이라면 이 어떤 수는 무엇인가'와 같이 닫힌 문제가 된다. 따라서 이 문제를 수정한 '어떤 양의 부분이 10일 때, 이를 나타낼 수 있는 분수와 이 어떤 양의 크기를 구하시오' 문제는 열린 문제가 된다. 이 열린 문제는 학생들이 먼저 분수를 고정하고 어떤 양을 구할 수 있고 또한 먼저 어떤 양을 고정시키고 그에 해당하는 분수를 구할 수 있다. 이 문제는 교과서에 제시된 '36의 $\frac{3}{4}$는 $\square$ 이다'와 '8은 20의 $\frac{\square}{\square}$이다'와 같은 문제를 스스로 문제를 만들면서 연습할 수 있는 기회를 제공하여 줄 수 있다.

다음은 초등학교 3학년 1학기 수학 익힘책 139쪽에 있는 닫힌 문제와 문제 방향 바꾸기 전략을 이용하여 만든 열린 문제의 예이다.

> [닫힌 문제] 민지는 오전에 책을 3시간 30분 동안 읽었고 오후에 1시간 40분 동안 읽었습니다. 민지가 책을 읽은 시간은 모두 몇 시간 몇 분입니까?
>
> [변형된 열린 문제] 민지가 읽고 싶은 책을 읽는데는 4시간 10분이 걸립니다. 민지는 오전과 오후로 나누어 책을 읽으려고 합니다. 오전과 오후에 몇 시간 몇 분씩 나누어 책을 읽을 수 있습니까?

[그림 Ⅴ-1] 닫힌 문제와 이를 변형하여 만든 열린 문제

두 문제 모두 측정값의 계산과 관련된 것으로 계산 과정에 받아 올림이 필요한 상황이다. 닫힌 문제의 경우 측정값 계산에서 받아 올림에 대한 개념적 이해가 부족한 학생이 접근하기 쉽지 않지만, 변형된 열린 문제는 받아 올림이 없는 상황 가령 오전 2시간 10분 오후 2시간 등으로 만들 수 있기 때문에 여러 수준의 학생들이 접근 가능하고 다양한 반응을 보일 수 있는 문제이다.

② 문제에 주어진 수들을 빈 공란(blank)로 대치하기 전략

교과서에 주어진 닫힌 문제인 문장제에 포함된 수를 빈 공란으로 대치하여 학생들이 사용할 수를 스스로 선택할 수 있는 문제로 수정하여 열린 문제를 만들 수 있다. 초등학교 3학년에 처음 배우는 나눗셈과 관련된 '한 식탁에 의자가 6

개씩 놓여 있습니다. 의자가 42개이면 식탁은 모두 몇 개인지 구하시오'란 문제에서 포함된 6과 42를 빈 공란으로 대치하면 다음과 같은 문제가 된다.

> [닫힌 문제] 한 식탁에 의자가 6개씩 놓여 있습니다. 의자가 42개이면 식탁은 모두 몇 개인지 식을 만들어 답을 구하시오.
>
> [변형된 열린 문제] 한 식탁에 의자가 (가) 개씩 놓여 있습니다. 의자가 (나) 개이면 식탁은 모두 몇 개인지 구하시오

[그림 Ⅴ-2] 닫힌 문제와 이를 변형하여 만든 열린 문제

이렇게 문장제에 주어진 수를 빈 공란으로 대치함으로써 주어진 닫힌 문제가 열린 문제가 되었다. 이 문제는 이와 유사한 많은 문제를 연습할 수 있는 기회를 제공하여 줄 뿐만 아니라 빈 공란의 수를 쉽게 채우는 방법을 탐색하면서 나눗셈이 곱셈의 역연산이라는 이해로 진전시켜 줄 수 있다.

③ 특정 수들이 포함된 문장이나 문제 만들기

수와 연산 영역에서 지도하는 내용 중 중요한 것 중 하나가 주어진 상황이 덧셈 상황인지 뺄셈 상황인지 아니면 곱셈, 나눗셈 상황인지 판단하는 것이다. 이를 효율적으로 지도하기 위해서는 학생 스스로 주어진 연산을 혹은 수식을 이용하여 해결할 수 있는 문제를 만들어 보는 것이다. [그림 4]는 초등학교 3학년 1학기 58쪽에 있는 주어진 나눗셈식을 문장으로 나타내는 문제이다.

> [닫힌 문제] 나눗셈식 10÷2=5를 문장으로 나타내시오.
>
> 귤 $\square$ 개를 $\square$ 사람에게 똑같게 나누어 주면 한 사람에게 $\square$ 개씩 줄 수 있습니다.
>
> [변형된 열린 문제] 두 수 2와 10이 들어간 곱셈식 또는 나눗셈식으로 해결할 수 있는 문제를 만들어 보시오.

[그림 Ⅴ-3] 닫힌 문제와 이를 변형하여 만든 열린 문제

수학 익힘책에 들어있는 닫힌 문제는 학생들이 나눗셈 상황을 어떻게 만들까 고민할 필요가 없고 빈 칸에 수식에 있는 수를 찾아 채우기만 하면 된다. 빈 공란이 들어 있는 문제이지만 닫힌 문제이다. 이 문제를 변형하여 만든 열린 문제는 주어진 상황이 어느 연산이 요구되는 상황인지를 학생들이 제대로 파악하고 있는지를 살펴보기에 용이하며 나눗셈 개념을 모르는 낮은 수준의 학생도 다른 연산을 이용하여 해결할 수 있는 문장제를 만들 수 있기에 여러 수준의 학생들이 접근 가능한 문제가 된다. 나눗셈에 대한 이해가 부족하여 곱셈이 필요한 상황을 만들었어도 그 상황이 곱셈과 나눗셈 사이의 관계를 살펴보는 후속 논의 과정에서 의미있게 사용할 수 있기에 모든 수준의 아동들이 모든 학생들의 학습에 일조할 수 있게 된다.

④ 문제를 변형하기 전략

이 전략은 닫힌 문제에 포함된 수가 분명하지 않도록 모호성을 추가하여 열린 문제로 만드는 방법이다. 다음은 3학년 1학기 수학 익힘책 10쪽에 있는 닫힌 문제와 이를 변형한 열린 문제의

예이다. 이는 자릿값 개념을 이해하고 있는지를 살펴보는 문항이며, 3학년에서는 1000의 자리까지 지도한다.

> [닫힌 문제] 1000원짜리 1장, 100원짜리 동전 3개, 10원짜리 동전 5개, 1원짜리 동전 7개이면 $\boxed{}$원입니다.
>
> [변형된 열린 문제] 여러 수모형이 16개 있습니다. 이 수모형으로 만들 수 있는 수에는 어떤 것이 있습니까?

[그림 Ⅴ-4] 닫힌 문제와 이를 변형하여 만든 열린 문제

변형된 열린 문제는 일단 닫힌 문제와 같은 문제를 스스로 만들면서 연습하는 상황을 제공하여 줄 뿐만 아니라 학생들이 어떤 학습 수준에 있더라도 각기 반응을 할 수 있다. 가령 두 자리 수에 대한 개념적인 이해만을 하고 있는 학생은 십 모형이 8개, 일 모형(낱개 모형)이 8개이며 88이 된다고 반응할 수 있다. 다양한 수준에서의 반응은 자릿값 개념으로 통합할 수 있으며, 이 문제에 대한 후속 논의를 통해 낮은 수준의 학생이 잠재적 발달 수준, 세 자리 수에 대한 이해로 이행할 수 있을 것이다.

⑤ 공통점과 차이점을 묻는 문제로 변경하기 전략

두 수학적 대상 가령 두 수, 두 도형, 두 그래프, 두 확률 상황, 두 측정값을 제시하고 이 두 가지 대상이 어떤 공통점이 있는지 그리고 어떤 차이점이 있는지를 살펴보는 열린 문제를 손쉽게 만들 수 있다. 이런 열린 문제는 여러 수준에서 자신들이 알고 있는 수학적 이해에 바탕을 두고 다양한 반응을 보일 수 있는 문항이면서 수학 시간에 학습한 여러 용어, 표현 방법을 의미있게 사용할 기회를 제공할 수 있다. 다음은 초등학교 3학년 1학기 익힘책 13쪽에 제시된 문제와 이를 공통점과 차이점을 묻는 문제로 변경한 열린 문제의 예이다.

> [닫힌 문제] 천의 자리 숫자가 8인 수에 ○표 하시오.

5748	3865
8106	2683

> [변형된 열린 문제] 다음 두 수의 공통점과 차이점을 살펴보시오.

3865	8106

[그림 Ⅴ-5] 닫힌 문제와 이를 변형하여 만든 열린 문제

Ⅵ. 요약 및 결론

모든 학생들에게 일정 정도의 수학을 가르쳐야 한다는 것은 오늘날 수학 교육의 핵심 목표이다. 이를 위해 우리나라에서는 제7차 교육과정부터 수준별 학습을 시행하여 오고 있다. 이 수준별 학습의 핵심을 수학적 수준이 높은 학생과 낮은 학생을 분리하여 각 수준에 맞는 수학 내용과 과제를 제공하는 등 학생을 분리하여 지도하는 방식이 주를 이루었다. 초등학교에서는 교실까지 달리하는 분리 수업은 아니지만 수업 말미에 학생에게 수준별 문제가 달리 제공된다는 점에서 분리 수업으로 볼 수 있다. 이런 분리 수업은 낮은 수준의 학생들이 높은 수준으로 이해하도록 하는 장치가 별로 없고 결국 수준을 고착시키며 오히려 수준이 낮은 학생들에게 자괴감을 심어주어 오히려 수학을 멀게 생각하도록 만들어 준다, 그렇기에 이러한 수준별 수업이 도입 된지 10여 년이 지났지만 수학 부진아 즉 수학 저성취 학생들의 문제는 교육당국자가 여전

히 겪고 있는 교육 문제이다.

본 연구에서는 이런 분리된 수업이 갖게 되는 문제점을 보완하기 위하여 특히 초등학교에서는 다양한 수준의 학생들이 한 교실에서 수학을 학습한다는 현실을 고려하여 다양한 수준의 학생들을 동시에 고려한 수학 수업 방안에 관하여 살펴보았다. 이 방안의 핵심은 열린 문제이다.

수학 수업시간에 이루어지는 교사의 대부분의 발문과 문제, 교과서에 제시된 대부분의 문제가 닫힌 문제이다. 이런 닫힌 발문과 문제는 특정 수준의 학생들을 대상으로 하는 것으로 다양한 수준의 학생들을 고려하기에는 한계가 있다. 따라서 학생들이 어떤 수준에 처해있더라도 적절한 반응을 보이고, 비록 그 반응의 수준이 다르더라도 이를 통합하여 수학 성취에 도움이 될 수 있는 열린 문제를 통해 수학 수업을 개선할 수 있지 않을까 하는 것이 본 연구의 핵심이다. 또한 열린 문제를 수준별 수업과 관련시키기 위하여 서로 다른 수준의 문제가 학생에게 동시에 제공되어 학생들에게 문제의 선택권을 제시하는 병행 과제를 도입하는 방법에 대해서도 살펴보았다.

본 연구에서 살펴본 열린 문제를 통해 낮은 수준의 학생들을 고려한 수학 학습 지도 방안을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 다양한 수준의 학생들을 단일 수업에서 지도하기 위해서는 다양한 수준의 학생들이 모두 반응을 보일 수 있는 열린 문제가 필요하다. 교과서에 제시된 문제들은 대부분 닫힌 문제이기 때문에 이를 적절히 열린 문제로 변화시키는 교사의 노력이 필요하다.

둘째, 수준이 낮은 학생들이라도 열린 문제에 적절한 반응을 할 수 있으므로 자신감을 심어줄 수 있으며, 높은 수준의 성취를 살펴보면서 모방과 관찰을 할 기회를 제공해 주며, 열린 문제를 다른 후 교사에 의해 주어지는 후속 발문을 통해 실제적 발달수준에서 잠재적 발달 수준으로 이해할 수 있을 것이다.

셋째, 수준이 다른 문제가 함께 제시되는 병행 과제를 통해 문제의 수준을 학생 스스로 판단하고, 수준이 다른 문제를 서로 비교하여 보는 과정을 통해 문제에서 다루는 개념을 심화시키고, 자신의 수준 보다 높은 수준에 도전할 기회를 제공 해줄 수 있을 것이다.

열린 문제를 가지고 수학 수업을 개선할 수 있는 방안의 가능성에 대해서 살펴보았고 이런 방안이 실제 현장에서 적용되기 위해서는 다음과 같은 교사의 역할이 요구된다.

첫째, 교사가 열린 문제를 구성할 때 수준이 낮은 학생들의 실제적 발달 수준을 고려하여야 한다. 수학은 가장 위계적 교과로 학년이 올라갈수록 앞에서 학습한 내용이 점점 심화되어 가지만, 본질적인 수학적 개념은 변함이 없다. 가령, 1학년에서 다루는 두 자릿수가 2학년에서는 세 자리 수로, 3학년에서는 네 자리 수로, 4학년에서는 다섯 자리 수 이상이지만, 자릿값 개념에 의해 수를 표현한다는 그 본질은 같다. 따라서 교사는 지도하려는 개념이 이전 학년에서 어떤 개념과 관련되는지를 파악하여 그것에 바탕을 둔 반응이 나올 수 있는 열린 문제를 개발하는 것이 요구된다.

둘째, 전통적인 수업에서는 닫힌 발문과 닫힌 문제만이 제시되었기 때문에 열린 문제가 제시되는 새로운 수학 수업에서 학생들이 열린 문제에 대해 몹시 낯설어 할 수 있다. 따라서 처음으로 열린 문제를 도입할 때 교사는 교사의 의도가 무엇인지 즉 학생들마다 각기 다른 답변을 원하고 각각의 답변은 모두 가치가 있다는 메시지를 학생들에게 전달하여 주는 것이 필요하다.

셋째, 본 연구에서 살펴본 수업 개선 방안이 열린 문제만 주어진다고 자연스럽게 이루어지는 것은 아니다. 학생들의 다양한 반응을 서로 통합

시켜 주는 것이 중요하다. 이를 위해서는 수준이 다양한 학생들에게 공통된 발문을 던지는 것이 중요하고, 또한 수준이 낮은 학생들의 반응을 전체 학생들에게 유익한 것으로 포장하는 교사의 역할이 요구된다. 그런 역할이 수준이 낮은 학생들에게 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 긍정적인 태도 등을 심어 줄 수 있기 때문이다.

수학 수업시간에 열린 문제를 제시하면 학생들이 수업의 주된 내용에서 일탈하지 않을까, 혹은 학생들이 제시한 아이디어가 교사 자신의 이해 범위를 넘어 서지 않을까 하는 염려를 가질 수 있다. 그러나 수학 수업 시간에 열린 문제가 제시되어 낮은 수준의 학생들이 수업에 소외되지 않고 뭔가 공헌하는 것을 지켜보는 것만으로 그 염려에 대한 충분한 보상이 될 것이다.

참고문헌

교육과학기술부(2010). 수학3-1 익힘책. 서울:두산동아(주).

교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서(주).

교육인적자원부(1997). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서(주).

교육인적자원부(2007). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서(주).

유현주(2000). 수학적 의사소통과 수학의 교수-학습. 학교수학 제2권 제1호, pp. 53-72.

윤성재(1990). 수학 학습부진아 지도에 관한 연구. 서울대학교 교육학석사학위논문.

이성호(1999). 교수방법론. 서울: 학지사.

이은주(2011). 수학적 의사소통 능력 신장을 위한 교수-학습 모형 개발 및 적용 연구. **한국수학교육학회지시리즈C:초등수학교육,** 14(2), 135-145.

이종희, 김선희(1998). 수학 교수 학습에서 의사소통에 관한 연구. 대한수학교육학회논문집, 8(2), 691-708.

이화진,부재율,서동엽,송현정(1999). 초등학교 학습부진아 지도 프로그램 개발 연구 RRC-3. 서울: 한국교육과정평가원.

정태범,류희찬,조완영(2000). 자료 중심 교수-학습 운영 모형에 근거한 수준별 교수-학습 자료 개발 연구. **학교수학,** 제2권 제2호, pp589-617.

황혜정(1998). 현행 수준별 수업 분석에 기초한 수주별 교육과정의 성공을 위한 처방. 대한수학교육학회논문집, 8(1), 183-197.

Freudenthal, H.(1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Haylock, D.(1986). ‘Mathematical low attainers checklist’, British Journal of Educational Psychology, 56, 205-8.

Haylock, D.(1991). Teaching Mathematics to Low Attainers, 8-12. London: Paul Chapman Publishing.

Haylock, D.(2007). Key Concepts in Teaching Primary Mathematics. London: SAGE Publications.

Houssart, J.(2004). Low Attainers in Primary Mathematics. London: SAGE Publications.

NCTM(1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

NCTM(2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Vygotsky, L.S.(1978). Mind in Society: the Development of higher Psychological Process. Cambridge, MA: Harvard University Press.

A Study for Improving Differentiated Mathematics Instruction Using Open Problems and Inventing Open Problems in the Elementary School.

Lee, Chong Young(Jeonju National University of Education)

Mathematics educators have tried to teach mathematics to all students who are at any mathematical level by differentiated math instruction from late 1990s in Korea. The common differentiated math instruction separates students into two or three groups according to their mathematical ability and then different activities and tasks are given to each group. This kind of instruction fosters negative attitudes to mathematics to low level students and fix them at low level. So I investigated new mathematics instruction considering able students and low attainers at the same time. This new method is based on using open problems in math class. All students can respond to an open problem in different ways. If teachers could relate all varieties of answers got from students at every level to build good understanding the concept which the problem target at, low attainers could move to their potential developmental levels. This kind of instruction can change low math attainers' negative attitudes to good ones to mathematics and foster their confidence in performing mathematics.

* Key words : Mathematics Low Attainer(수학 학습부진아), Open Problem(열린 문제), Parallel Task(병행 과제), Mathematical Communication(수학적 의사소통)

논문접수 : 2012. 8. 16
논문수정 : 2012. 8. 31
심사완료 : 2012. 9. 13