대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 14, No. 3, 297 ~ 313. Sep 2012

증명이 어떻게 내러티브가 될 수 있는가?[1)]
-함수의 평행이동에 대한 사례연구-

이 지 현[*] · 이 기 돈[**] · 이 규 희[***] · 김 건 욱[****] · 최 영 기[*****]

학생들에게 증명을 보다 이해하기 쉽게 전개하는 대안으로, 내러티브의 잠재력과 그 효과를 함수의 평행 이동이라는 사례에서 논의한다. 내러티브의 구성 요소를 고려하여, 평행 이동한 함수의 식을 유도하는 증명을 내러티브로 구성하였다. 두 집단의 학생들에게 내러티브와 형식적 증명을 각각 제시하고, 내러티브가 증명을 제시하는 것보다 함수의 평행 이동에 대한 도구적 및 관계적 이해라는 측면에서 유의미한 효과가 있는지를 살펴보았다.

실험집단과 비교집단에서 사후 도구적 및 관계적 이해 검사 결과의 차이가 통계적으로 유의하지는 않았으므로, 내러티브로 제시하는 것이 증명을 제시하는 것보다 함수의 평행 이동에 대한 도구적 및 관계적 이해의 측면에서 더 효과적이라는 결론을 내릴 수는 없었다. 그러나 학생들의 관계적 이해 반응과 수업 평가에 대한 질적 분석에서는 비교집단과 실험 집단사이에서 몇 가지 다른 양상을 발견할 수 있었으며, 형식적 증명을 보완할 수 있는 내러티브의 가능성을 찾아볼 수 있었다.

Ⅰ. 서론

내러티브(narrative)는 '일어난 어떤 사건에 대해 한 사람이 다른 사람에게 이야기하는 행위(Herrnstein Smith, 1981: 228)'로서, 어떠한 사건, 정보, 주장을 단순히 나열하거나 기술하고 논증하는 것과는 다른 것이다. 내러티브에서는 어떤 주인공이 등장하여, 인과관계를 가진 사건들이 시간적 흐름에 따라 기술된다. 이러한 내러티브의 특징은 인간의 삶과 매우 유사한데, 모든 사람은 자신의 삶의 주인공이며 시간의 흐름 속에서 여러 사건들을 경험하기 때문이다. 이러한 내러티브와 인간 경험의 유사성은 내러티브가 우리 인지 체계에서 특별한 위치를 차지하고 있으며 따라서 다른 종류의 텍스트 혹은 담화보다 쉽게 이해되고 오래 기억될 수 있다는 주장을 뒷받침하는 논거 중 하나이다(Norris, Guilbert, Smith, Hakimelahi, Phillips, 2005). 최근 수학교육에서도 학습 내용에 대한 이해와 기억의 증진, 흥미와 동기 유발 등의 측면에서 내러티브 혹은 이야기의 적용에 대한 관심이 높다[2)].

* 서울전자고, leeji_hyun@naver.com, 제 1저자 · 교신저자
** 한성과학고, tracer0@empas.com
*** 북악중학교, narara292@snu.ac.kr
**** 서울국제고등학교, gunugi@naver.com
***** 서울대학교, yochoi@snu.ac.kr

1) 이 논문은 2012년 7월 서울에서 열린 International Congress of Mathematics Education의 Topic Study Group 28에서 발표된 초고를 보완하고 확장한 것이며, 2011년도 수학교사연구회 사업으로 한국과학창의재단의 지원을 받아 연구된 것임.

내러티브는 수학 수업에서 문제를 풍부한 맥락에서 제시하고, 수학사의 예화들과 같이 어떤 개념의 맥락 및 기원을 소개하며 수학적 활동을 도입할 수 있다(Zazkis, Liljedahl, 2005; Balakrishnan, 2008). 그런데 내러티브는 그 자체가 수학 지식의 일부라기보다는 수학에 관한 어떤 것을 설명하는 '수학 외재적인 내러티브'라고 볼 수 있다. 반면 수학적 사실과 알고리즘을 설명하거나 어떤 의미를 부여하고(Zazkis, Liljedahl, 2005), 수학적 아이디어를 전개하는(Mazur, 2007), 그 자체가 수학 지식의 일부가 될 수 있는 '수학 내재적인 내러티브'도 있다. 사실 수학 외재적인 내러티브는 교과서에서 수학적 개념 혹은 어떤 주제에 대한 생각 열기에서도 흔히 찾아볼 수 있으므로, 이 연구의 논의는 수학 내재적인 내러티브에 한정하기로 한다. 특히 수학 내재적 내러티브로서, 내러티브가 형식적 증명을 학생들이 보다 이해하기 쉽게 전개할 수 있는가를 논의하는 것이 이 연구의 목적이다.

Skemp(2002)는 원리를 알지 못하면서도 규칙을 암기하여 기계적으로 실행하는 '도구적 이해'와 규칙뿐만 아니라 그 규칙이 왜 그렇게 되는지를 모두 아는 '관계적 이해'를 구분하였다. 증명 이해의 실패는 많은 학생들이 관계적 이해가 아닌 도구적 이해에만 의존하게 되는 원인이다.

예를 들어 함수의 평행 이동은 많은 학생들이 도구적 수학으로 학습하는 대표적 주제 중 하나이다. 많은 학생들은 '함수 $y=x^2$를 오른쪽으로 p만큼 평행 이동하면 $y=(x-p)^2$이다.'와 같은 결과만을 기억하여, 기계적으로 평행 이동한 함수의 식을 구한다(Lage, Gaisman, 2006; 황선미, 2006). 그런데 이 결과는 오른쪽으로 이동한 함수의 식에 '$-$'가 등장하기 때문에, '오른쪽으로의 이동은 $+$'라는 직관과 충돌한다. 오른쪽으로의 평행 이동이라는 기하학적 결과와 '$-$'가 등장하는 대수적 표현 사이의 불일치를 '관계적으로' 이해하기 위해서는, 평행 이동한 함수의 식을 유도하는 증명 과정을 살펴보아야 한다. 그러나 학생들은 이 증명을 어렵고 복잡하며 지루한 것으로 받아들이며, 증명의 각 단계를 충실히 따라갔던 학생들조차도 정작 이 증명에서 왜 함수의 그래프가 오른쪽으로 이동함에도 불구하고 그 식에는 '$-$'가 등장해야 하는지를 잘 이해하지 못한다(황선미, 2006; 최혜영, 2011).

내러티브 텍스트는 다른 장르의 텍스트들보다 이해와 기억이 용이하며, 독자를 몰입하게 한다(Glaesser, 1981). 이러한 특징은, 내러티브가 형식적 증명을 학생들에게 제시할 때 야기되는 문제점들을 보완할 수 있는 가능성이 있음을 시사하고 있다. 이 연구에서는 먼저 평행 이동한 함수의 식을 유도하는 증명을 내러티브로 구성하기 위하여, 먼저 내러티브를 구성하는 요소와 증명이 가질 수 있는 내러티브의 요소를 탐색하고, 구체적인 이차함수 $y=x^2$을 x축으로 2만큼, y축으로 3만큼 평행 이동한 함수의 식이 $y-3=(x-2)^2$임을 유도하는 증명을 내러티브로 구성하였다. 그리고 두 집단의 학생들에게 내러티브와 형식적 증명을 각각 제시하여, 이러한 내러티브가 증명을 그대로 제시하는 것보다 함수의 평행 이동에 대한 도구적 및 관계적 이해라는 측면에서 유의미한 효과가 있는지를 살펴보고자 한다. 또한 두 집단에서 함수의 평행 이동을 관계적으로 이해한 반응 및 각 수업에 대한 평가를 비교 분석한다.

2) 최근 교육과학기술부(2011; 2012)는 공식의 암기와 문제풀이 위주의 주입식 교육에서 벗어나 수학을 쉽게 이해하고 재미있게 배울 수 있는 '스토리텔링' 교과서를 개발하여 초·중·고교에 보급하는 방안을 발표하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 내러티브와 증명

Norris외(2005)는 내러티브의 구성 요소로 다음과 같이 사건(event-tokens), 화자(narrator), 청자(narratee), 시간(time), 흥미(narrative appetite), 구조(structure), 등장인물(agency), 목적(purpose)의 8가지를 제시하였다.

내러티브는 기본적으로 어떤 한 주제에 대한 일련의 사건들을 포함한다. 내러티브의 어떤 사건은, 그 다음에 일어나는 사건들에 의하여 비로소 그 의미가 결정되며 원인이 된다. 화자는 내러티브의 주제와 목적을 결정하며, 이것을 반영하여 내러티브가 유의미한 전체가 될 수 있도록 사건 계열을 선택하거나 구성한다.

모든 내러티브는 시간 속에서 일어나고, 시간이 걸리며, 또 시간적으로 전개된다(박찬용, 2005). 따라서 내러티브에는 인간 경험의 시간적 특성이 반영되어 있다(Ricoeur, 1984: Norris외, 2005: 541에서 재인용). 한편, 흥미란 내러티브에서 앞으로 전개될 사건을 알고자 하는 욕구를 의미한다.

내러티브의 구조는 시간이라는 요소와 밀접하게 관련되어 있다. Chatman(1981: Norris 외, 2005: 542에서 재인용)에 의하면, 내러티브를 비내러티브와 구분하는 중요한 특징 중 하나는 바로 이중적 시간 구조화(double time structuring)이다. 즉 내러티브에는 자연적 시간 흐름에 따라 발생하는 사건 계열 외에, 화자가 시간적 발생 순서와는 독립적으로 어떤 상호 관련성에 따라 사건들을 정렬하는 계열이 있다[3].

등장인물도 내러티브의 핵심적인 요소이다. 주체의 확인이 어려운 비 내러티브 장르와 달리, 내러티브는 등장인물의 역할을 강조한다. 내러티브의 목적은 즐기기 위한 것 외에도 인간 행동이나 감정, 세계에 대한 이해의 증진도 그 목적이 될 수 있다. 이야기를 말하는 것이 화자의 해석적 행위라면, 이야기를 수용하는 것은 청자의 해석적 행위이다. 청자는 단순히 텍스트를 해독하는 행위 이상의 추론하기, 해석하기, 예상하기, 가설을 수립하기, 상상하기, 기대하기 등의 다양한 활동과 과정을 통해 적극적으로 의미를 구성한다.

Norris외(2005)는 위와 같은 요소들이 내러티브의 필요충분조건이라기보다는 어떤 텍스트 혹은 담화의 '서사성(degrees of narrativity)'을 판단하는 기준이며, 특히 이때 사건, 시간, 등장인물이라는 요소는 다른 요소들보다 더 중요하다고 하였다.

내러티브가 인간의 상황, 감정과 같은 인간적 세계를 다루는 반면, 증명은 추상적인 수학적 개념과 명제에 관한 것이다. 주인공을 가지고 있는 내러티브와 달리, 증명에서는 통상적인 의미에서의 주인공을 찾아볼 수 없다. 이러한 내러티브와 증명의 차이에도 불구하고, 증명에서도 내러티브의 '사건', '시간', '구조'에 대응하는 것을 다음과 같이 찾아볼 수 있다. 예를 들어, 어떤 증명에서 가정에서 결론으로 진행하는 각 단계 혹은 절차는 내러티브에서의 '사건'에 대응된다. 특히 Mazur(2004; 2007)는 우리가 'X 이면, Y이다'와 같은 명제를 증명할 때, 비시간적인 두 조건 X와 Y에 '시간' 혹은 시간적 선후 관계를 부여하게 된다고 보았다. 그러나 증명에서 항상 가정이 결론보다 시간적으로 선행하는 것은 아니다. Mazur(2004)는 증명과정에서 가정으로부터 결론으로 진행하기(종합)도 하지만, 결론으로부터 역으로 가정으로 진행하기도 하는 것(분석)과 같

3) 사건들이 발생하는 자연적인 시간 순서 계열을 fabula라고 한다. 반면 fabula와는 독립적으로, 화자가 플래쉬 백(flash back), 혹은 플래쉬 포워드(flash forward: 미래 장면의 삽입)등의 기법을 사용하여 이야기를 정렬하는 순서 혹은 방식을 syuzhet라 한다("Fabula and syuzhet", 2012)

이, 증명 과정에서 다양한 인식론적인 시간 계열을 형성한다고 지적하였다.

한편, Doxiadis(2007)은 증명을 '출판되는 증명(proof as published)'과 '발견되는 증명(proof as discovered)'으로 구분하고, 이것을 내러티브에서의 두 가지 시간 계열과 관련지어 논의하고 있다. 여기서 '출판되는 증명'이란, 증명의 아이디어를 발견한 순서가 아니라 논리적 순서로 서술한 증명이다. 반면 '발견되는 증명'은 '출판되는 증명'과 달리, 아이디어의 발견 순서를 기술한다. 특히 그는 출판되는 증명과 발견되는 증명은 내러티브에서 '사건들이 발생하는 자연적인 시간 순서'와 '시간적 순서와 독립적으로, 화자가 상호 관련성에 따라 사건을 조직하는 순서'에 각각 대응되는 것으로 보았다.

2. 함수의 평행이동

우리나라 교육과정에서는 중학교 2학년에서 처음 일차함수의 y축 방향으로의 평행이동을 다루고 있으며, 중학교 3학년에서는 이차함수의 x, y축 방향으로의 평행 이동을 다루고 있다[4]. 중학교 3학년 교과서에서는 대응표에 나타난 패턴을 이용하여, $y=(x-2)^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 오른쪽으로 2만큼 평행 이동한 것임을 설명한다([그림 Ⅱ-1]). 하지만 좌표평면에서 음수의 위치 때문에 '$-$'연산은 왼쪽 및 아래 방향으로의 이동과 자연스럽게 연결되며, 학생들은 '$-$'가 등장하는 $y=(x-2)^2$을 $y=x^2$을 2만큼 왼쪽으로 평행 이동한 함수의 식이라고 생각하기 쉽다[5].

두 이차함수

$$y=x^2,\ y=(x-2)^2$$

에 대하여 다음을 알아보자.

❶ 다음 표를 완성해 보자.

x	⋯	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	⋯
x^2	⋯		4	1							⋯
$(x-2)^2$	⋯				4	1					⋯

❷ 위 ❶의 표에서 x^2의 값을 오른쪽으로 몇 칸 이동하면 $(x-2)^2$의 값과 같아지는지 말해 보자.

❸ 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프를 어떻게 그릴 수 있는지 말해 보자.

[그림 Ⅱ-1] 중학교 수학 3(2011, 이준열 외: 100)

그러나 대응표에서 패턴을 인식하는 활동은 '-'의 개념 이미지로 인한 인지적 장애를 극복하기에는 부족하다. 따라서 자신의 직관과 정반대인 결과에 부딪힌 많은 학생들은 '오른쪽으로 이동한 함수의 식은 -부호를, 왼쪽으로 이동한 함수의 식은 +부호를 붙이면 된다.'와 같은 규칙의 암기에 의존한다. 이러한 도구적 이해는 $y=a(x-p)^2+q$꼴의 그래프에 대한 중학생들의 높은 오답률(성종기, 2000)의 원인 중 하나이다.

고등학교 수학 교과서에서는 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식이 $f(x-a,\ y-b)=0$임을 다음과 같이 유도하는데, 홍진곤과 임재훈(1997)은 이 증명을 4단계로 분석하였다.

4) 우리나라 교과서에서는 명제 'x축으로 a, y축으로 b만큼 평행 이동한 함수의 식은 $y-b=f(x-a)$이다.'의 원리를 제시하는 10학년 이전 8·9학년 단계에서도 일차함수와 이차함수에서 함수의 평행이동을 절차적 지식으로 다루고 있다. 반면 뉴질랜드와 일본의 경우, 중학교 과정에서는 함수의 평행이동을 다루지 않아 $y=ax^2$의 형태의 이차함수만 다루고 있다(황선미, 2006). 한편, Freudenthal(1983: 468-469)은 학교수학에서의 전형적인 알고리즘 교육 방식이 "먼저 하고 나중에 이해하라(First doing, then understanding)."라고 비판하는데, 함수의 평행 이동에서 "먼저 하고 나중에 이해하라"식의 접근은 우리나라가 뉴질랜드와 일본의 경우와 비교하여 더 두드러지게 나타나고 있다.

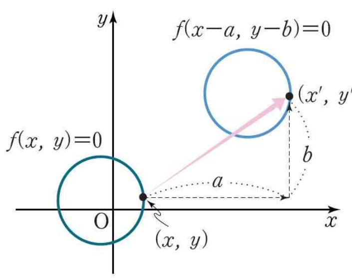
5) 함수의 평행이동에서, '-'의 개념 이미지로 인한 인지적 장애는 y축보다는 x축 평행이동에서 더 심각하다(황선미, 2006). y축으로 위로 평행 이동한 경우 $y-b=f(x-a)$를 $y=f(x-a)+b$로 바꾸어 표현하면 '$-$'가 나타나지 않으나, x축으로 오른쪽으로 평행 이동하면 '$-$'가 나타나기 때문이다.

[1] $f(x,y)=0$위의 점 (x,y)가 평행 이동에 의해 옮겨진 점을 (x',y')로 놓는다(새로운 변수 x',y'의 도입).

[2] x와 x', y와 y' 사이의 관계식을 찾는다.

[3] x,y가 만족하는 방정식 $f(x,y)=0$으로부터 x',y'가 만족하는 방정식 $f(x'-a,\ y'-b)=0$을 구한다.

[4] 따라서 점 (x',y')가 놓이는 그래프의 방정식은 $f(x-a,\ y-b)=0$이다(새로 도입한 변수 x',y'의 제거).



[그림 Ⅱ-2] 도형의 평행 이동

(최용준ㆍ김덕환ㆍ이한주ㆍ위경아ㆍ김윤경, 2011: 184)

이 증명에서는 평행 이동에 의해 옮겨진 점의 좌표를 새로운 변수 x',y'로 표현한다. 그 다음 x',y'의 관계식을 구한 후에 그것을 그대로 답으로 하는 것이 아니라, x',y'에서 ‘′’를 뗀 후에 x,y 사이의 식을 최종적인 함수식으로 제시하고 있다.

그런데 학생들에게 증명 과정의 중간에 새로 도입하였다가 제거되는 변수 x',y'는 혼란의 원인이다(황선미, 2006). 학생들은 이 증명과정에서 ‘왜 x',y'에 대한 식을 x,y에 대한 식으로 바꾸어 기존의 식 $f(x,y)=0$에 대입해야 하는가(과정 [3])?’, 또 ‘$x=x'-a, y=y'-b$의 관계가 있는데 식 $f(x'-a,y'-b)=0$과 식$f(x-a,y-b)=0$이 왜 같은 것이 되는가(과정 [4])?’등을 이해하기 어려워한다(최혜영, 2011). 이렇게 학생들이 형식적 증명의 이해에 어려움을 겪고 있음에도 불구하고, 최혜영(2011)은 많은 교사들이 이 증명의 적절한 교수학적 변환에 실패하고 있음을 보고하고 있다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 참여자

수학부진학생들은 원리를 전혀 이해하지 못하면서 알고리즘을 수행하는 경우가 흔하다 (Kolikant, Broza, 2011). 많은 수학교사들도 이러한 학생들을 지도하는 가장 효율적인 방식은 수학적 의미가 아닌 알고리즘 수행에만 초점을 둔 반복 훈련이라고 생각하기 때문에(Anderson, Reder & Simon, 2000), 도구적 교수 및 학습의 문제점은 보통 학생들보다 수학부진학생들에게 심각하게 나타난다. 따라서 기초학력이 부진하며 수학에 대한 흥미가 낮은 학생들이 주축을 이루고 있는 전문계고교의 학생들을 연구 참여자로 선정하여, 함수의 평행 이동에 대한 도구적 및 관계적 이해에 대한 내러티브의 효과를 살펴보고자 하였다. 서울 서초구 소재 S전문계고의 1, 2학년의 각 두 학급 중 임의로 학년별 한 학급을 평행 이동한 함수의 식을 내러티브로 설명하는 실험집단, 다른 학급은 형식적 증명을 제시하는 비교집단으로 선정하여 준-실험설계 (quasi-experimental design)를 적용하였다. 사전 및 사후 검사에 모두 참여한 연구 참여자들의 수와 이들의 1학기 평균 성적 및 표준편차를 <표 Ⅲ-1>에 제시하였다.

<표 Ⅲ-1> S전문계고의 연구 참여자

		학생수	1학기 평균	표준편차
실험집단	1학년	15	58.87	22.16
	2학년	16	51.68	23.27
	계	31		
비교집단	1학년	19	55.56	22.18
	2학년	15	47.04	23.25
	계	34		

2. 내러티브의 개발

교수 실험에서는 연구 참여자들의 수학적 수준을 고려하여, 일반적인 함수 대신 구체적인 이차 함수 $y=x^2$을 x축으로 2만큼, y축으로 3만큼 평행 이동한 함수의 식을 유도하는 것을 다루었다. 다음은 비교집단에 제시된, 교과서 방식의 증명이다.

> **[증명]** 함수 $y=x^2$ 위의 점 $P(x,y)$를 x축의 방향으로 2, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점을 $P'(X, Y)$ 라 하자.
> 이때, x와 X, y와 Y 사이의 관계는
> $$x+2=X,\ y+3=Y\text{이다.}$$
> 이 관계식을 x, y에 대한 식으로 정리하면,
> $$x=X-2,\ y=Y-3.$$
> 이것을 원래 식 $y=x^2$에 대입하면,
> $$Y-3=(X-2)^2.$$
> 여기서 X, Y 를 x, y로 바꾸면,
> 평행 이동한 함수의 식 $y-3=(x-2)^2$을 얻는다.

이 증명을 내러티브로 구성하기 위하여, 먼저 함수 $y=x^2$을 은유적으로 '도둑들'로, 함수의 평행이동을 '도둑들의 도망'이라는 사건으로 설정하였다. 이때 주인공으로 등장하는 탐정은 평행 이동한 함수식을 알아냄으로서 도망간 도둑들을 검거한다. 보통의 증명과 달리 이 내러티브에는 증명의 주체로 주인공이 드러나 있으며, 주인공의 존재는 학생들에게 감정이입을 통해 추리의 과정에 동참하게 할 수 있다.

> **[내러티브]** 좌표 평면의 도둑들은 $y=x^2$을 만족하는 좌표(x,y)에 살아야 한다는 비밀 규칙이 있었습니다. 이 비밀 규칙을 알아낸 경찰이 $y=x^2$을 급히 수색했을 때에는, 이미 도둑들이 "x축을 따라 2만큼, y축을 따라 3만큼 평행 이동하라."는 대장의 명령에 따라 도망가 버린 후였습니다. 탐정은 일단 <$x=5$>마을부터 수색해보기로 하였습니다. <$x=5$> 마을의 어디에 도둑이 있을까? 탐정은 다음과 같이 추리하였습니다.
>
> 현재 <$x=5$ 마을>에 살고 있는 도둑은 원래 <$x=3$ 마을> 출신이다. 그런데 원래 <$x=3$마을>에 살고 있던 도둑의 위치는 $(3,9)$이었으므로, 현재는 (5, 12)에 숨어 있을 것이다.
>
> <$x=5$>마을에서 도둑의 검거에 성공한 마침내 탐정은 모든 도둑을 한꺼번에 잡을 수 있는 다음과 같은 생각이 떠올랐습니다.
>
> 현재 좌표 (x,y)에 살고 있는 도둑은 과거에는 $(x-2, y-3)$에 살고 있었다. 예전에 살던 위치는 과거 비밀 규칙에 따라 $x-2$와 $y-3$사이의 관계가 $y-3=(x-2)^2$이다. 따라서 현재 도둑은 $(x,y)=(x, x^2-4x+7)$ 에 숨어있다.

등장인물 외에도 이 내러티브에서 다음과 같이 사건, 시간, 구조의 요소를 찾아볼 수 있다. 먼저 '도둑들이 $y=x^2$에 살고 있었다(대과거)' → '평행 이동(과거)'→ '평행 이동 후의 위치 $y-3=(x-2)^2$(현재)'는 시간적 사건 계열을 형성한다. 여기서 '$y=x^2$'와 'x축으로 2만큼, y축으로 3만큼 평행 이동'과 같은 증명의 가정은 '과거'의 사건이 되며, 결론인 평행 이동한 함수의 식은 '현재'의 사건이 된다. 이렇게 내러티브는 가정과 결론 사이의 시간적 선후 관계를 증명과 비교하여 더 명확하게 표현한다.

그런데 주인공의 추리에서는, 이러한 사건들이 이 시간적 발생순서와 다르게 조직되고 있음을 알 수 있다. 탐정은 평행 이동 전의 과거가 아닌, 평행 이동한 현재 (x,y)로부터 추리를 시작한다. 그리고 그는 x축으로 2, y축으로 3만큼 도주했으므로 과거 위치는 $(x-2, y-3)$이었으며, 과거의 비밀 규칙에 따라 $x-2$와 $y-3$사이의 관계식이 $y-3=(x-2)^2$임을 유도한다. 이와 같이 평행 이동한 현재 (x,y)로부터 시작하는 탐정의 추리는, '구하고자 하는 것'을 이미 찾은 것처럼 가정하고 거꾸로 진행함으로서 증명의 아이디어를 발견하는 분석법과 유사하다.

증명은 평행 이동한 함수식의 유도 과정을 논

리적인 공백 없이 명확하게 제시한다. 반면 이 내러티브는 평행 이동한 함수식의 유도 과정을 논리적 공백 없이 엄밀하게 제시한다기보다는, 평행 이동한 함수식을 유도하는 전체적인 아이디어(현재 위치를 (x, y)라 할 때, 평행 이동 전의 과거 위치 $(x-2, y-3)$는 과거 규칙 $y=x^2$을 만족하는 $y-3=(x-2)^2$이다)를 설명 한다[6]. 이점에서 이 내러티브는 '출판되는 증명' 이라기보다는 '발견되는 증명'에 가깝다고 볼 수 있다.

3. 연구 절차 및 검사도구

이 연구에 참여한 1, 2학년 학생들은 학교 수업에서 평행 이동한 함수의 식을 구하는 절차는 배웠으나, 교과서에 제시된 증명을 배우지는 않았다[7]. 이미 학생들이 함수의 평행이동에 대해 배웠으므로, 교수실험 직전에 함수의 평행이동에 대한 도구적 및 관계적 이해를 확인하기 위한 사전 검사를 실시하였다. 함수의 평행이동에 대한 도구적 이해는 일·이차 함수의 평행 이동한 식을 계산하는 4문항(4점 만점)으로 평가하였다. 한편, 함수의 평행이동에 대한 관계적 이해는, 도구적 이해 문항에서 1문항 이상 옳게 해결한 학생들을 대상으로 '함수 $y=x+2$을 x축으로 2만큼, y축으로 3만큼 평행 이동한 식이 왜 $y-3=(x-2)+2$가 되는가?'라는 질문에 대한 답변으로 평가하였다[8].

실험집단과 비교집단에서 50분간 실시된 교수실험에서는 이차함수 $y=x^2$을 x축으로 2만큼, y축으로 3만큼 평행 이동한 함수식의 유도과정을 각각 내러티브와 증명으로 설명하였다. 함수의 평행이동에 대한 수업 방식 외의 교사 변인을 통제하기 위하여, 두 집단의 수업을 모두 한 교사가 담당하였다. 앞 절에서 제시된 내러티브와 증명을 설명하고 평행 이동한 함수의 식을 구하는 동일한 연습문제들을 풀어본 후에, 마지막으로 도구적 및 관계적 이해에 대하여 사전검사와 동형인 사후검사를 실시하고 각 집단의 학생들에게 수업에 대한 평가를 자유롭게 작성하도록 하였다. <표 Ⅲ-2>는 이상과 같은 연구절차를 요약한 것이다.

<표 Ⅲ-2> 교수실험의 절차[9]

실험집단	O_1 도구- 관계적 사전검사	X 내러티브	O_2 도구- 관계적 사후검사 수업 평가
비교집단	O_1 도구- 관계적 사전검사	X' 증명	O_2 도구- 관계적 사후검사 수업 평가

이미 편성된 자연 학급에서 실험 및 비교집단을 선정하였으므로, 처치외의 사후 도구적 및 관계적 이해 검사 결과에 영향을 미칠 수 있는 요인인 학업 성취도(1학기 지필고사 평균)와 사전검사 결과를 공변인으로 통제한 공분산분석(ANCOVA)으로 처치 효과를 분석하였다[10].

6) 평행 이동한 함수식을 유도하는 증명과 내러티브의 동기부여, 문맥화, 변수 사용 및 절차에 대한 이유 설명 방식에 대한 비교는 Lee, Lee, Lee, Kim, Choi(2012)에서의 논의를 참조할 수 있다.
7) 함수의 평행이동은 고등학교 수학(고 1)에서 배우게 된다. 1학년 학생들의 경우, 이 교수실험은 함수의 평행이동을 배운 지 한 달 반 정도의 시간이 지난 후인 11월 중순 실시되었다.
8) 관계적으로 이해하고 있을 경우를 1, 관계적으로 이해하지 못하고 있는 경우를 0으로 코딩하였다. 함수의 평행이동에 대한 사전, 사후 도구적 및 관계적 이해 문항은 부록에 제시되어 있다.
9) 실험집단과 비교집단 사이의 점선 표시는 두 집단이 동질화되지 않았음을 의미한다.
10) 이 연구에서 실험, 비교집단은 이미 편성된 자연학급에서 구분한 것이기 때문에 사전검사, 학업성취도 등에 있어 동질집단이 아니다(<표 Ⅲ-1>참조). 그러나 공분산분석에서 사전 검사, 학업성취도를 공변인으로 통제함으로서 순수한 처치조건의 효과를 분석할 수 있었다.

Ⅳ. 연구결과

1. 도구적 · 관계적 이해에 대한 양적 결과

도구적 이해 사전-사후검사 결과에 대한 기술 통계량을 <표 Ⅳ-1>과 같이 제시하였다. 사전 도구적 이해 검사에서 평행 이동한 식을 계산하는 4문항 중 단 한 문항이라도 옳게 답변한 학생은 전체 65명 중 5명(8%)에 그쳤으며, 1 · 2학년의 모든 집단에서 10%내외의 매우 낮은 성취도를 보였다. 사전 검사 결과, 많은 학생들이 일 · 이차 함수식의 이해 및 예를 들어 'x축으로 2, y축으로 3만큼 평행 이동한 함수를 구할 때, $x-2$와 $y-3$을 원래 식에 각각 대입한다.'에서의 변수 대입 및 계산과 같은 기본적인 선수 지식 및 계산 능력이 매우 부족한 상태임을 확인할 수 있었다.

실험집단과 비교집단 모두 도구적 이해 사후 검사결과는 사전검사결과보다 약간 향상되었으나, 사후검사에서도 50%미만의 성취도(100점 환산)에 그쳤다. 사전검사의 평균점수는 1학년의 경우 실험집단이, 2학년은 비교집단이 더 높았으나, 사후검사에서서는 1학년은 비교집단이, 2학년은 실험집단의 점수가 더 높게 나타났다.

각 학년에서 증명과 내러티브에 따라 학생들의 사후 도구적 이해 검사점수에 차이가 있는가를 통계적으로 검증하기 위하여, 학생들의 학업성취도 및 사전 도구적 이해 검사점수를 공변인으로 통제한 후 사후 검사점수를 종속변수로 ANCOVA를 시행한 결과를 표 <표 Ⅳ-2>[11]에 제시하였다. 그러나 두 학년 모두 실험집단과 비교집단의 사후 도구적 이해 검사 결과의 차이는 통계적으로 유의하지 않았다($p > 0.05$).

한편, <표 Ⅳ-3>은 관계적 이해에 대한 사전-사후검사 결과의 기술 통계량이다. 'x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 함수식을 구하기 위해 원래 식에 $x-2, y-3$을 대입해야 하는 이유'를 질문한 사전 관계적 이해 문항에서, 단순히 '공식이니까 그렇다'가 아니라 이 이유에 대한 나름대로의 관계적 이해[12)]

<표 Ⅳ-1> 도구적 이해의 사전-사후검사 결과

		사전 검사		**사후**검사	
		평균 (100점 환산 점수)	표준편차	평균 (100점 환산점수)	표준편차
실험	1학년(n=15)	0.47(11.8점)	1.246	1.47(36.7점)	1.807
	2학년(n=16)	0.06(1.6점)	.250	0.88(22점)	1.628
비교	1학년(n=19)	0.17(4.3점)	.707	1.68(42점)	1.857
	2학년(n=15)	0.20(5점)	.775	0.80(20점)	1.656

<표 Ⅳ-2> 사후 도구적 이해 검사에 대한 공변량 분석 결과

변량	**제곱합**	**자유도**	**평균제곱**	F	**유의확률**
사전검사	.455(10.094)	1(1)	.455(10.094)	.202(6.087)	.657(.026)
1학기 평균	34.428(16.035)	1(1)	34.428(16.035)	15.282(9.670)	.001(.004)
비교/실험집단	1.106(.036)	1(1)	1.106(.036)	.491(.022)	**.489(.884)**
오차	65.331(44.773)	29(27)	2.253(1.658)		
합계	194.000(100.000)	33(31)			
수정합계	105.636(78.194)	32(30)			

11) <표 Ⅳ-2>에서 괄호 안의 숫자는 2학년 학생들의 ANCOVA 결과이다.

12) 예를 들어 이 중 한 학생은 "평행이동에서 +2, +3로 옮긴 자리에서 다시 원래로 돌아가기 위해서 - 2, -3이 필요하다. 그래서 그 역의 방향으로 숫자를 적어야 한다."라고 답변하였다.

<표 Ⅳ-3> 관계적 이해의 사전-사후검사 결과

		사전 검사		사후 검사	
		비율(명수)[13]	표준편차	비율(명수)	표준편차
실험	1학년(n=15)	.13(2명)	.352	.20(3명)	.414
	2학년(n=16)	.00	-	.19(3명)	.403
비교	1학년(n=19)	.00	-	.16(3명)	.375
	2학년(n=15)	.00	-	.07(1명)	.258

<표 Ⅳ-4> 사후 관계적 이해 검사에 대한 공변량 분석 결과

변량	제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
사전검사	.866(.000)	1(1)	.866(-)	7.728(-)	.009(-)
1학기 평균	.172(.773)	1(1)	.172(.773)	1.534(8.337)	.225(.007)
비교/실험집단	.045(.060)	1(1)	.045(.060)	.402(.643)	**.531(.429)**
오차	3.251(2.597)	29(28)	.112(.093)		
합계	6.000(4.000)	33(31)			
수정합계	4.909(3.484)	32(30)			

를 표현하였던 학생은 65명중 단 2명에 불과하였다.

사후검사 결과, 1학년과 2학년 모두 비교집단보다 실험집단에서 관계적으로 이해한 학생들의 비율이 높았다. 그러나 학생들의 학업 성취도 및 사전 관계적 이해 여부를 공변인으로, 사후 관계적 이해 여부를 종속변수로 ANCOVA를 시행한 결과(<표 Ⅳ-4>[14]), 1학년과 2학년 모두 사전검사 결과 및 학업 성취도가 통제되었을 때, 사후 관계적 이해에서의 실험집단과 비교집단의 차이는 유의하지 않았다($p > 0.05$).

함수의 평행 이동에 대한 도구적 및 관계적 이해의 측면에서, 내러티브는 증명을 제시했을 때보다 통계적으로 유의하게 더 나은 결과를 얻지는 못하였다.

다음 절에서는 양적 결과의 측면에서는 나타나지 않은 증명과 내러티브의 차이를 탐색하기 위하여, 비교 및 실험 집단에서 함수의 평행 이동을 관계적으로 이해한 학생들을 대상으로 구체적인 응답 사례를 살펴본다.

2. 관계적 이해 반응 분석

사후 관계적 이해 문항은 “$y=x^2$을 오른쪽으로 3만큼 평행 이동한 함수가 왜 $y=(x-3)^2$이 되는가?”이었다[15]. 이 문항에 대한 반응에서, 학생들이 교수 실험에서 제시된 내러티브와 증명을 어떻게 이해하였으며 그것을 자신의 말로 표현할 수 있는지를 살펴보았다.

수업 후 실시한 사후 검사에서도 평행 이동한 함수의 식을 관계적으로 이해한 학생은, 1ㆍ2학년 실험집단($n=31$)에서 6명, 비교집단($n=34$)에서는 4명으로 전체 10명에 불과하였다. <표 Ⅳ-5>는 이 10명의 학생들 중 대표적인 반응을 제시한 것이다.

두 집단에서 함수의 평행 이동을 관계적으로 이해한 학생들의 전반적인 관계적 이해의 수준은 비슷하였으나, 다음과 같은 차이가 있었다. 비교집단의 학생 3, 4는 평행 이동 전후 좌표의 관계를, 기호 x와 X의 관계로 설명하였다. 이와

13) <표 Ⅳ-3>에서 비율은 각 집단에서 관계적으로 이해한 학생들의 비율이다.
14) <표 Ⅳ-4>에서 괄호 안의 숫자는 2학년 학생들의 결과이다.
15) 이 문항은 Zazkis, Liljedahl, Gadowsky(2003)이 11ㆍ12학년 고교생과 교사대상으로 조사했던 것이다.

<표 Ⅳ-5> 실험집단과 비교집단의 관계적 이해 반응

내러티브(실험집단)	증명(비교집단)
x 원래 지점에서 +3만큼 평행 이동 했으니깐 원래 식을 만족하려면 +3만큼 이동한 것을 빼면 원래 식대로 되기 때문에 -3이 된다. 이동했으니깐 다시 원래식대로 하려면, 이동한 만큼 빼면 된다(학생 1).	+3만큼 옮긴다고 한다면 이동된 게 X 그 전을 x라 하고 $x=X$로 생각하면, $x+3=X$가 되는데 그것을 반대로 해야 해서 $x=X-3$이 되고 뭐 이런 식(학생 3).
이것($y=(x-3)^2$)은 $y=x^2$의 그래프를 +3만큼 이동한 함수야. 왜냐하면 원래 값에서 3 만큼 이동했으므로 그 원래 값을 구하는 게 $y=(x-3)^2$이 되는 거다(학생2).	$X=x+3$이 $x=X-3$이랑 같은 것처럼 대입하면 $y=(x+3)^2$이 아니라 $y=(x-3)^2$이 되는 것이다(학생4).

비교하여 실험집단의 학생들은 평행 이동한 위치를 x, 평행 이동 전의 위치를 '원래 지점(학생 1)'과 같이 기호뿐만이 아니라 일상적 단어를 사용하여 설명하고 있었다.

한편 $y=x^2$을 오른쪽으로 3만큼 평행 이동한 함수의 식에 왜 '-3'이 나오는가에 대하여, 비교집단의 학생들은 "$X=x+3$이 $x=X-3$이랑 같은 것처럼 대입하면(학생 4)"와 같이 형식적인 계산에 근거하여 설명하였다. 반면 실험집단의 응답에서는 "이동했으니깐 다시 원래식대로 하려면, 이동한 만큼 빼면 된다(학생 1)."에서 살펴볼 수 있는 바와 같이, 비교집단의 응답보다 평행 이동의 전후를 시간적인 선후 관계가 있는 사건으로 인식하고, 어떻게 평행 이동한 '현재'가 과거의 결과일 수 있는지를 설명하고 있었다. 이점에서 실험 집단 학생들의 반응은 비교 집단의 반응보다 내러티브의 요소를 더 갖춘, '내러티브적'인 것임을 알 수 있었다[16].

3. 수업 평가

두 집단의 학생들이 내러티브와 증명을 각각 어떻게 느꼈는지에 대하여, 긍정적 혹은 부정적 반응을 살펴본다. 학생들의 반응을 긍정적 반응, 긍정적-부정적 측면이 혼합되어 있거나 혹은 어느 한 쪽으로 치우치지 않은 것을 중립적 반응, 부정적 반응의 세 가지로 분류하였다. <표 Ⅳ-6>는 실험집단과 비교집단의 수업평가에서 긍정적·중립적·부정적 반응을 한 학생 수 및 비율을 제시한 것이다.

비교집단에서 수업에 긍정적으로 반응한 학생들은 "평행 이동한 함수의 식을 이해했으며 전에 배웠던 것을 기억하게 되어 좋았다."와 같이, 주로 인지적 측면에서의 변화를 언급하였다. 그러나 실험집단에서 수업을 긍정적으로 평가했던 학생들 중에서는, 다음과 같이 인지적 측면 뿐 아니라 흥미와 재미, 몰입과 같은 정의적 측면의 변화에 대해서 기술한 학생들이 더 많았다[17].

16) 한편, 내러티브를 이해한 학생들이 과연 교과서의 증명도 이해할 수 있는지를 살펴보기 위하여, 실험집단에서 함수의 평행이동을 관계적으로 이해한 학생 6명을 대상으로 실시한 추가 인터뷰에서는 교과서의 증명([그림 Ⅱ-2])를 제시하고, 그것을 연구자에게 설명해보도록 하였다. 4명의 학생은 별 무리 없이 교과서의 증명을 이해했던 반면에, 두 학생은 교과서에서의 증명 이해에 어려움을 겪었다. 예를 들어 학생 2의 경우, 평행 이동한 식 $f(x-a,y-b)=0$의 변수 x,y가 평행이동한 점(x',y')이 아닌 원래 점 (x,y)을 나타내는 것으로 생각하여 혼란을 겪었다. 학생 1은 별 무리 없이 교과서의 증명을 이해하면서도, 다음과 같이 내러티브와 증명의 차이를 언급하였다. "교과서의 설명은 $x,y,x',y',f(x,y)=0$등 기호가 너무 많다. <중략> (내러티브와 같이) 주제를 가지고 하면 집중을 하게 되고, 그 내용을 생각하면서 할 수 있기 때문에 좋은 것 같다. 그러나 그냥 글로 된 것을 보면 한 문제는 이해가 될 것 같지만 숫자만 바꿔서 내면 이해가 안 갈 것 같다. 그리고 그 문제만 외우게 될 것 같다(학생 1과의 인터뷰)."

<표 Ⅳ-6> 수업에 대한 긍정적·중립적·부정적 반응

		긍정적	중립적	부정적	무응답
실험	1학년($n=15$)	7(6*)[18]	3	1	4
	2학년($n=16$)	5(4*)	3	8	0
	계($n=31$)	12(39%)	6(19%)	9(29%)	4(13%)
비교	1학년($n=19$)	5(2*)	2	9	3
	2학년($n=15$)	6(2*)	1	7	1
	계($n=34$)	11(32%)	3(9%)	16(47%)	4(12%)

> 이번 수업을 들으면서 느끼는 것은 여러 가지 쉬운 이야기를 소재로 흥미를 일으키고 수업 의욕을 올리고 조금씩 어렵게 진행되면서 이해를 도와주었다. 함수에 대해 거부감이 있던 사람이 이야기라 생각하고 들으면 호기심이 생기게 되고 그로 인해 함수에 대해 거부감이 점차 줄어들고 이해를 못했다 하더라도 나중에 이야기를 생각하며 문제를 풀 때 다시 한 번 이 과정이 어떻게 나왔는지 설명할 수 있을 것 같다. 나는 이렇게 재밌는 이야기를 수업에 대입하면 재밌었다(학생 2).

> 선생님께서 평소에 하시듯이 칠판에다 문제와 답을 적는 방식이 아니라 추리극과 같이 평소에 TV에서 많이 보던 이야기를 하시면, 아이들이 흥미를 많이 느끼고 하니까 그 아이디어로 하면 평소보다 아이들이 좀 더 흥미를 느끼고 집중할 수 있을 것 같다. 이렇게 이야기를 통해 하신다면 애들이 더 집중도 하고 잠도 덜 잘 것 같다. 적는 방식, 보는 방식보다는 듣는 방식이 사람들의 흥미를 더 유발할 수 있기 때문에, 다른 수업도 그런 식으로 하셨으면 좋겠다(학생 5).

학생 2는 수업 후 함수의 평행 이동에 대한 도구적 및 관계적 이해가 모두 향상된 학생으로, 이야기를 통해 흥미가 생기고 함수에 대한 거부감이 사라졌으며, 증명을 전반적으로 이해했다는 느낌을 얻었다고 서술하였다. 반면 학생 5는 수업 후에도 도구적 및 관계적 이해가 향상되지 못했던 학생이었으나, 내러티브로 인한 ‘보고 적는 방식’에서 ‘듣는 방식’으로의 변화에 흥미를 느끼고 있었다. 하지만 내러티브에 대해 다음과 같이 부정적인 반응도 있었다.

> 솔직히 수업내용이 좀 지루했다. 그리고 저는 수업내용이 이해하기가 어려웠습니다. 설명이 너무 길어 이해가 힘들었습니다. 약간 설명을 줄이고 간단하게 하면 수업이 덜 지루할 것 같습니다(학생 6).

내러티브는 수학 내용과 무관한 부가적인 상황 정보가 삽입되어 형식적 증명보다 길어지게 되는데, 학생 6의 반응은 내러티브의 이러한 특성이 어떤 학생들에게는 인지적 부담요인으로 작용할 수 있음을 보여준다.

Ⅴ. 논의

많은 학생들이 ‘함수 $y=x^2$를 오른쪽으로 p만큼 평행 이동하면 $y=(x-p)^2$이다.’와 같은 규칙을 기계적으로 적용하여 평행 이동한 함수의 식을 구한다. 그런데 이 규칙은 ‘오른쪽으로의 평행 이동은 +’라는 자연스러운 직관과 충돌하기 때문에, 평행 이동한 함수식에 대한 도구적 이해는 높은 오답률의 원인 중 하나로 지적된다.

이 연구에서는 도구적 이해의 문제점이 가장 심각할 수 있는 수학부진학생들을 대상으로, 평행 이동한 함수식의 유도하는 과정을 내러티브

17) <표 Ⅳ-6>에서, 비교집단에서 수업에 긍정적으로 반응한 학생 11명 중에서는 4명만이 정의적 측면의 긍정적 변화를 언급하였으나, 실험집단에서 수업에 긍정적으로 반응한 학생 12명 중에서는 10명이 정의적 측면에서의 변화를 언급하고 있었다.

18) (*)는 인지적 측면 외에도 정의적 측면에서의 긍정적 변화를 언급했던 학생 수이다.

로 제시하는 것이 함수의 평행이동에 대한 도구적 및 관계적 이해에 어떤 효과가 있는지를 살펴보고자 하였다. 특히 내러티브의 ‘순수한’ 효과를 살펴보기 위해 증명을 그대로 제시한 비교집단을 선정하여, 두 집단에서 처치 외에 사후검사 결과에 영향을 미칠 수 있는 요인인 학업성취도와 사전 검사 결과를 공변인으로 통제한 공분산분석(ANCOVA)을 이용하여 처치의 효과를 분석하였다. 그러나 실험집단과 비교집단에서 사후 도구적 및 관계적 이해 검사 결과의 차이는 통계적으로 유의하지 않았으며, 따라서 내러티브를 제시하는 것이 증명을 제시하는 것보다 함수의 평행 이동에 대한 도구적 및 관계적 이해에 있어 더 효과적이라는 결론을 내릴 수는 없었다.

Norris등(2005)에 의하면, 이 연구와 같이 내러티브에 대해 이론적으로 기대되는 효과를 실험적으로 입증하고자 하는 연구들은 다음과 같은 한계점을 가지고 있다. 첫째, Ⅲ장에서 제시했던 내러티브와 같이, 실제 교수실험에서 제시하는 내러티브는 소설과 같은 순수한 내러티브가 아닌 내러티브의 일부 요소만을 포함하는 것이기 때문에, 이러한 내러티브에도 순수한 내러티브에 대해 기대되는 효과를 같은 정도로 기대하기는 어렵다. 둘째, 내러티브의 순수한 효과를 확인하기 위해서는 장르 변인 외에 다른 관련 변인들이 모두 통제된 비교 실험이 필요하다. 그런데 학생 변인만 생각한다 하더라도, 관련 주제에 대한 선수 지식, 흥미, 동기, 읽기 혹은 듣기 유창성과 같은 다양한 변인이 존재하며, 현실적으로 이러한 변인들이 모두 통제된 실험설계는 매우 어렵다. 만약 이러한 상황에서 어떤 변인이 장르 변인보다 우위에 있다면, 내러티브의 효과를 관찰할 수 없게 된다. 따라서 Norris등(2005)은 교육적 맥락에서 어떤 텍스트의 난이도를 장르 변인 하나로 설명한다는 것은 불가능하다고 하였다. Norris등(2005)의 두 번째 지적과 관련하여, 이 연구에서 내러티브 효과를 관찰할 수 없었던 원인에 대하여 다음과 같이 생각해 볼 수 있었다. 사전검사 결과, 많은 학생들이 내러티브와 증명의 초점이었던 평행 이동의 방향과 부호사이의 혼동이라는 문제 이전에, 1 · 2차 함수식의 이해와 함수식에 변수를 대입하는 계산과 같은 평행 이동한 함수의 식을 계산하는 데 필수적인 기본지식과 계산 능력이 매우 부족한 상태였음을 확인할 수 있었다. 또 이러한 선수 지식의 부족은 교수 실험 뒤에 실시된 사후 검사에서도 비교 · 실험 집단 모두 도구적 혹은 관계적으로 이해한 학생들이 많지 않았던 원인으로 생각된다. 이러한 사실을 고려했을 때, 이 연구에서 내러티브의 효과는 함수의 평행 이동에 대하여 저조한 선수 지식이라는 학생 변인으로 인하여 나타나지 못했을 가능성이 있다고 생각된다.

도구적 및 관계적 이해에 대한 내러티브와 증명의 차이를 통계적으로 입증하지는 못하였으나, 비교집단과 실험 집단에서 평행 이동한 함수의 식을 관계적으로 이해한 학생들의 반응에서는 몇 가지 차이점을 찾아볼 수 있었다. 비교 집단의 학생들은 “왜 오른쪽으로 평행 이동한 함수의 식에 −가 등장하는가?”라는 문항에 대하여, 평행 이동 전후의 좌표 계산으로 설명하였다. 그러나 실험 집단의 학생들은 평행 이동의 전후를 보다 명확하게 시간적인 선후 관계가 있는 두 사건으로 인식하고 두 사건사이의 일종의 인과 관계로 설명하였다는 점에서, 함수의 평행 이동에 대한 보다 내러티브적인 이해를 관찰할 수 있었다.

Teissier(2012:233)는 증명의 진정한 이해는 논리뿐만 아니라 의미에도 기초하는 것이며, 이점에서 증명을 내래이션(narration)으로 이해할 수 있을 때만이 증명을 정말 이해한 것이라고 하였다. 실험집단의 한 학생도 수업에서 제시된 내러티브를 통해 다음과 같은 이해를 얻었다고 기술

하였다.

> ...이해를 못했다 하더라도 나중에 이야기를 생각하며 문제를 풀 때 다시 한 번 이 과정이 어떻게 나왔는지 설명할 수 있을 것 같다<중략>.(학생 2).

이와 같은 증명에 대한 내러티브적 이해의 함의는, 왜 실험집단의 학생들이 비교집단의 학생들보다 정의적 측면에서의 긍정적 변화를 더 많이 느낄 수 있었는가를 설명할 수 있는 것으로 보인다.

한편, Bruner(1986)는 인간 사고의 양식을, 논리적이고 형식적 논증인 패러다임 사고와 '그럴듯한 이야기'인 내러티브 사고로 구분하였다. 특히 Bruner(1996)는 가설에 대한 진위를 검증하는 패러다임 사고와 달리, 내러티브 사고는 가설의 생성과정에 개입할 수 있다는 점을 주목하였다. 그는 수학이나 과학에서도 많은 가설 혹은 추측이 이야기 혹은 은유와 같은 내러티브 사고로 시작되었다는 점을 지적하면서, 내러티브 사고가 수학이나 과학에서도 중요한 역할을 한다고 보았다.

정수론분야에서 유명한 수학자인 Mazur는, 어떤 문제를 내러티브로 표현할 수 있을 때에야 비로소 자신이 그 문제를 진정으로 이해한 것으로 생각한다고 말하였다(Tomlin, 2005). Mazur의 다음과 같은 경험은 내러티브 사고의 가설 생성 기능에 대한 Bruner(1996)의 주장을 뒷받침할 수 있는 예로 보인다.

> Mazur는 자신이 해결하고자 했던 정수론의 난제와 관련된 구조를 전반적으로 조직하기 위해 내러티브를 사용했으며, 비록 그 내러티브가 그에게 직접적으로 문제의 해답을 제공한 것은 아니었으나 질문의 틀을 형성하는데 도움이 되었다고 술회하였다 (Tomlin, 2005).

이러한 내러티브의 가설 생성에서의 역할은, 학생들도 형식적 증명의 아이디어를 발견하는 수단으로서 내러티브를 사용할 수 있는 가능성을 시사한다.

Ⅵ. 결론

학생들에게 증명을 보다 이해하기 쉽게 전개할 수 있는 대안으로, 수학 내재적인 내러티브의 가능성과 그 효과를 함수의 평행 이동이라는 사례에서 탐색하였다. Norris외(2005)의 논의를 중심으로 내러티브의 구성요소로써 사건, 화자, 청자, 시간, 흥미, 구조, 등장인물, 목적을 살펴보고, 이러한 요소를 고려하여 이차함수 $y=x^2$을 x축으로 2만큼, y축으로 3만큼 평행 이동한 함수의 식이 $y-3=(x-2)^2$임을 유도하는 증명을 내러티브로 제시하였다.

평행 이동한 함수의 식에 대한 관계적 이해의 부족은 함수의 평행 이동에서의 높은 오답률의 원인 중 하나이다. 이 연구에서는 평행 이동한 함수식의 유도과정을 내러티브로 제시하는 것이 증명을 그대로 제시하는 것과 비교하여, 수학부진학생들의 도구적 이해(평행 이동한 함수식의 계산)및 관계적 이해("왜 오른쪽으로 평행 이동한 함수의 식에 $-$가 등장하는가?"에 대한 이해)에 효과가 있는지를 분석하였다. 그러나 연구에 참여한 많은 학생들이 평행 이동한 함수의 식의 계산에 필수적인 선수 지식이 매우 부족한 상태였으며, 이로 인해 수업 직후에 실시한 사후 검사에서도 두 집단 모두 평행 이동한 함수의 식을 도구적 혹은 관계적으로 이해한 학생은 많지 않았다. 또 기대와는 달리 내러티브와 증명이라는 처치에 따라 사후 도구적 이해뿐만 아니라 관계적 이해의 차이도 통계적으로 유의하지 않았다. 이러한 결과는 내러티브와 증명이라는 처치가, 선수 지식이 부족한 학생들이 함수의 평행 이동을 도구적 혹은 관계적으로 이해하는 데 있

어서는 큰 차이가 없었음을 보여준다. 따라서 이 연구의 맥락에서는 내러티브가 증명보다 학생들의 이해에 더 효과적이라는 결론을 내릴 수는 없었다.

내러티브에 대해 기대된 효과를 양적인 차이로 확인할 수는 없었으나, 함수의 평행이동을 관계적으로 이해한 학생들의 반응과 수업 평가에 대한 질적 분석에서는 비교집단과 실험 집단사이에서 몇 가지 다른 양상을 관찰할 수 있었다. 첫째, 실험 집단 학생들의 관계적 이해 반응은, 형식적 계산에만 의존했던 비교집단에서의 반응과 다르게 내러티브의 요소를 포함하고 있었다. Teissier(2012:233)는 증명을 내러티브로 이해하는 것이, 증명의 진정한 이해가 논리뿐만이 아닌 의미에 의존한다는 점에서 중요하다고 보았다. 한편, Bruner(1996)는 수학과 과학에서의 가설 생성 과정에서 내러티브 사고가 중요한 역할을 한다고 지적하고 있다. 특히 증명에서 내러티브 사고는 아이디어를 전개하는 발견적 수단이 될 수 있다.

둘째, 수업 평가에서 긍정적으로 반응한 비교집단의 학생들은 주로 몰랐던 것을 알았다는 인지적 측면에서의 변화를 기술했던 반면, 실험집단의 학생들 중에서는 인지적 측면에서의 변화뿐만이 아니라 흥미와 동기 유발, 몰입, 수학에 대한 거부감의 감소, 전반적으로 이해했다는 느낌과 같은 정의적 측면에서의 긍정적 변화를 기술했던 학생들이 더 많았다. 내러티브가 도구적·관계적 이해에 대한 유의미한 효과를 거두지는 못하였음에도 불구하고, 이상과 같은 질적 분석 결과는 관계적 이해에서 소외된 수학부진 학생들에게 내러티브가 형식적 증명을 보완할 수 있는 가능성이 있음을 보여주고 있다.

본 연구 결과를 토대로, 수학교수학습에서 내러티브의 효과 및 역할에 대한 보다 심화된 논의와 후속 연구가 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

교육과학기술부(2011). **공교육 강화-사교육 경감 선순환 방안**(2011. 5. 19 배포자료)

교육과학기술부(2012). **수학교육 선진화 방안 보도자료**(2012. 1. 10)

박찬용(2005). **탐색적 서사 쓰기의 교육 연구.** 서울대학교 석사학위 논문.

성종기(2000). **이차함수의 그래프에 대한 오류분석에 관한 연구 : 중학교 3학년 함수 단원 중심.** 한국교원대학교 석사학위 논문.

이준열 외(2011). **중학교 수학 3.** 서울: 천재교육.

최용준·김덕환·이한주·위경아·김윤경(2011). **고등학교 수학.** 서울: 천재교육.

최혜영(2011). **집합에 기반한 변수의 재해석 : PCK관점으로.** 서울대학교 석사학위 논문.

황선미(2006). **이차함수 그래프의 평행이동에 대한 연구.** 서울대학교 석사학위 논문.

홍진곤, 임재훈(1997). 이동(변환)을 보는 함수적 관점의 점진적 표면화에 대하여. **수학교육학연구,** 7(1), 231-243.

Anderson, J. R., Reder, L. M., & Simon, H. A. (2000). Applications and misapplications of cognitive psychology to mathematics education. *Texas Educational Review.*

Balakrishnan, C.(2008). *Teaching secondary school mathematics through storytelling.* unpublished MSc thesis. Simon Fraser University.

Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible world.* Cambridge. Mass: Harvard Univ. Press.

Bruner, J. (1996). *The Culture of Education,* 강현석·이자현(역)(2005), **교육의 문화,** 서울: 교육과학사.

Doxiadis, A.(2007). Proofs and stories- family resemblances and family history.

Fabula and syuzhet (2012). In Wikipedia. Retrieved

August 16, 2012, from http://en.wikipedia.org/wiki/Fabula_and_syuzhet.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Glaesser, A. C. (1981). *Prose comprehension beyond the world.* New York: Springer-Verlag.

Herrnstein Smith, B. (1981). Narrative versions, narrative theories. In W. J. T. Mitchell (Ed.), *On narrative* (pp. 209–232). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Kolikant, Y. B, Broza, O.(2011). The effect of using a video clip presenting a contextual story on low-achieving students' mathematical discourse. *Educational studies in mathematics,* 76(1), 23-47.

Lage, A. E., Gaisman, M. T.(2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. *Education,* In Alatorre, S., Cortina, J. L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics.*

Lee, J., Lee, G., Lee G., Kim, G. Choi, Y.(2012). How Does storytelling Complement Formal Proof?, *12th International Congress of Mathematics Education*(ICME 12), TSG 28.

Mazur, B. (2004). On the absence of time in mathematics, *For the Learning of Mathematics* 24(3), 18-20.

Mazur, B. (2007). "Eureka" and other stories.

Norris, S. P., Guilbert, S. M., Smith, M. L., Hakimelahi, S., & Phillips, L. M. (2005). A theoretical framework for narrative explanation in science. *Science Education,* 89(4), 535-563.

Skemp, R. R.(2002). **수학학습 심리학**(황우형 역). 서울: 사이언스북스.

Teissier, B. (2012). Why are stories and proofs interesting? In A. Doxiadis, B. Mazur(Eds.) *Circles disturbed: the interplay of mathematics and narrative.* New Jersey: Princeton University Press.

Tomlin, S. (2005). What's the plot?, *Nature,* 436(051), 622-623

Zazkis, R., Liljedahl, P. & Gadowsky, K. (2003). Students' conceptions of function translation: Obstacles, intuitions and rerouting. *Journal of Mathematical Behavior,* 22, 437-450.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2005). *Teaching mathematics through storytelling.* Rotterdam: Sense Publishers.

How Could a Proof Be Constructed into a Narrative? Focused on Function Translations

Lee, Jihyun (Seoul Electronics High School)
Lee, Gidon(Hansung Science High School)
Lee, Gyuhee(Bukak Middle School)
Kim, Gunuk(Seoul Global High School)
Choi, Younggi (Seoul National University)

The purpose of this paper is to discuss the potential and to examine the effect of narrative, as an alternative approach to teach formal proof in more easier and comprehensible way. Identifying the key elements of narrative in proof, we constructed a narrative that derives the equation of function translation. We examined the effect of teaching through the narrative, in comparison with teaching the corresponding proof, on low-achieving students' instrumental understanding and relational understanding of function translation.

Since we found no statistically significant differences between the experimental and the comparison group, this study could not conclude that teaching through the narrative was more effective than teaching the corresponding proof. But there were some qualitative differences in the relational understanding responses and the evaluation of the teaching between two groups. These findings suggested some potential of narratives that complement the formal proof.

* Key words : Narrative(내러티브), Proof(증명), Function Translations(함수의 평행이동), Relational and Instrumental Understanding(관계적 · 도구적 이해)

논문접수 : 2012. 8. 15
논문수정 : 2012. 8. 31
심사완료 : 2012. 9. 13

<부록> 도구적 · 관계적 이해 사전 및 사후검사

	사전검사	사후검사
도구적 이해	① $y=-2x+3$을 x축의 방향으로 2, y축의 방향으로 3만큼 평행 이동 식 ② $y=-3x+2$를 x축의 방향으로 2, y축의 방향으로 -3만큼 평행 이동식 ③$y=-x+2$를 x축의 방향으로 -5, y축의 방향으로 -1만큼 평행 이동 식 ④$y=x^2$을 x축의 방향으로 -2, y축의 방향으로 1만큼 평행 이동 식	① $y=-x+3$을 x축의 방향으로 1, y축의 방향으로 -2만큼 평행 이동 식 ②$y=3x+2$를 x축의 방향으로 2, y축의 방향으로 -1만큼 평행 이동 식 ③$y=2x+5$를 x축의 방향으로 -3, y축의 방향으로 -2만큼 평행 이동 식 ④$y=x^2$을 x축의 방향으로 1, y축의 방향으로 2만큼 평행 이동 식
관계적 이해	○○야, 왜 $y=x+2$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 식은, x에 $x+2$, y에는 $y+3$을 대입한, $y+3=(x+2)+2$, 즉 $y=x+1$ 이 아니라, x에 $x-2$, y에 $y-3$을 대입한 $y-3=(x-2)+2$, 즉 $y=x+3$이 되는 거야? 여러분은 이 친구의 질문에 대해 어떻게 설명하겠습니까?	○○야, $y=x^2$그래프를, x축 방향으로 +3만큼 평행 이동한 식은 $y=(x+3)^2$이 아니라 왜 $y=(x-3)^2$이 되는 거니? 이 친구의 질문에 대하여 자신이 아는 대로 설명해 주십시오.