대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 14, No. 3, 275 ~ 296. Sep. 2012

초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사

최 지 영* · 방 정 숙**

본 연구는 우리나라 초등학생들의 함수적 사고 능력의 실태를 알아보고자, 다섯 가지 유형의 함수적 관계로 구성된 검사지를 이용하여 2, 4, 6학년 학생 총 2087명의 반응을 분석하였다. 분석 결과, 함수적 관계에 대한 학생들의 이해는 지역규모나 성별에 따라 큰 차이가 나타나지 않았으며, 통계적으로도 유의미한 차이를 보이지는 않는 것으로 드러났다. 반면, 과제 유형이나 문제 상황별로는 학생들의 이해 정도에 다소 큰 차이가 나타났으며, 이러한 차이에 주의를 기울일 필요가 있음이 드러났다. 특히, x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률은, x의 값이 큰 수로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률에 비하여 다소 높게 나타나는 경향이 발견되었다. 본 논문은 이러한 결과들을 토대로 초등학교에서의 함수적 사고 지도 방안에 대한 시사점을 제공하였다.

I. 서 론

함수는 여러 분야의 수학을 하나로 통합하는 데 중요한 역할을 할 뿐만 아니라 현실 세계에 존재하는 다양한 맥락의 변화들을 분석하고 해석하며 예측하도록 돕는 강력한 도구가 된다(김남희 외, 2006). 함수의 가치와 중요성은 많은 연구자들에 의해 꾸준히 강조되어 왔으며, 학교 수학에서도 오랫동안 핵심 주제로 다루어져 왔다(교육부, 1997; 교육인적자원부, 2007; 교육과학기술부, 2011; Kilpatrick & Izsák, 2008).

최근에는 초기 대수(early algebra) 교육을 성공적으로 진작하기 위한 주요 방안 중 하나로 초등학교에서 함수적 사고 능력을 신장해야 할 필요성이 제기되고 있다(Carraher & Schliemann, 2007; NCTM, 2000). 초기 대수 교육의 선구자라 할 수 있는 Kaput과 그의 동료들은 학교 수학의 초기 단계에서부터 대수적으로 추론할 수 있는 기회와 경험을 제공할 것을 강조하면서 초등학교에서 접근 가능하면서도 유망한 대수적 추론의 유형 중 하나로 함수적 사고를 들고 있다(Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 2008).

초등학교에서의 함수 지도 가능성과 관련하여, 많은 연구자들은 초등학생들의 함수적 사고 능력 및 잠재력을 낙관적으로 평가하고 있다. 구체적인 예로, Warren과 Cooper(2008)는 초등학생들은 함수적 사고를 개발할 수 있는 능력을 가지고 있을 뿐만 아니라 그들의 사고를 언어 및 기호적으로 의사소통할 수 있음을 교수실험을 통해 확인하였다. 또한, Blanton과 Kaput(2004)은 초등학교 저학년 학생들과 유치원생들도 변화하는 두 양 사이의 관계에 초점을 맞추고, 함수적 관계를 성공적으로 추론할 수 있음을 밝힌 바

* 서울영남초등학교, ji2006@empal.com (제1저자)
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr (교신저자)

있다. 최근, 우리나라에서도 초등학교 중학년을 대상으로 한 수업사례 연구를 통해, 초등학생들이 일상 언어 및 비형식적인 기호 등을 활용하여 변화하는 두 양 사이의 관계를 성공적으로 일반화 할 수 있음을 보고한 바 있다(최지영 · 방정숙, 2008).

그러나 함수적 사고 능력과 관련하여 우리나라 초등학교 저·중·고학년 학생들의 전반적인 이해 수준과 어려움 등을 체계적으로 분석한 연구는 찾아보기 어렵다. 이러한 연구 배경을 바탕으로 본 연구에서는 전국 초등학교 2, 4, 6학년 학생들을 대상으로 함수적 관계에 대한 이해 실태를 조사하였다. 구체적으로, 다섯 가지 유형의 함수적 관계를 중심으로, 학생들이 패턴을 인식하고 표를 완성할 수 있는지, x의 값이 큰 수로 주어졌을 때 y의 값을 구할 수 있는지, x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y의 값을 구할 수 있는지를 자세하게 분석하였다.

II. 이론적 배경

1. 초기 대수 관점에서의 함수적 사고

전통적으로 학교 대수는 형식적인 기호 조작을 중심으로 중·고등학교 과정에서 다루어져왔다(교육부, 1997; 교육인적자원부, 2007; 교육과학기술부, 2011; Kilpatrick & Izsák, 2008). 그러나 초등수학과는 매우 이질적인 형태로 중등과정에서 갑작스레 도입되는 대수는 많은 학생들에게 어려움과 곤란을 야기한다는 사실이 밝혀졌다(Carraher & Schliemann, 2007).

이러한 학교 대수의 문제점을 근본적으로 해결하기 위한 방안으로, 학교 수학 교육과정의 초기 단계에서부터 대수를 필수 요소로 다루어야 할 필요성이 제기되어 왔다(NCTM, 2000). 일반적으로 대수는 형식적인 기호 체계 및 기호 조작이라는 특징을 갖지만, 학교 수학의 초기 단계에서 초점을 두고자 하는 초기 대수는 형식적인 기호체계 및 기호 조작보다는 풍부한 문제 상황(rich problem contexts)을 토대로 수학적인 아이디어를 추측하고 정당화하며 일반화하고 그러한 일반화를 학년 수준에 알맞은 형식으로 표현하는 일련의 사고 과정에 초점을 둔다(Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 1998, 2008).

초기 대수적 접근을 지지하는 많은 연구자들은 학교 수학 교육과정의 초기 단계에서부터 대수적으로 사고할 수 있는 기회를 제공함으로써 학생들의 대수적인 개념을 의미 있게 점진적으로 발달시킬 수 있다고 보았으며, 궁극적으로 학생들에게 더 높은 수준의 수학에 참여하기 위한 강력한 토대를 형성해 줄 수 있다고 강조한다(Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, Carraher, & Blanton, 2008).

한편, 학생들의 대수적 사고 능력을 촉진하기 위해 다루어야 할 핵심적인 내용으로 함수에 주목할 필요가 있다. Carraher 외(2006)는 함수적으로 사고하는 기회와 경험은 대수의 개념과 형식을 풍부한 문맥을 통해 이해하게 함으로써, 학생들의 대수적 추론 능력을 개발하는 데 기여한다고 보았다. 또한, Kaput(2008, p.11)은 대수적 추론을 구성하는 핵심적인 요소를 크게 세 가지로 범주화하고 있는데, 그 중 하나가 “함수, 관계, 이변량 변수에 관한 연구로서의 대수”이다. (NCTM, 2000, p.36)에서도 대수 규준과 관련된 학습 목표 중 하나로 “유아원·유치원부터 12학년에 이르기까지 모든 학생들이 규칙성, 관계, 함수를 이해할 수 있어야 한다”는 것을 명시하고 있는데, 이는 함수가 학교 대수의 필수 요소임을 드러낸다.

이와 같은 이론적 배경을 토대로 본 연구는 학교 교육과정의 초기 단계에서부터 대수를 다

루어야 한다는 초기 대수적 접근을 기본 입장으로 취하며, 대수적 추론의 유형 중 특히, 함수적 사고로서의 대수적 추론을 집중적으로 다루고자 한다. 본 연구는 함수적인 문제 상황을 대상으로 변하는 양과 변하지 않는 양을 구분하고, 변화하는 양들 사이에서 규칙성을 발견하며, 변화하는 양들 사이의 관계에 초점을 두어 일반화를 이끌어내고, 그러한 일반화를 표현하는 일련의 사고 과정에 초점을 둔다.

2. 초등학교에서의 함수적 사고

'함수'라는 용어는 중학교 교육과정부터 도입되지만, 초등학교 교육과정에 이미 함수와 관련된 내용들이 상당부분 포함되어 있다. 예를 들어, 4학년의 규칙성과 문제해결 영역에서 '규칙과 대응'을 다루는데, 대응은 함수의 개념을 이해하는 데 바탕이 되는 핵심적인 개념이다(교육과학기술부, 2010a, 2010b). 또한, 4학년 1학기 교과서에서 규칙을 찾아 '수'나 '말', '글'로 나타내어 보도록 활동을 제시하고 있고, 4학년 2학기 교과서에서 변화하는 두 양 사이의 관계를 □, △등의 기호를 사용하여 '식'으로 표현해보도록 제시하고 있는데([그림 Ⅱ-1] 참조), 이러한 활동들은 학생들이 변화하는 두 양 사이의 관계에 주목하여 탐구하도록 하는데 유용하다. 한편, 6학년의 규칙성과 문제해결 영역에서 '정비례와 반비례'를 다루는데, 정비례 관계와 반비례 관계는 학교수학에서 주요하게 다루어지는 함수적 관계 중 하나이다. 이처럼 초등학교 과정에서는 규칙성과 문제 해결 영역을 통해 함수를 이해하는 데 기초가 되는 다양한 경험들을 제공하고 있다.

그러나 초등학교 교육과정 및 교과서에 함수적인 문제 상황이 포함되어 있다는 사실이, 초등학생들의 함수적 사고 능력의 발달을 보장하지는 않는다는 점에 주의를 기울일 필요가 있다. Smith(2008)에 의하면, 함수적 사고란 변화하는 양들 사이의 관계에 초점을 두기 시작할 때 비로소 발현되는 사고로서, 그는 학생들이 변화하는 양이 무엇인지를 바르게 선택하고 변화하는 양들 사이의 관계에 초점을 두는 데 성공하지 못한다면, 함수적 사고 역시 촉진되기 어렵다고 보았다. 이러한 이유로 Smith(2008)는 학생들이

4-1, p.122 4-1, p.124 4-2, p. 120

[그림 Ⅱ-1] 교과서에 제시된 제곱 관계의 예

함수적 사고 활동에 성공적으로 참여하도록 하기 위해 교사가 어떠한 점들을 고려하여 활동을 고안해야 하는지, 그리고 학생들에게 어떤 발문들을 제시하여 교실토론에 참여하도록 이끌 것인지에 대하여 보다 세심한 주의를 기울일 필요가 있음을 강조한다. 그리고 동일한 문제 상황을 다루더라도, 초등학교 교사가 세부 과제와 활동들을 어떻게 구성하여 제시하느냐에 따라, 그리고 학생들이 과제 활동에 어떻게 접근하고 참여하느냐에 따라, 실제 학생들이 경험하게 되는 함수적 사고의 양과 질이 달라질 수 있음을 시사한다.

이외에도, 초등학교에서의 함수 지도와 관련하여 많은 연구들이 보고되고 있다(예, 김성준, 2003; 나경수·최성필, 2011; 이화영·류현아·장경윤, 2009; 최지영·방정숙, 2008; Blanton & Kaput, 2004; Boester, & Lehrer, 2008; Brizuela & Earnest, 2008; Moss, Beaty, Barkin, & Shillolo, 2008; Warren, 2005; Warren & Copper, 2008). 예를 들어, Blanton과 Kaput(2004)은 유치원생이나 초등학교 저학년 학생들도 성공적으로 변화하는 두 양 사이의 관계를 탐구하고 함수적으로 추론할 수 있음을 보이면서, 초등학교 수준에서도 함수적인 관계를 탐구하고 함수적으로 추론할 수 있도록 기회를 제공해야 함을 강조한다. Warren과 Copper(2008)는 일련의 기하적 증가 패턴(geometric growth pattern) 활동을 통해, 초등학생들의 함수적 사고가 어떻게 발달되어 나가는지를 보여준다. 그들은 학생들이 반복 패턴과 증가 패턴을 구분해야 한다고 강조하고 있는데, 이 과정에서 기하적인 패턴 활동은 반복패턴과 증가 패턴 사이의 차이를 시각적으로 보여주기 때문에 유용하다고 설명한다. 그들은 특히, 학생들 스스로 규칙을 구성해보게 하거나, 학생들이 발견한 규칙들을 확장해보도록 하는 활동들을 소개하고 있는데, 이러한 활동들은 변수 개념을 비형식적으로 도입할 수 있는 의미 있는 맥락을 제공함으로써 학생들이 성공적으로 일반화하는데 기여하였다.

국내의 대표적인 연구로는, 패턴과 일반화를 탐구하는 경험을 초등수학에서부터 단계적으로 제공함으로써 대수 교육과정을 성공적으로 개선할 수 있다고 논의한 김성준(2003)의 연구를 들 수 있다. 패턴과 일반화는 함수적 사고 활동과 밀접하게 관련된 것으로서 그의 연구는 초등학교과정에서 함수적 사고를 지도하는 것이 가능하면서도 의미 있는 일임을 강조하고 있다. 한편, 이화영 외(2009)는 공학도구와 점진적인 그래프 표현 활동 등을 고안, 적용하여 교수 실험을 실시한 결과를 바탕으로, 초등학교 고학년에서도 일차함수의 그래프 지도가 가능하다는 것을 보이고 있다. 그들은 특히, 논의를 통해 본격적인 함수 지도를 중학교 과정으로 미루고 있는 현 교육과정에 대해 제고할 필요가 있음을 시사한다. 나경수 · 최성필(2011)은 사회와 과학과 같은 타 교과와 연결하여 함수적인 상황을 구성하여 수업에 적용한 예를 보임으로서, 초등학교에서 함수적 사고를 유의미하게 지도할 수 있는 구체적인 방안을 제시하고 있다.

이처럼 국내외의 많은 연구들은, 초등학교에서 함수적 사고를 지도하는 것이 충분히 가능하다는 것을 예증하고 있다. 그러나 실제로 초등학생들이 함수적 관계에 대하여 얼마나 이해하고 있는지, 어느 정도의 함수적 사고를 발현할 수 있는지, 그리고 함수와 관련하여 어떤 어려움을 겪고 있는지 등을 이해하기에는 한계가 있다. 이에 본 연구는 초등학생들이 함수적 관계를 얼마나 잘 이해하고 일반화 할 수 있는지를 지역규모, 성별, 학년, 문제 상황에 따라 알아보고자 하였으며, 이러한 시도는 초등학교에서 함수를 성공적으로 지도하기 위한 기초적인 자료를 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 함수적 사고 능력과 관련하여 우리나라 저·중·고학년 학생들의 전반적인 이해 실태를 알아보는 데 그 목적이 있다. 그러나 학생을 직접 추출하지 않고, 학교와 학급을 표집 단위로 하는 2단계 비례 층화 군집 표집(two-stage proportionate stratified cluster sampling) 방법을 적용하였다(<표 Ⅲ-1> 참고). 이를 위해 전국 초등학교를 지역 규모에 따라 서울특별시, 광역시, 중·소도시, 읍·면지역으로 구분하고, 각 지역에 소재한 초등학교의 수에 비례하도록 고려하여, 전국 초등학교의 0.669%에 해당하는 39개 학교를 표집하였다.

표집된 39개 초등학교에 우편을 이용하여 검사지를 전달하였고, 2, 4, 6학년에서 한 개 학급씩이 검사에 참여하도록 안내하였다. 실제로 검사에 참여하고 검사 결과지를 회신해 준 학교는 30개 학교였는데, 이는 본 연구의 표집 학교 중 약 76.9%에 해당한다. 한편, 검사 대상 의 학급 학생들 중 결석 등의 이유로 결시하였거나 특수아인 경우를 제외하여, 본 연구에서 최종적으로 선정된 분석 대상은 총 2087명이다(<표 Ⅲ-2> 참고).

2. 검사 도구

본 연구는 검사지를 통해 초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 함수적 사고 능력이 어떠한지를 파악하는 데 초점을 두기 때문에 조사 연구 방법을 적용하였다. 검사 도구는 Blanton과 Kaput(2005)이 제안한 함수적 사고로서의 대수적 추론의 유형과 Jacobs 외(2007)의 연구에서 사용된 검사 문항을 참고하여 개발하였다.

검사 도구는 덧셈 관계($y=x+b$), 정비례 관계($y=a\times x$), 제곱 관계($y=x\times x$), 반비례 관계($x\times y=a$), 선형 관계($y=a\times x+b$)의 다섯 가지 함수적 관계를 중심으로 구성하였는데, 이러한

<표 Ⅲ-1> 초등학교 2, 4, 6학년 표본 설계

모집단		우리나라 초등학교 2, 4, 6학년 학생
학교 표집틀		2009년 전국 초등학교 주소록
표집 설계		2단계 비례층화군집표집
층화 변인		지역 규모(서울특별시, 광역시, 중·소도시, 읍·면지역)
표집 단위	1단계	학교
	2단계	학급
표집 방법	1단계	무선 표집
	2단계	편의 표집

<표 Ⅲ-2> 본 연구의 분석 대상

지역 / 학년	서울특별시 (3개교)	광역시 (8개교)	중·소도시 (6개교)	읍·면지역 (13개교)	계 (30개교)	학년별분석대상수 / 학년별전국학생수
2학년	86명	215명	134명	213명	648명	0.122% (648/529,390)
4학년	86명	211명	156명	235명	688명	0.116% (688/594,143)
6학년	89명	229명	155명	278명	751명	0.117% (751/641,421)
계	261명	655명	445명	726명	2087명	0.118% (2087/1764954)

관계들은 우리나라 초등학교 교과서에서 한 번 이상 다루어지고 있는 함수적 관계이다.

검사도구에서 다루는 함수적 관계 중, 덧셈 관계나 정비례 관계, 반비례 관계는 각각 초등학교 과정에서 주요하게 다루어지는 덧셈 개념, 곱셈 개념, 나눗셈 개념과 직접적으로 관련되기 때문에, 초등학생들도 쉽게 접근할 수 있는 함수적 관계이다. 반면에, 제곱 관계나 선형 관계의 경우 이차원적이거나 혹은 두 개 이상의 연산이 복합적으로 관련되기 때문에, 초등학교에서 다루기에는 부적절한 관계라고 볼 수도 있을 것이다. 그러나 본 연구는 형식적인 접근이 아닌, 구체적이고 풍부한 문제 상황을 토대로 초등학생들이 함수적 관계를 얼마나 이해하고 일반화 할 수 있는지를 파악하는 데 관심을 두기 때문에, 초등학생들도 충분히 접근 가능하다고 판단하였다.

개발된 검사 도구의 타당도를 높이고, 적절성과 난이도를 보완하기 위해 총 3회의 예비 검사를 거쳤다. 또한, 문항수의 조절, 문항 진술상의 문제점 수정, 난이도 조정 등을 거친 후 전문가 1인과 교사 7인의 검토를 받았다. 최종적인 검사 도구는 다섯 가지 함수적 관계별로 각각 3문항씩 구성되어, 총 15문항으로 이루어졌다. 특히, 함수적 관계별로 제시된 3개 문항들은 세트로 구성되었다(① x가 늘어남에 따라 y의 값이 어떻게 변화하는지를 파악하고 표를 완성할 수 있는가?, ② x와 y사이의 관계를 적용하여 x의 값이 큰 수로 주어졌을 때 y의 값을 바르게 구할 수 있는가?, ③x와 y사이의 관계를 일반화하여 x의 값이 □일 때, y의 값을 바르게 구할 수 있는가?). 완성된 검사 문항들은 결과 분석 파트에서 자세하게 제시하였다(<표 Ⅳ-7>, <표 Ⅳ-8>, <표 Ⅳ-9>, <표 Ⅳ-10>, <표 Ⅳ-11> 참조).

특히, 검사 도구는 교육과정상의 학년별 수준과 범위를 고려하여, 2학년용과 4·6학년용으로 구분하여 작성하였다. 즉, 두 검사지의 문항 구성은 같지만, 2학년용 검사지의 경우 4·6학년용 검사지에 비해 상대적으로 더 작은 수를 사용하였고, 나눗셈 대신 동수누감의 개념을 사용하였다. 정비례 관계를 예로 들면, 4·6학년용 검사지에는 '72×3'을 계산할 수 있어야만 적절하게 답을 할 수 있는 문항으로 구성된 반면, 2학년용에서는 '9×3'을 계산할 수 있으면 적절하게 답할 수 있는 문항으로 구성하였다. 반비례 관계의 경우를 예로 들면, 4·6학년용 검사지에는 사지선다형 문항에 '120÷□'가 포함되어 있는 반면, 2학년용 검사지에는 ' 24 에서 □를 몇 번 빼면 되는지를 생각해 본다'와 같이 2학년 학생들이 이해할 수 있는 정도의 표현으로 문항을 구성하였다.

검사지의 신뢰도는 Cronbach의 Alpha값을 이용하였는데, 분석 결과 2학년 0.824, 4학년 0.872, 6학년 0.858로 신뢰할 수 있는 것으로 밝혀졌다.

3. 자료 분석

학생들의 반응은 학년별, 문제 상황별, 지역 규모별, 성별, 과제 유형별로 각각 정리하여 분석하였다. 지역 규모별 분석과 성별 분석의 경우 학생들의 점수를 문항 당 1점씩 총 15점 만점으로 계산하였다. 그런 후, 지역의 규모에 따라 평균 차이가 얼마나 나타나는지, 그리고 성별에 따라 평균 차이가 얼마나 나타나는지를 분석하였다. 한편, 지역별 차이가 통계적으로 유의미한지는 사후검정(Scheffe test)을 통해 알아보았고, 성별 차이가 통계적으로 유의미한지는 독립표본 t-검정을 통해 알아보았다.

학년별 분석과 문제 상황별 분석 및 과제 유형별 분석은, 정답자의 빈도수와 정답률을 바탕으로 분석하였다. 그리고 각 분류 기준에 따라 함수적 관계를 이해하는 능력상에 어떤 특징과 경향이 드러나는지를 자세하게 기술하였다. 특히, 학년별 분석의 경우, 각 학년별로 나타난 반

응의 차이가 통계적으로 유의미한지를 살펴보았는데, 이는 학년별 분산 분석 및 사후검정(Scheffe test)을 통해 알아보았다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 지역규모 및 성별에 따른 차이 분석

학생들의 함수적 사고 능력이 지역의 규모에 따라 성취 정도에 차이가 있는지를 알아보기 위해, 전국을 서울특별시, 광역시, 중·소도시, 읍·면지역으로 구분하여 학생들의 반응을 분석하였다. 지역의 규모별 평균, 표준편차, 표준오차, 각 집단 평균에 대한 95% 신뢰구간을 제시하면 <표 Ⅳ-1>과 같다. 지역별 평균은 서울특별시 약 10.05점, 광역시 약 10.33점, 중·소도시 약 10.11, 읍·면지역 약 9.83점으로 학생들의 성취도는 광역시> 중·소도시> 서울특별시> 읍·면지역의 순으로 높게 나타났다. 이러한 지역별 차이가 통계적으로 유의미한지는 사후검정(Scheffe test)을 통해 알아보았으며, 유의수준 0.05에서 분석한 결과, 학생들의 함수적 사고 능력은 지역 규모에 따라 차이가 있다고 보기에는 어려운 것으로 드러났다(<표 Ⅳ-2> 참조).

한편, 학생들의 함수적 사고 능력이 성별에 따라 성취 정도에 차이가 있는지를 알아보기 위해 남학생과 여학생으로 구분하여 평균, 표준편차, 표준오차, 각 집단 평균에 대한 95% 신뢰구간을 구한 결과 <표 Ⅳ-3>과 같이 나타났다. 성별에 따른 평균은 남학생 약 10.09점, 여학생 약 10.06점으로 남학생이 약 0.03점 더 높게 나타났다. 이러한 성별 차이가 통계적으로 유의미한지는 독립표본 t-검정을 통해 알아보았으며 유의수준 0.05에서 분석한 결과, 학생들의 함수적 사고 능력은 성별에 따라 차이가 있다고 보기에는 어려운 것으로 드러났다(<표 Ⅳ-4> 참조).

<표 Ⅳ-1> 학생들의 지역규모별 함수적 관계 이해

	N	평균	표준편차	표준오차	평균에 대한 95% 신뢰구간	
					하한값	상한값
서울특별시	261	10.0536	3.84870	.23823	9.5845	10.5227
광역시	655	10.3282	3.86200	.15090	10.0319	10.6246
중·소도시	445	10.1056	3.81617	.18090	9.7501	10.4612
읍·면지역	726	9.8320	4.03835	.14988	9.5377	10.1262
합 계	2087	10.0738	3.91549	.08571	9.9057	10.2419

<표 Ⅳ-2> 지역규모별 사후검증-다중 비교

(I) 지역규모	(J) 지역규모	평균차(I-J)	표준오차	유의확률	95% 신뢰구간	
					하한값	상한값
서울특별시	광역시	-.27460	.28643	.821	-1.0760	.5268
	중·소도시	-.05198	.30508	.999	-.9055	.8016
	읍·면지역	.22168	.28242	.893	-.5684	1.0118
광역시	서울특별시	.27460	.28643	.821	-.5268	1.0760
	중·소도시	.22263	.24039	.836	-.4499	.8952
	읍·면지역	.49629	.21088	.137	-.0937	1.0863
중·소도시	서울특별시	.05198	.30508	.999	-.8016	.9055
	광역시	-.22263	.24039	.836	-.8952	.4499
	읍·면지역	.27366	.23559	.717	-.3855	.9328
읍·면지역	서울특별시	-.22168	.28242	.893	-1.0118	.5684
	광역시	-.49629	.21088	.137	-1.0863	.0937
	중·소도시	-.27366	.23559	.717	-.9328	.3855

* 평균 차이는 .05수준에서 유의미하다.

<표 Ⅳ-3> 학생들의 성별 함수적 관계 이해

	N	평균	표준편차	표준오차	평균에 대한 95% 신뢰구간	
					하한값	상한값
남학생	1071	10.0868	3.88971	.11886	9.8536	10.3201
여학생	1016	10.0600	3.94436	.12375	9.8172	10.3029
합계	2087	10.0738	3.91549	.08571	9.9057	10.2419

<표 Ⅳ-4> 성별 독립표본 t-검정

	Levene의 등분산 검정		평균들의 동일성에 대한 t-검정				
	F	유의확률	t	자유도	유의확률 (양쪽)	평균차	차이의 표준 오차
등분산이 가정됨	.223	.637	.156	2085	.876	.02680	.17152
등분산이 가정되지 않음			.156	2075.767	.876	.02680	.17158

2. 학년 및 문제 상황에 따른 전반적인 경향 분석

가. 학년별 반응 분석

함수적 사고 능력 검사에 대한 학생들의 반응을 학년별로 구분하여 정답의 빈도와 평균 정답률을 요약하면 <표 Ⅳ-5>과 같다. 먼저 2학년 학생들의 반응을 분석하면, 전체 평균 정답률은 45.7%로 함수적 관계에 대하여 전반적으로 낮은 이해도를 보였다. 과제 유형별로는 덧셈 관계 64.9%, 정비례 관계 59.5%, 제곱관계 22.9%, 반비례 관계 45.9%, 선형관계 35.2%로, 덧셈 관계> 정비례 관계> 반비례 관계> 선형 관계> 제곱 관계 순으로 높게 나타났다. 2학년에서 정답률이 약 60% 수준에 도달한 유형은 덧셈 관계(64.9%)와 정비례 관계(59.5%)의 두 가지인 것으로 나타났는데, 2학년이 곱셈 개념을 처음으로 도입하는 학년이라는 점을 감안하면, 2학년 학생들의 정비례 관계에 대한 이해 능력은 꽤 고무적이라고 할 수 있다.

4학년 학생들의 반응을 분석하면, 전체 평균 정답률은 65.6%로, 2학년에서의 정답률에 비해 평균적으로 20% 포인트 정도 더 높은 것으로 나타났다. 정답률이 가장 저조하게 나타난 제곱 관계와 선형 관계의 경우에도 평균 정답률이 약 60% 수준에 미치지는 못하였으나, 2학년 정답률에 비해 약 20%포인트 더 높은 것으로 드러났다. 과제 유형별로 평균 정답률을 살펴보면, 덧셈 관계 85.9%, 정비례 관계 71.9%, 제곱관계 44.1%, 반비례 관계 71.3%, 선형관계 55.0%로, 덧셈 관계> 정비례 관계> 반비례 관계> 선형 관계> 제곱 관계의 순으로 높게 나타났는데, 이는 2학년과 동일한 패턴인 것으로 드러났다.

한편, 정비례 관계와 반비례 관계 사이의 정답률 차이가 두드러지게 작아진 것으로 나타났다. 즉, 2학년에서는 정비례 관계에서의 정답률이 반비례 관계에서의 정답률에 비해 약 13.6% 포인트 더 높게 나타난 반면, 4학년에서는 정비례 관계에서의 정답률이 반비례 관계에서의 정답률에 비해 단지 0.6% 포인트 정도만 더 높은 것으로 나타났다. 이처럼 정비례 관계에 대한 이해 능력과 반비례 관계에 대한 이해 능력 사이의 차이가 4학년에서는 근소하게 나타났다는 사실은 주의를 기울일 필요가 있다.

6학년 학생들의 반응을 분석하면, 전체 평균 정답률은 87.2%로 4학년에 비해 평균적으로 21.6% 포인트 더 높은 것으로 나타났으며, 제곱

<표 Ⅳ-5> 학년별 정답의 빈도와 평균 정답률

구 분		덧셈 관계 $y=x+b$	정비례 관계 $y=ax$	제곱 관계 $y=x^2$	반비례 관계 $xy=a$	선형 관계 $y=ax+b$	합 계
2학년 (N=648)	정답 빈도수	1261*	1156	445	892	684	4438
	평균 정답률	64.9%	59.5%	22.9%	45.9%	35.2%	45.7%
4학년 (N=688명)	정답 빈도수	1773	1485	910	1472	1135	6775
	평균 정답률	85.9%	71.9%	44.1%	71.3%	55.0%	65.6%
6학년 (N=751명)	정답 빈도수	2155	2041	1753	2017	1845	9811
	평균 정답률	95.7%	90.6%	77.8%	90.0%	81.9%	87.2%
전 체 (N=2087)	정답 빈도수	5189	4682	3108	4381	3664	21024
	평균 정답률	82.9%	74.8%	49.6%	70.0%	58.5%	67.2%

* 2학년 학생 648명의 검사지를 분석한 결과 덧셈 관계와 관련된 3개 문항에서의 정답 빈도수는 각각 591, 338, 332였으며, 이 세 수의 합인 1261을 표에 제시함.

관계와 선형 관계를 제외하고는 90%이상의 높은 정답률을 보였다. 과제 유형별로는 덧셈 관계 95.7%, 정비례 관계 90.6%, 제곱관계 77.8%, 반비례 관계 90.0%, 선형관계 81.9%로, 2, 4학년에서와 마찬가지로 덧셈 관계> 정비례 관계> 반비례 관계> 선형 관계> 제곱 관계 순으로 높게 나타났다. 또한, 4학년에서와 마찬가지로, 정비례 관계에서의 정답률과 반비례 관계에서의 정답률 사이의 차이는 0.6% 포인트 정도로 근소하게 나타났다.

한편, 제곱 관계와 선형 관계에서의 정답률은 다른 유형에 비해 가장 저조하게 나타나긴 했으나, 4-6학년 간 정답률의 차이는 가장 큰 것으로 드러났다. 구체적으로, 제곱 관계의 경우 4학년에 비해 6학년에서 무려 33.7% 포인트 더 높게 나타났고, 선형관계의 경우 26.9%포인트 더 높게 나타났다. 이는 정비례 관계와 반비례관계에서의 4-6학년 간 정답률 차이가 18.7% 포인트이고, 덧셈 관계에서의 정답률 차이가 9.8% 포인트인 것과는 대비되는 것으로, 주의를 기울일 필요가 있다.

학년별로 정답률을 분석한 결과, 정도의 차이는 있지만 모든 유형의 과제에서 학년이 높아질수록 정답률도 향상됨을 확인할 수 있었다. 특히, 2학년에서부터 이미 60%이상의 정답률을 보였던 덧셈 관계의 경우 4학년에서는 80%이상, 6학년에서는 95%이상의 정답률을 보였으며, 저·중·고 학년에서 모두 가장 성취율이 높은 과제 유형임을 드러냈다. 한편, 정비례 관계와 반비례 관계의 정답률 차이에 주의를 기울일 필요가 있었다. 즉, 나눗셈 개념을 도입하기 전인 2학년에서는 반비례 관계에서의 정답률이 정비례 관계에서의 정답률에 비하여 13.6% 포인트 더 낮게 나타난 반면, 범자연수의 사칙연산이 완성되는 시기인 4학년과 6학년에서는 두 관계사이의 정답률 차이가 약 1% 포인트로 매우 미미하게 나타났다. 이러한 결과는 정비례 관계는 곱셈 개념과, 반비례 관계는 곱셈의 역연산인 나눗셈 개념과 직결된다는 점을 고려할 때, 학생들의 정비례 관계에 대한 이해 능력과 반비례 관계에 대한 이해 능력이 서로 긴밀하게 연결된다는 사실을 단편적으로 드러낸다고 할 수 있다. 한편, 제곱 관계는 2, 4, 6학년에서 모두 가장 낮은 정답률을 나타낸 과제 유형인 동시에, 2학년과 6학년에서의 정답률 차이가 무려 54.9% 포인트로 가장 두드러진 차이를 나타낸다는 측면에서 주목할 필요가 있다.

한편, 각 과제 유형별로 학년 간 반응의 차이가 통계적으로 유의미한지는 학년별 분산 분석 및 사후검정(Scheffe test)을 통해 알아보았다. 유

의 수준 0.05에서 분석한 결과, 다섯 가지 관계 모두에서 2, 4, 6학년 간 성취 정도에 유의미한 차이가 있는 것으로 드러났다.

나. 문제 상황별 반응 분석

함수적 사고 능력 검사에 대한 학생들의 반응을 문제 상황별로 구분하여 정답의 빈도와 평균 정답률을 요약하면 <표 Ⅳ-6>와 같다. 먼저 전체 평균 정답률을 살펴보면, 패턴을 인식하고 표를 완성하는 문항에서의 정답률은 81.6%, x의 값이 큰 수로 주어졌을 때 y의 값을 구하는 문항에서의 정답률은 57.7%, x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률은 62.2%로, 패턴을 인식하고 표 완성하기> x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y값 구하기> x의 값이 큰 수로 주어졌을 때 y의 값을 구하기의 순으로 높게 나타났다. 여기서 특히, x값이 큰 수로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률이 패턴을 인식하고 표를 완성하기 문항에서의 정답률에 비해 평균 23.9% 포인트 더 낮게 나타났다는 점에 주목할 필요가 있다. 이러한 차이는 x값이 큰 수로 주어졌을 때에는 전항과 후항 사이의 관계를 이용하기 어렵고, x와 y사이의 함수적 관계를 보다 명확하게 이해하고 적용해야 한다는 점을 그 이유로 들 수 있을 것이다.

한편, x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률이 x의 값이 큰 수로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률에 비하여 높게 나타났다는 사실에 주의를 기울일 필요가 있다. 먼저, 본 검사에서 x의 값이 큰 수로 주어졌을 때 y의 값을 구하는 문항의 경우에는 학생들이 답을 직접 기술하도록 단답형으로 제시된 반면, x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항의 경우에는 □가 포함된 네 개의 연산식 중에서 알맞은 식을 고르는 형태로 제시되었다는 점을 감안할 필요가 있다. 또한, x의 값이 큰 수로 주어졌을 때 y의 값을 구하는 문항의 경우 x와 y사이의 관계를 바르게 파악했다고 하더라도 계산 상의 오류로 오답을 할 수 있는 반면, x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y의 값을 구하는 문항의 경우, x와 y사이의 관계가 어떠한지에 관한 명확한 이해가 선행되지 않았다고 하더라도, 몇몇 수치들을 대입해 봄으로써 간편하게 답을 구할 수 있는 가능성이 있다. 그러나 그렇다고 하더라도 x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항은 x와 y사이의 관계를 바르게 파악하고, x와 y사이의 알맞은 관계식이 무엇인지를 판

<표 Ⅳ-6> 문제 상황별 정답의 빈도와 평균 정답률

구 분 (N=2087)		덧셈 관계 $y=x+b$	정비례 관계 $y=ax$	제곱 관계 $y=x^2$	반비례 관계 $xy=a$	선형 관계 $y=ax+b$	합 계
패턴을 인식하고 표 완성하기	정답 빈도수	2001*	1915	1069	1910	1622	8517
	평균 정답률	95.9%	91.8%	51.2%	91.5%	77.7%	81.6%
x의 값이 큰 수로 주어졌을 때, y의 값 구하기	정답 빈도수	1586	1448	814	1179	991	6018
	평균 정답률	76.0%	69.4%	39.0%	56.5%	47.5%	57.7%
x의 값이 임의의 수로 주어졌을 때, y값 구하기	정답 빈도수	1602	1319	1225	1292	1051	6489
	평균 정답률	76.8%	63.2%	58.7%	61.9%	50.4%	62.2%
전 체	정답 빈도수	5189	4682	3108	4381	3664	21024
	평균 정답률	82.9%	74.8%	49.6%	70.0%	58.5%	67.2%

* 2, 4, 6학년 학생 총 2087명의 검사지를 분석한 결과 덧셈 관계와 관련된 과제 중 패턴을 인식하고 표를 완성하는 문항에서의 정답자 수는 2001명으로 나타났으며, 이 수치를 표에 제시함.

단할 수 있는지를 가늠할 수 있는 지표로서 역할을 한다.

패턴을 인식하고 표 완성하기 문항에서의 정답률을 자세히 살펴보면, 덧셈 관계 95.9%, 정비례 관계 91.8%, 제곱관계 51.2%, 반비례 관계 91.5%, 선형관계 77.7%로, 덧셈 관계> 정비례 관계> 반비례 관계> 선형 관계> 제곱 관계 순으로 높게 나타났다. 특히, 덧셈 관계와 정비례 관계, 반비례 관계에서는 90%이상의 높은 성공률을 보인 반면, 제곱 관계의 경우 정답률이 약 50% 수준으로 낮은 성공률을 보였다. 물론 제곱은 초등학생들이 자주 경험하게 되는 주제는 아니지만, 점이 늘어나는 규칙을 찾아 직접 점을 그려보고 세어서 답할 수도 있다는 점을 감안할 때, 이처럼 제곱 관계에서의 정답률이 덧셈 관계와 정비례 및 반비례 관계에서의 정답률에 비해 무려 40% 포인트 정도나 더 낮게 나타났다는 사실은 주목할 만하다.

x값이 큰 수로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률을 살펴보면, 덧셈 관계 76.0%, 정비례 관계 69.4%, 제곱 관계 39.0%, 반비례 관계 56.5%, 선형 관계 47.5%로, 덧셈 관계> 정비례 관계> 반비례 관계> 선형 관계> 제곱 관계 순으로 높게 나타났다. 그러나 가장 높은 정답률을 보인 덧셈 관계에서도 성공률이 80% 수준에 미치지 못하였다. 덧셈 개념이 1학년 1학기 과정부터 도입되기 시작하여 초등학교 전학년에 걸쳐 지속적으로 다루지는 연산임을 고려하면, 꽤 낮은 성취라 할 수 있다. 한편, 패턴을 인식하고 표를 완성하는 문항에서는 모두 90%이상의 정답률을 보였던 정비례 관계와 반비례 관계의 경우, X가 큰 수로 주어졌을 때의 정답률이 70% 수준에 미치지 못하는 것으로 드러났다. 또한, 반비례 관계에서의 정답률이 정비례 관계에서의 정답률에 비해 13.1% 포인트 더 낮게 나타났는데, 이는 패턴을 인식하고 표 완성하기 문항에서 정답률 차이가 0.3% 포인트밖에 나지 않았던 점과 비교할 때, 두드러진 차이라고 할 수 있다.

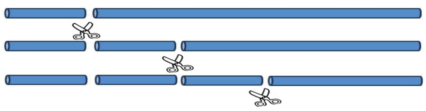
x값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률을 살펴보면, 덧셈 관계 76.8%, 정비례 관계 63.2%, 제곱관계 58.7%, 반비례 관계 61.9%, 선형관계 50.4%로, 덧셈 관계> 정비례 관계> 반비례 관계> 선형 관계> 제곱 관계 순으로 높게 나타났다. 정비례 관계에서의 정답률은 x값이 큰 수로 주어졌을 때의 정답률보다 6.2%포인트 더 낮게 나타난 반면, 나머지 관계들은 x값이 큰 수로 주어졌을 때의 정답률보다 더 높게 나타났다. 특히, 제곱 관계에서의 정답률에 주의를 기울일 필요가 있다. 제곱 관계는 학생들의 성취율이 가장 낮은 과제 유형으로, 패턴을 인식하고 표 완성하기 문항에서의 정답률은 51.2%, x값이 큰 수로 주어졌을 때의 정답률은 39.0%로 나타났다. 그러나 x값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때의 정답률은 58.7%로 가장 높은 성취율을 나타났다.

3. 과제 유형별 함수적 관계 이해 분석

가. 덧셈 관계: $y=x+b$

덧셈 관계에 대한 이해는 가위로 빨대를 자르는 상황에서 변화하는 두 양인 '빨대를 자른 횟수(x)'와 빨대를 잘랐을 때 생기는 '빨대 도막의 수(y)' 사이의 관계가 '$y=x+1$'임을 파악하고, x가 각각 작은 수, 큰 수, 임의의 수로 주어졌을 때, y의 값을 구할 수 있는지에 대한 반응 분석을 통해 알아보았다(<표 Ⅳ-7> 참조). 문항별로 학생들의 반응을 자세히 분석하면 다음과 같다. 먼저 x의 값이 작고 연속된 수(3, 4, 5)로 주어진 1번 문항에서의 반응을 살펴보면, 정답률이 2학년 91.2%, 4학년 96.8%, 6학년 99.1%로 저·중·고 학년에서 모두 90%이상의 높은 성공률을 보였다. 한편, x의 값이 각각 3, 4, 5로 주어졌을 때

<표 Ⅳ-7> 덧셈 관계 과제에서의 정답 빈도수와 정답률

<table>
<tr><th rowspan="2">검사 문항 (4·6학년용의 예)</th><th rowspan="2">비 고</th><th colspan="2">2학년(N=648)</th><th colspan="2">4학년(N=688)</th><th colspan="2">6학년(N=751)</th></tr>
<tr><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1. 아래 그림과 같이 가위로 빨대를 자를 때, 빨대를 자른 횟수가 늘어남에 따라 빨대 도막의 수는 어떻게 변화할까요? 빈칸에 알맞은 수를 써 넣으시오.

자른 횟수 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5
도막의 수 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6</td><td>자른 횟수=3
도막의 수=4</td><td>606</td><td>93.5%</td><td>677</td><td>98.4%</td><td>748</td><td>99.6%</td></tr>
<tr><td>자른 횟수=4
도막의 수=5</td><td>604</td><td>93.2%</td><td>675</td><td>98.1%</td><td>747</td><td>99.5%</td></tr>
<tr><td>자른 횟수=5
도막의 수=6</td><td>593</td><td>91.5%</td><td>667</td><td>96.9%</td><td>745</td><td>99.2%</td></tr>
<tr><td>위의 3개 항목을 모두 맞춘 경우</td><td>591</td><td>91.2%</td><td>666</td><td>96.8%</td><td>744</td><td>99.1%</td></tr>
<tr><td>2. 빨대를 자른 횟수가 90일 때, 빨대 도막의 수는 얼마일까요?
--> 빨대 도막의 수: (91)개</td><td>자른 횟수=90
도막의 수=91</td><td>338</td><td>52.2%</td><td>549</td><td>79.8%</td><td>699</td><td>93.1%</td></tr>
<tr><td>3. 빨대를 자른 횟수가 □일 때, 빨대 도막의 수는 얼마일까요? ------(①)
① □+1 ② □-1 ③ □×1 ④ □×2</td><td>자른 횟수=□
도막의 수=□+1</td><td>332</td><td>51.2%</td><td>558</td><td>81.1%</td><td>712</td><td>94.8%</td></tr>
</table>

의 반응을 비교하면, 각각의 정답률이 매우 근사한 것으로 드러났다. 특히, x=3일 때의 y의 값은 검사지에 제시된 그림을 직접 세어봄으로써 구할 수 있는 반면, x=4일 때는 그렇지 않다는 점을 감안할 때, x=3인 경우와 x=4인 경우 사이의 정답률 차이가 2, 4학년은 0.3%포인트, 6학년은 0.1%포인트 밖에 나지 않는 것은 주목할 만하다. x=4인 경우와 x=5인 경우의 정답률 차이 역시 2학년 1.7%포인트, 4학년 1.2%포인트, 6학년 0.3%포인트로 미미하게 나타났다. 이처럼 덧셈 관계의 문제 상황에서 주어진 패턴을 토대로 후속항의 값을 예측하고 표를 완성하는 데 있어서, 저·중·고학년 학생 모두 높은 성공률을 보였는데 특히, 2학년에서도 성공률이 90%이상이라는 점은 꽤 고무적이라고 할 수 있다.

x의 값이 큰 수(90)로 주어진 2번 문항에서는 정답률은 2학년 52.2%, 4학년 79.8%, 6학년 93.1%로 나타났다. 이는 1번 문항에서의 정답률에 비해 2학년은 39%포인트, 4학년은 17%포인트, 6학년은 6%포인트 더 낮은 것이다. 이러한 결과는 1번 문항의 경우 x의 값이 작고 연속된 수들로 주어졌기 때문에, 학생들이 변화하는 두 양 사이의 관계를 파악하지 못하더라도 그림이나 전항과 후항 사이의 관계를 이용하여 y의 값을 간편하게 구할 수 있는 반면, 2번 문항의 경우 그림이나 전항과 후항 사이의 관계를 이용하기 어려우므로 변화하는 두 양 사이의 관계를 바르게 파악해야 한다는 점을 반영한다고 할 수 있다. 분석 결과, 덧셈 관계의 문제 상황에서 변화하는 두 양 사이의 관계를 바르게 파악하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는 학생의 비율은 저학년에서는 약 50% 수준에 머무르며, 중학년에서는 약 80%, 고학년에서는 약 90% 수준에 도달하는 것으로 드러났다.

x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y값을 적절하게 선택해야 하는 3번 문항의 경우, 정답률이 2학년 51.2%, 4학년 81.1%, 6학년 94.8%로 나타났다. 이는 2번 문항에서의 정답률에 비해 2학년의 경우 1% 포인트 더 낮게 나타난 데 반해, 4학년과 6학년은 각각 1.3% 포인트와 1.7%

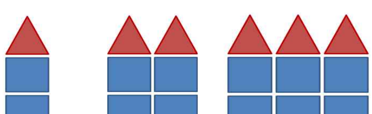
포인트 더 높게 나타났다. 오답 반응으로는 2, 4, 6학년 모두 '□×2'를 옳은 식으로 잘못 판단한 학생들이 가장 많은 것으로 드러났다. 이러한 학생의 비율은 2학년 24.5%, 4학년 9.2%, 6학년 1.9%로 특히, 2학년과 4학년에서 두드러지게 나타났다. '□×2'는 y의 값이 x값의 두 배가 되는 관계로, 빨대를 한 번 자르면 두 도막이 되는 첫 번째 항의 경우(x=1, y=2)에만 참이 될 뿐, 후속 항에서는 거짓이 된다. 그러나 상당수의 학생들이 첫 번째 항에서의 x값과 y값에만 초점을 두었을 뿐, 문제 상황 전반에 걸쳐 x와 y가 어떤 관계를 갖는지를 고려하지 못한 것으로 드러났다.

나. 정비례 관계: $y = ax$

정비례 관계에 대한 이해는 모양조각으로 일련의 집들을 만드는 상황에서 변화하는 두 양인 '단계의 수(x)'와 각 단계에서 필요한 '조각의 수(y)' 사이의 관계가 '$y = 3 \times x$'임을 파악하고, x가 각각 작은 수, 큰 수, 임의의 수로 주어졌을 때, y의 값을 구할 수 있는지에 대한 반응 분석을 통해 알아보았다(<표 Ⅳ-8> 참조). 문항별로 학생들의 반응을 자세히 분석하면 다음과 같다. 먼저 x의 값이 작은 수(3, 4, 5)로 주어진 4번 문항의 경우, 정답률이 2학년 86.4%, 4학년 91.0%, 6학년 97.1%로 저·중·고 학년에서 모두 높은 성공률을 보였다. 특히, x=3일 때와 x=4일 때의 정답률은 2학년의 경우에도 90%이상으로 높게 나타났는데, 곱셈 개념이 2학년에서 처음으로 도입된다는 점을 감안하면, 꽤 주목할 만한 결과라 할 수 있다. 이처럼 정비례 관계의 문제 상황에서 패턴을 파악하여 후속항의 값을 예측하고 표를 완성하는 능력은 저·중·고학년 모두 높은 성공률을 보이는 것으로 드러났다.

한편, x의 값이 큰 수(2학년: 9, 4·6학년: 72)로 주어진 5번 문항의 경우, 정답률이 2학년 54.5%, 4학년 63.5%, 6학년 87.6%로 나타났다. 이는 4번 문항에서의 정답률에 비해 2학년 31.9% 포인트, 4학년 27.5% 포인트, 6학년 9.5% 포인트 더 낮

<표 Ⅳ-8> 정비례 관계 과제에서의 정답 빈도수와 정답률

<table>
<tr><th rowspan="2">검사 문항 (4·6학년용의 예)</th><th rowspan="2">비 고</th><th colspan="2">2학년(N=648)</th><th colspan="2">4학년(N=688)</th><th colspan="2">6학년(N=751)</th></tr>
<tr><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th></tr>
<tr><td rowspan="4">4. 아래 그림과 같이, 모양 조각으로 집을 만들 때, 단계가 높아짐에 따라 필요한 조각의 수는 어떻게 변화할까요? 빈칸에 알맞은 수를 써 넣으시오.

1단계 2 단계 3단계
<table><tr><td>단계</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>조각의 수</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td></tr></table></td><td>단계의 수=3
조각의 수=9</td><td>601</td><td>92.7%</td><td>655</td><td>95.2%</td><td>740</td><td>98.5%</td></tr>
<tr><td>단계의 수=4
조각의 수=12</td><td>584</td><td>90.1%</td><td>642</td><td>93.3%</td><td>739</td><td>98.4%</td></tr>
<tr><td>단계의 수=5
조각의 수=15</td><td>568</td><td>87.7%</td><td>632</td><td>91.9%</td><td>733</td><td>97.6%</td></tr>
<tr><td>위의 3개 항목을 모두 맞춘 경우</td><td>560</td><td>86.4%</td><td>626</td><td>91.0%</td><td>729</td><td>97.1%</td></tr>
<tr><td>5. 72 번째 단계에는 몇 개의 모양 조각이 필요할까요? -> 조각의 수: (216)개</td><td>단계의 수=72
조각의 수=216</td><td>353</td><td>54.5%</td><td>437</td><td>63.5%</td><td>658</td><td>87.6%</td></tr>
<tr><td>6. □ 번째 단계에는 몇 개의 모양 조각이 필요할까요? --------(④)
① □+2 ② □+3 ③ □×2 ④ □×3</td><td>단계의 수=□
조각의 수=□×3</td><td>243</td><td>37.5%</td><td>422</td><td>61.3%</td><td>654</td><td>87.1%</td></tr>
</table>

은 것이다. 이러한 결과는 4번 문항의 경우 x의 값이 작고 연속된 수들로 주어졌기 때문에, 학생들이 변화하는 두 양 사이의 관계를 파악하지 못하더라도 그림이나 전항과 후항 사이의 관계를 이용하여 y의 값을 구할 수 있는 반면, 5번 문항의 경우 x의 값이 상대적으로 매우 큰 수로 주어졌기 때문에 변화하는 두 양 사이의 관계를 파악하지 않고서는 정답을 하기 어렵다는 점을 고려할 수 있을 것이다. 분석 결과, 정비례 관계의 문제 상황에서 변화하는 두 양 사이의 관계를 바르게 파악하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는 학생의 비율은 저·중학년의 경우 약 60% 수준이며, 고학년이 되어서도 90%에 미치지 못하는 것으로 드러났다.

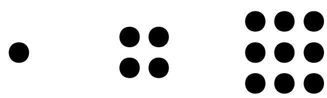
x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y의 값으로 적절한 것을 선택하는 6번 문항의 경우, 정답률이 2학년 37.5%, 4학년 61.3%, 6학년 87.1%로 나타났다. 이는 5번 문항에서의 정답률에 비해 2학년의 경우 17% 포인트, 4학년 2.2% 포인트, 그리고 6학년의 경우 0.5% 포인트 더 낮은 것으로 특히, 2학년에서의 정답률이 매우 저조한 것으로 드러났다. 오답 반응으로는 2, 4, 6학년 모두 '□+3'을 옳은 식으로 잘못 판단한 학생들이 가장 많은 것으로 드러났다. 이러한 학생의 비율은 2학년 36.7%, 4학년 24.4%, 6학년 7.2%로 특히, 2학년과 4학년에서 두드러지게 나타났다. 이 때, '□+3'을 선택한 학생들은 문제 상황에서 단계가 '1'씩 커질 때마다 조각의 수가 '3'개씩 늘어난다는 점에 착안하여 '+3'이 제시된 ②번을 선택한 것으로 유추된다.

다. 제곱 관계: $y=x^2$

제곱 관계에 대한 이해는 정사각형 모양의 배열로 점을 늘어놓는 상황에서 변화하는 두 양인 '배열의 단계(x)'와 '필요한 점의 수(y)' 사이의 관계가 '$y=x\times x$'임을 파악하고, x가 각각 작은 수, 큰 수, 임의의 수로 주어졌을 때, y의 값을 바르게 구할 수 있는지에 대한 반응 분석을 통해 알아보았다(<표 Ⅳ-9> 참조). 문항별로 학생들의 반응을 자세히 분석하면 다음과 같다. 먼저 x의 값이 작은 수(3, 4, 5)로 주어진 7번 문항의 경우, 정답률이 2학년 20.5%, 4학년 49.0%, 6학년 79.8%로 낮은 성공률을 보였다. 특히, x=3일 때의 정답률은 2학년 55.6%, 4학년 69.8%, 6학년 88.5%로 나타났는데, 검사지에 x가 3일 때의 점의 배열이 제시되어 있기 때문에 점을 직접 세어봄으로서 y의 값을 쉽게 구할 수 있다는 점을 고려하면, 학생들의 성공률이 꽤 낮다고 할 수 있다. x=4일 때의 정답률은 x=3일 때의 정답률에 비하여 더욱 낮게 나타났다. 즉, x=4일 때의 정답률은 2학년 27.2%, 4학년 54.7%, 6학년 83.2%로, 이는 x=3일 때의 정답률에 비하여, 2학년 28.4% 포인트, 4학년 15.1% 포인트, 6학년 5.3% 포인트 더 낮은 것이다. 특히, 2학년에서는 곱셈 구구를, 4학년에서는 자연수끼리의 곱셈 연산을 완성하는 시기라는 점을 고려하면, 이러한 결과는 계산상의 오류 보다는 제곱 관계를 파악하는 과정상의 어려움에서 비롯된다고 할 수 있을 것이다. 한편, x=5일 때의 정답률은 x=4일 때의 정답률에 비하여 2학년 5.1% 포인트, 4학년 3.8% 포인트, 6학년 1.2% 포인트 더 낮아져, 2학년 22.1%, 4학년 50.9%, 6학년 82.0%로 나타났다. 그러나 특이한 것은, x의 값에 따른 정답률 차이가 x=3일 때와 x=4일 때의 정답률 차이는 평균 16.3% 포인트 정도로 두드러지게 나타난 반면, x=4일 때와 x=5일 때의 정답률 차이는 평균 3.4% 포인트로 상대적으로 미미하게 나타났다는 점이다.

7번에서의 오답 반응으로는, x의 값이 3일 때 y값을 7로 반응한 학생이 가장 많았다(2학년 19.0%, 4학년 13.5%, 6학년 3.1%). x=4일 때의 오답 반응으로는 y=10라고 답한 학생이 가장 많

<표 Ⅳ-9> 제곱 관계 과제에서의 정답 빈도수와 정답률

<table>
<tr><th rowspan="2">검사 문항 (<u>4·6학년용</u>의 예)</th><th rowspan="2">비 고</th><th colspan="2">2학년(N=648)</th><th colspan="2">4학년(N=688)</th><th colspan="2">6학년(N=751)</th></tr>
<tr><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th></tr>
<tr><td rowspan="4">7. 아래 그림과 같이 점을 배열할 때, 배열의 단계가 높아짐에 따라 놓이는 점의 수는 어떻게 변화할까요? 빈칸에 알맞은 수를 써 넣으시오.

1단계 2단계 3단계
<table><tr><td>단 계</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>점의 수</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td></tr></table></td><td>단계의 수=3
조각의 수=9</td><td>360</td><td>55.6%</td><td>480</td><td>69.8%</td><td>665</td><td>88.5%</td></tr>
<tr><td>단계의 수=4
조각의 수=16</td><td>176</td><td>27.2%</td><td>376</td><td>54.7%</td><td>625</td><td>83.2%</td></tr>
<tr><td>단계의 수=5
조각의 수=2</td><td>143</td><td>22.1%</td><td>350</td><td>50.9%</td><td>616</td><td>82.0%</td></tr>
<tr><td>위의 3개
항목을 모두
맞춘 경우</td><td>133</td><td>20.5%</td><td>337</td><td>49.0%</td><td>599</td><td>79.8%</td></tr>
<tr><td>8. 21번째 단계에는 몇 개의 점이 놓일까요?
-----> 점의 수: (441)개</td><td>단계의 수=21
조각의
수=441</td><td>113</td><td>17.4%</td><td>186</td><td>27.0%</td><td>515</td><td>68.6%</td></tr>
<tr><td>9. □ 번째 단계에는 몇 개의 점이 놓일까요? -------(③)
① □+3 ② □+□ ③ □×□ ④ □×4－1</td><td>단계의 수=□
조각의
수=□×□</td><td>199</td><td>30.7%</td><td>387</td><td>56.3%</td><td>639</td><td>85.1%</td></tr>
</table>

았고(2학년 19.9%, 4학년 12.6%, 6학년 3.3%), x=5일 때는 y=13으로 답한 학생이 가장 많았다(2학년 18.8%, 4학년 12.4%, 6학년 3.3%). 이처럼 x의 값이 각각 3, 4, 5일 때의 y값으로 7, 10, 13을 답한 학생들의 비율이 가장 높았는데, 이러한 학생들은 단계의 수가 '1'에서 '2'로 '1'만큼 늘어났을 때, 점의 수가 '1'에서 '4'로 '3'만큼 늘어났다는 점에 착안하여 표를 완성한 것으로 유추해 볼 수 있다. 이러한 결과는 상당수의 학생들이 x와 y사이의 관계를 파악하는 과정에서 첫 번째 항과 두 번째 항 사이의 관계만을 제한적으로 고려하여 규칙을 찾는 경향이 있음을 단편적으로 드러낸다.

한편, x의 값이 비교적 큰 수(2학년: 10, 4·6학년: 21)로 주어진 8번 문항의 경우, 정답률이 2학년 17.4%, 4학년 27.0%, 6학년 68.6%로 나타났다. 이는 7번 문항에서의 정답률에 비해 평균적으로 12.1% 포인트 더 낮은 것으로, x=3일 때와 x=4일 때의 정답률 차이(평균 16.3% 포인트)보다 오히려 근소한 차이를 보이는 것으로 드러났다. 오답 반응으로는 2학년의 경우 x=10일 때의 y의 값으로 '30'을 답한 학생의 비율이 5.4%로 가장 많았고 '40'을 답한 학생의 비율이 4.0%로 그 뒤를 이었다. '30'과 '40'은 각각 '10의 3배'와 '10의 4배'에 해당하는 값으로, 상당수의 2학년 학생들이 x와 y사이의 관계를 'y=3x' 또는 'y=4x'로 잘못 파악한 것으로 보인다. 4학년에서 나타난 오답 반응으로는 x=21일 때의 y의 값을 '42'로 답한 경우였는데, 이러한 학생의 비율이 4학년의 9.3%나 되는 것으로 나타났다. '42'는 '21의 2배'에 해당하는 값으로, 상당수의 4학년 학생들이 x와 y사이의 관계를 'y=2x'로 잘못 파악한 것으로 보인다.

x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때의 정답률은 2학년 30.7%, 4학년 56.3%, 6학년 85.1%로 나타났다. 이는 x의 값이 큰 수로 주어졌을 때의 정답률에 비하여 2학년의 경우 13.3% 포인트, 4학년의 경우 29.3% 포인트, 그리고 6학년의 경

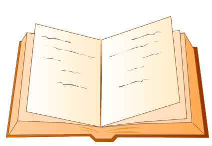
우 16.5% 포인트 더 높게 나타났다. 오답 반응을 살펴보면, 2학년에서는 ‘□+3’번을 선택한 학생들의 비율이 24.2%로 가장 많았고, ‘□+□’번을 선택한 학생의 비율이 19.6%로 두 번째로 많았다. 4학년에서는 ‘□+□’번을 선택한 학생의 비율이 14.2%로 가장 많았고, ‘□+3’을 선택한 학생들의 비율이 12.6%로 두 번째로 많았다. 이러한 결과는 상당수의 학생들이 제곱 관계를 이해하고 일반화하는 데 어려움을 겪고 있음을 드러낸다.

라. 반비례 관계: $xy=a$

반비례 관계에 대한 이해는 120쪽(2학년은 24쪽)으로 구성된 동화책을 매일 일정량만큼 읽어나가는 상황에서의 변화하는 두 양인 ‘하루 동안 읽는 동화책의 쪽수(x)’와 ‘책을 읽기 위해 필요한 날짜의 수(y)’ 사이의 관계가 ‘$x \times y = 120$(2학년, $x \times y = 24$)’임을 파악하고, x가 주어졌을 때, y의 값을 바르게 구할 수 있는지에 대한 반응 분석을 통해 알아보았다(<표 Ⅳ-10> 참조). 문항별로 학생들의 반응을 자세히 분석하면 다음과 같다. 10번 문항에서의 정답률은 2학년 81.3%, 4학년 94.3%, 6학년 97.7%로 나타났다. 이처럼 반비례 관계의 문제 상황에서 주어진 패턴을 토대로 후속 항의 값을 예측하는 데 있어서 저·중·고학년 학생 모두 높은 성공률을 보였다. 특히, 반비례 관계는 곱셈 및 나눗셈 개념과 직결되며, 곱셈 개념은 2학년에서 나눗셈 개념은 3학년에서 도입된다는 점을 고려할 때, 2학년에서의 성공률이 80%이상이라는 것은 꽤 고무적이라고 할 수 있다.

한편, 하루에 읽는 책의 쪽수가 15쪽(2학년의 경우 2쪽)으로 주어졌을 때의 정답률은 2학년 28.9%, 4학년 52.5%, 6학년 84.0%로 나타났다.

<표 Ⅳ-10> 반비례 관계 과제에서의 정답 빈도수와 정답률

<table>
<tr><th rowspan="2">검사 문항 (4·6학년용의 예)</th><th rowspan="2">비 고</th><th colspan="2">2학년(N=648)</th><th colspan="2">4학년(N=688)</th><th colspan="2">6학년(N=751)</th></tr>
<tr><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th></tr>
<tr><td rowspan="4">10. 120쪽까지 있는 동화책을 하루에 몇 쪽씩 읽어서 끝까지 다 보려고 합니다. 하루에 읽는 동화책의 쪽수를 줄여나감에 따라 책을 모두 읽기 위해 필요한 날짜의 수는 어떻게 변화할까요? 빈칸에 알맞은 수를 써 넣으시오.
<table>
<tr><th>일</th><th>월</th><th>화</th><th>수</th><th>목</th><th>금</th><th>토</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td></tr>
<tr><td>29</td><td>30</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>하루에 읽는 책의 쪽 수</td><td>120</td><td>60</td><td>40</td><td>30</td><td>24</td></tr>
<tr><td>날짜의 수</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
</table></td>
<td>하루에 읽는 책의 쪽 수=40 날짜의 수=3</td><td>569</td><td>87.8%</td><td>663</td><td>96.4%</td><td>735</td><td>97.9%</td></tr>
<tr><td>하루에 읽는 책의 쪽 수=30 날짜의 수=4</td><td>567</td><td>87.5%</td><td>658</td><td>95.6%</td><td>735</td><td>97.9%</td></tr>
<tr><td>하루에 읽는 책의 쪽 수=24 날짜의 수=5</td><td>553</td><td>82.3%</td><td>650</td><td>94.5%</td><td>734</td><td>97.7%</td></tr>
<tr><td>위의 3개 항목을 모두 맞춘 경우</td><td>527</td><td>81.3%</td><td>649</td><td>94.3%</td><td>734</td><td>97.7%</td></tr>
<tr><td>11. 책을 하루에 15쪽씩 읽는다면, 책을 모두 읽는 데 며칠이 걸릴까요?
-->날짜의 수: (8)일</td><td>하루에 읽는 책의 쪽 수=15 날짜의 수=8</td><td>187</td><td>28.9%</td><td>361</td><td>52.5%</td><td>631</td><td>84.0%</td></tr>
<tr><td>12. 책을 하루에 □쪽씩 읽는다면, 책을 모두 읽는 데 며칠이 걸릴까요?-(④)
① 120+□ ② 120-□
③ 120×□ ④ 120÷□</td><td>하루에 읽는 책의 쪽 수=□ 날짜의 수 =120÷□</td><td>178</td><td>27.5%</td><td>462</td><td>67.2%</td><td>652</td><td>86.8%</td></tr>
</table>

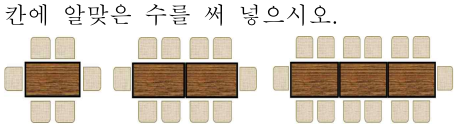
이는 앞선 문항에서의 정답률에 비해 2학년 52.4% 포인트, 4학년 41.8% 포인트, 6학년 13.7% 포인트 더 낮은 것으로 주의를 기울일 필요가 있다.

12번 문항은 하루에 읽는 책의 쪽수가 임의의 수(□)로 주어졌을 때 필요한 날짜의 수를 구하는 것으로, 정답률이 2학년 27.5%, 4학년 67.2%, 6학년 86.8%로 나타났다. 특히, 2학년은 나눗셈 개념 대신 동수누감을 사용하여 문항을 구성하였고 책 한권의 분량을 '24'쪽으로 제시하였는데, 적절한 반응(24에서 □를 몇 번 빼면 되는지를 생각해본다)을 보인 학생의 비율이 30%수준에 미치지 못하는 것으로 드러났다. 오답 반응을 살펴보면, 2학년 학생들은 '24에 □를 몇 번 더하면 되는지를 생각해본다'를 선택한 학생들이 23.1%로 가장 많았고, 4학년 학생들은 '120+□'를 선택한 학생들이 10.2%로 가장 많았다. '덧셈 관계'는 주어진 문제 상황과는 거리가 먼 것으로, 이러한 결과는 상당수의 저·중학년 학생들이 x와 y사이의 반비례 관계를 파악하는 데 어려움을 겪고 있음을 단편적으로 드러낸다고 할 수 있다. 한편, 6학년 학생들의 오답 반응으로는 '120-□'를 선택한 학생들이 4.9%로 가장 많았으며, '120+□'를 선택한 학생들의 비율은 2.3%로 상대적으로 낮게 나타났다.

마. 선형 관계: $y = ax + b$

선형 관계에 대한 이해는 책상과 의자를 이어 붙이는 상황에서 변화하는 두 양인 '책상의 수(x)'와 '앉을 수 있는 사람의 수(y)' 사이의 관계가 '$y = 4 \times x + 2$'임을 파악하고, x가 각각 작은 수, 큰 수, 임의의 수로 주어졌을 때, y의 값을 구할 수 있는지에 대한 반응 분석을 통해 알아보았다(<표 Ⅳ-11> 참조). 문항별로 학생들의 반

<표 Ⅳ-11> 선형 관계 과제에서의 정답 빈도수와 정답률

<table>
<tr><th rowspan="2">검사 문항 (<u>4·6학년용</u>의 예)</th><th rowspan="2">비 고</th><th colspan="2">2학년(N=648)</th><th colspan="2">4학년(N=688)</th><th colspan="2">6학년(N=751)</th></tr>
<tr><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th><th>빈도수</th><th>정답률</th></tr>
<tr><td rowspan="4">13. 아래 그림과 같이 책상을 길게 이어 붙여서 앉으려고 합니다. 이어붙이는 책상의 수를 늘려 나감에 따라 앉을 수 있는 사람의 수는 어떻게 변화할까요? 빈칸에 알맞은 수를 써 넣으시오.

책상 1개 책상 2개 책상 3개
<table><tr><td>책상의 수</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>사람의 수</td><td>6</td><td>10</td><td>14</td><td>18</td><td>22</td></tr></table></td><td>책상의 수=3
사람의 수=14</td><td>507</td><td>78.2%</td><td>611</td><td>88.8%</td><td>714</td><td>95.1%</td></tr>
<tr><td>책상의 수=4
사람의 수=18</td><td>459</td><td>70.8%</td><td>587</td><td>85.3%</td><td>694</td><td>92.4%</td></tr>
<tr><td>책상의 수=5
사람의 수=22</td><td>398</td><td>61.4%</td><td>573</td><td>83.3%</td><td>683</td><td>90.9%</td></tr>
<tr><td>위의 3개 항목을 모두 맞춘 경우</td><td>388</td><td>59.9%</td><td>565</td><td>82.1%</td><td>669</td><td>89.1%</td></tr>
<tr><td>14. 책상 15개를 이어 붙이면, 몇 명의 사람이 앉을 수 있을까요?
---> 사람의 수: (62)명</td><td>책상의 수=15
사람의 수=62</td><td>170</td><td>26.2%</td><td>254</td><td>36.9%</td><td>567</td><td>75.5%</td></tr>
<tr><td>15. 책상 □개를 이어 붙이면, 몇 명의 사람이 앉을 수 있을까요? --------(③)
① □× 4 ② (□ × 2) + 4
③ (□× 4) + 2 ④ (□ × 4) + 4</td><td>책상의 수=□
사람의 수=
(□× 4) + 2</td><td>126</td><td>19.4%</td><td>316</td><td>45.9%</td><td>609</td><td>81.1%</td></tr>
</table>

응을 자세히 분석하면 다음과 같다. 먼저 x의 값이 작고 연속된 수(3, 4, 5)로 주어진 13번 문항에서의 반응을 살펴보면, 정답률이 2학년 59.9%, 4학년 82.1%, 6학년 89.1%로 나타났다. 즉, 선형 관계의 문제 상황에서 주어진 패턴을 토대로 후속 항의 값을 예측하는 데 있어서 저학년은 약 60%, 중·고학년은 80% 수준의 성공률을 보였다.

한편, 책상의 수가 비교적 큰 수(2학년: 8, 4·6학년: 15)로 주어졌을 때의 정답률은 2학년 26.2%, 4학년 36.9%, 6학년 75.5%로, 13번 문항의 정답률에 비해, 2학년 33.7%, 4학년 45.2%, 6학년 13.6% 더 낮게 나타났다. 이는 앞선 문항이 그림을 이용하거나 전항과 후항 사이의 관계를 이용해서도 답을 쉽게 구할 수 있지만, 책상의 수가 상대적으로 큰 수일 때는 그런 방법들이 쉽게 통하지 않으며, 두 변량 사이의 관계를 파악할 필요가 있음을 반영한다. 오답 반응으로는 2학년의 경우 x=8일 때의 y의 값으로 '32'를 답한 학생의 비율이 9.3%로 가장 많았고, 4학년에서는 x=15일 때의 y의 값으로 '60'을 답한 학생의 비율이 14.5%로 가장 많았다. 이는 상당수의 학생들이 x와 y사이의 관계를 '$y=4\times x$'로 잘못 파악하고 있음을 드러낸다.

책상의 수가 임의의 수(□)로 주어졌을 때 의 정답률은 2학년 19.4%, 4학년 45.9%, 6학년 81.1%로, 14번 문항에서의 정답률에 비해 2학년의 경우 6.8% 포인트 더 적게 나타난데 반해, 4학년 9% 포인트 더 높게, 6학년 5.6% 포인트 더 높게 나타났다. 오답 반응으로는 2, 4학년 모두 '□×4'를 선택한 학생이 가장 많았으며, 이러한 학생의 비율은 2학년의 30.4%, 4학년의 23.0%로 나타났다. 반면, 6학년에서의 오답 반응으로는 '(□×2)+4'를 선택한 학생들이 8.0%로 가장 많았으며, '□×4'를 선택한 학생 5.2%로 상대적으로 적은 것으로 나타났다.

Ⅴ. 결론 및 시사점

본 연구는 초등학교 교과서에서 다루는 함수적 관계들을 중심으로 저·중·고학년 학생들의 이해 수준과 경향 등을 분석하였다. 이에 본 연구는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 함수적 관계에 대한 학생들의 이해는 지역규모나 성별에 따라 큰 차이가 나타나지 않았으며, 통계적으로도 유의미한 차이를 보이지는 않는 것으로 드러났다. 반면, 과제 유형이나 문제 상황별로는 학생들의 이해 정도에 다소 큰 차이가 나타났으며, 이러한 차이에 주의를 기울일 필요가 있었다.

둘째, 초등학생들의 함수적 사고 능력은 다루는 함수적 관계가 무엇이냐에 따라 다르게 나타났다. 예를 들어, 덧셈 관계의 경우에는 초등학교 저학년에서부터 60%이상의 정답률을 보이기 시작하여 4학년에서는 80%이상, 6학년에서는 95%이상의 정답률을 보였다. 이에 반해, 제곱 관계와 선형관계의 경우에는 4학년에서도 정답률이 60% 수준을 넘지 못하였으며, 6학년에서도 80% 내외의 정답률을 보이는데 그쳤다.

셋째, 학생들은 그림을 활용하거나, 전항과 후항 사이의 관계를 이용하여 해결할 수 있는 문항의 경우에는 꽤 높은 성공률을 보이지만, 변화하는 두 양 사이의 관계를 바르게 파악해야만 해결가능한 문항의 경우에는 많은 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 덧셈 관계를 예로 들면, 학생들은 x의 값이 일련의 연속된 수로 주어져서 전항과 후항 사이의 관계를 적용하여 후속 항을 예측할 수 있는 문항에서는 2학년에서도 90%이상의 성공률을 보였다. 이에 반해, x의 값이 큰 수로 주어져서 전항과 후항 사이의 관계를 적용하기 어려운 문제 상황에서는 6학년의 경우에만, 정답률이 90% 수준에 도달하였고, 2학년과 4학년은 각각 약 50%와 약 80% 정도의 정답률을 보

이는데 그쳤다.

넷째, 초등학생들에게 임의의 수(□)를 대상으로 함수적 관계를 탐구하도록 하는 활동이, 큰 수를 대상으로 함수적 관계를 탐구하도록 하는 활동에 비해 더 어려운 활동이라고 단정 짓기에는 무리가 있는 것으로 드러났다. 본 연구에서 x의 값이 임의의 수(□)로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률은, x의 값이 큰 수로 주어졌을 때 y값을 구하는 문항에서의 정답률에 비하여 다소 높게 나타났다.

분석 결과를 바탕으로 초등학교에서의 함수적 사고 지도 방안에 대한 시사점을 논의해 보면 다음과 같다. 첫째, 충분한 사례 탐구를 통해 문제 상황 전체를 아우를 수 있는 규칙을 찾아내도록 독려할 필요가 있다. 본 연구에서 상당수의 학생들이 문제에서 주어진 첫 번째 항과 두 번째 항만을 제한적으로 고려하여 규칙을 찾는 경향이 있음을 확인하였다. 이러한 학생들은 자신이 찾은 규칙이 후속 항에서도 참이 되는지에 대한 검토 과정 없이 문제 상황에서 항상 성립하는 규칙으로 쉽게 받아들임으로써 결국 문제 해결에 실패하게 되는 결과를 낳았다. 따라서 문제 상황에 어울리는 충분한 사례들을 찾아내고, 그러한 사례들에 공통으로 적용될 수 있는지를 점검해 나가는 경험을 제공할 필요가 있다.

둘째, 전항과 후항 사이의 관계를 넘어서서 변화하는 두 양 사이의 관계를 탐구하고 정당화하는 경험을 보다 강조하여 제공할 필요가 있다. 본 논문에서 작고 연속된 수 사이의 관계를 찾아 표를 완성하는 문항에서는 비교적 성공률이 높았으나, 큰 수로 주어졌을 때의 성공률은 평균적으로 23.93%포인트 더 낮은 것으로 드러났다. Smith(2008)는 변화하는 두 양 사이의 관계에 초점을 맞추고 하나의 양이 변화할 때, 다른 양이 어떻게 변화하는지를 관련지어 탐구할 때, 비로소 함수적 사고가 시작된다고 논의한다. 그러나 연구결과 상당수의 학생들이 전항과 후항 사이의 관계 탐구에만 머무르는 것으로 나타났다. 이러한 양상은 특히, 문제 상황에 알맞은 관계식을 찾는 과정에서 두드러지게 나타났는데, 많은 학생들이 변화하는 두 양 사이의 관계를 관계식으로 표현하기 보다는, 전항과 후항 사이의 관계를 반영하여 관계식으로 나타내려는 경향을 보였다.

셋째, 초등학교에서 제곱 관계를 다룰 때, 더욱 세심하게 접근할 필요가 있다. 제곱 관계는 4학년 1, 2학기 교과서에서 다루어지는 관계 중 하나로, 변화하는 양 사이의 관계를 '수', '글', '말' '기호를 이용한 식' 등을 사용하여 표현하도록 일련의 활동들이 제시되어 있다. 그러나 연구 결과, 학생들의 제곱 관계에 대한 이해는 다른 함수적 관계와 비교해 볼 때 가장 낮게 드러났다. 특히 교과서와 유사한 형태의 문항에 대해서 4학년 학생들의 정답률이 50%에 미치지 못하는 것으로 드러났음에 주목할 필요가 있다. 교육과정상 6학년에서 다루는 정비례 관계와 반비례 관계에 대한 4학년 학생들의 정답률이 70%를 넘는다는 것과 대조해볼 때 제곱 관계에 대한 정답률은 더욱 낮다는 것을 알 수 있다. 따라서 다른 함수적 관계와 비교하여 특히 제곱 관계에 대한 학생들의 이해 정도가 낮은 이유를 보다 면밀하게 조사할 필요가 있다.

본 연구는 초기 대수적 관점에서 초등학생들의 함수적 사고 능력에 대한 최근의 관심에도 불구하고 정작 우리나라 학생들 전반에 걸친 이해 능력을 조사한 연구가 없다는 점을 감안할 때 의미 있는 자료를 제공해 줄 수 있을 것으로 기대된다. 본 연구를 바탕으로 앞으로 초등학생들의 함수적 사고 능력을 함양하기 위한 구체적인 지도 방안이 논의되기를 기대한다.

참고문헌

교육부(1997). **수학과 교육과정.** 교육부 고시 제 1997-15 [별책 8]. 서울: 대한교과서.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정.** 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8].

교육과학기술부(2010a). **수학 4-1.** 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2010b). **수학 4-2.** 서울: 두산동아.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정.** 교육인적자원부 고시 제2007-79호[별책 8].

김남희・나귀수・박경미・이경화・정영옥・홍진곤(2006). **수학교육과정과 교재연구.** 서울: 경문사.

김성준(2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. **학교수학**, 5(3), 343-360.

나경수·최성필(2011). 타 교과와 연결된 상황 설정을 통한 함수적 사고 지도 방안. **학교수학**, 13(4), 651-674.

이화영·류현아·장경윤(2009). 함수의 그래프 표현 및 그래프 해석 지도 가능성 탐색: 초등학교 5학년을 중심으로. **학교수학**, 11(1), 131-145.

최지영·방정숙(2008). 초등학교 4학년 학생들의 대수적 사고 분석. **수학교육 논문집**, 22(2), 137-164.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 135-142.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(5), 412-446.

Boester, T., & Lehrer, R. (2008). Visualizing algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 211-234). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Brizuela, B., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 37(2), 87-115.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education,* 38(3), 358-288.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium.* Washington, DC: National Academy Press.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W.

Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades.* New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J., & Izsák, A. (2008). A history of algebra in the school curriculum. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 3-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moss, J., Beatty, R., Barkin, S., & Shillolo, G. (2008). "What is your theory? What is your rule?" fourth grades build an understanding of functions through patterns and generalizing problems. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school* mathematics (pp. 155-168). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). New York: Lawrence Erlbaum.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, pp. 305-312. Melbourne, Victoria: University of Melbourne.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 113-126). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

An Analysis of Elementary School Students' Understanding of Functional Relationships

Choi, Ji Young (Seoul YeongNam Elementary School)
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

This study investigated elementary school students' understanding of basic functional relationships. It analyzed the written responses from a total of 2087 students of second, fourth, and sixth graders using tests that examined their understanding of five types of functional relationships.

The results of this study showed that students tended to be more successful as their grades went up with regard to all the problem types. There were statistically differences among the three grade levels. Even lower graders were quite successful in dealing with additive relation, direct proportion, and inverse proportion. However the items dealing with square relation and linear relation were difficult even to sixth graders. It was common that students were good at completing the table by looking for a pattern from the given numbers but that they had difficulties in anticipating the value of 'y' when the value of 'x' is given either as a big number or as a symbol. Given these results, this paper includes issues and implications on how to foster functional thinking ability at the elementary school.

* Key Words : early algebra(초기 대수), functional thinking(함수적 사고), functional relationship (함수적 관계), additive relation(덧셈 관계), square relation(제곱 관계), direct proportion(정비례), inverse proportion(반비례), linear relation(선형 관계)

논문접수 : 2012. 8. 5
논문수정 : 2012. 8. 31
심사완료 : 2012. 9. 13