韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2012. 08. 제 51권, 제 3호, 211-221.

J. KSME(Math. Edu) ISSN 1225-1380
August. 2012, Vol. 51 No. 3, 211-221.

등비수열의 정의에 대한 연구

이 민 정 (부산대학교 대학원)†
이 양 (부산대학교)

Ⅰ. 서 론

고다이라 구니히코(1999)는 수학이란 자연현상 속에서 수학적 현상을 연구하는 학문이라고 했는데 실제 현대수학의 이론 체계는 일반적으로 공리계에서 출발하여 순차적으로 정리를 증명해가는 순서로 되어있다. 공리계는 그 게임의 규칙에 해당하는 것이다. 따라서 공리계의 시작인 정의의 자연스러움, 정확성과 통일성은 진정 중요하다고 할 수 있다. 본 연구에서는 중등수학에서 다루어지고 있는 등비수열의 정의에 대해서 살펴보고 수정할 점에 대해 논의하고자 한다.

양승갑 외(2009)(p.121)는 어떤 수에서 차례로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라고 하며, 공비는 곱해지는 일정한 수라고 정의하고 있다. (주)지학사 교과서, (주)고려출판 교과서, (주)미래엔 컬처그룹 교과서, (주)두산동아 교과서, ㈜천재교육 교과서에서도 같이 정의하고 있다(이강섭 외, 2010, 이만근 외, 2009, 유희찬 외, 2009, 우정호 외, 2012, 최용준 외, 2012a). 이 정의에 의하면 등비수열의 공비는 0일수도 있다.

하지만 영국의 Hall과 Knight(1940)(p.37)는 등비수열(Geometrical Progression)과 공비를 국내와 다르게 정의하고 있다. 즉, 수열에서 이전의 양에 일정한 수가 곱해져서 양이 증가하거나 감소할 때 그 수열을 등비수열이라고 정의했으며, 등비수열의 공비(common ratio)란 일정하게 곱해지는 수라고 했다. 그러므로 공비는 0이 될 수 없고, 수열 $0, 0, 0, 0, \ldots$ 또는 수열 $1, 0, 0, 0, \ldots$은 증가하거나 감소하지 않으므로 등비수열이 될 수 없다. 그리고 수열 $1, 1, 1, 1, \ldots$와 수열 $1, -1, 1, -1, \ldots$도 이 정의로는 등비수열이 될 수 없다. 영어판 위키피디아 Wikipedia(2012)는 등비수열의 공비를 일정하게 곱해지는 0이 아닌 고정된 수(fixed non-zero number)로 정의하고 있다. 일본어판 위키피디아 ウィキペディア(2012)에서 등비수열(等比數列, とうひすうれつ)은 서로 이웃이 되는 두 항의 비가 항 번호에 의하지 않고 일정한 것으로, 그 비를 공비(公比, こうひ, 영어: common ratio) 라고 하여, 기호 r로 나타낸다고 한다. r은 0 이외의 모든 수를 취할 수 있다고 하였다. 중국어판 위키피디아 維基百科(2012)는 등비수열(等比數列)을 앞항과 뒷항의 비가 일정한 수열로 정의하는데 따로 정의를 두지 않고 공비가 2인 경우를 예로 들어 설명하고 있다. 비의 정의에 따라 공비가 0이 아닐 수도 있겠지만 그러한 별다른 언급은 찾아볼 수 없었다.

나귀수(2005)는 PISA(Programme for International Student Assessment, 국제학업성취도평가)가 국가별 학생들의 수학적 소양을 평가할 때, 학교 교육과정에 근거한 지식보다는 실생활에 필요한 능력, 즉 지식을 상황과 목적에 맞게 활용할 수 있는 기본적인 '소양'을 강조한다고 하였다. 이런 맥락에서 학생들이 학교 교육과정에 근거한 지식 이외에 실생활에서 다양한 출처인 국내, 국외 서적, Wikipedia를 통하여 정보를 획득하는 것은 강조되어야 할 것이다. 정보를 획득하는 과정에서 학생들은 미국, 영국, 일본 등의 국제적인 등비수열의 공비의 정의를 접하게 될 것이고, 이들 국가와 다른, 국내 교과서의 정의 방법은 국내 학생들에게 비, $\frac{0}{0}, \ldots$ 에 대한 심각한 오 개념을 발생시킬 수 있다.

정경미(2010)는 수학 교수학을 인류학과 관련하여 수열의 극한에 관해 연구하며, 무한등비급수의 지도방법에

* 접수일(2012년 5월 8일), 수정일(2012년 6월 18일), 게재확정일(2012년 8월 20일)
* ZDM분류 : B74, U24, G14
* MSC2000분류 : 97B40
* 주제어 : 등비수열, 무한등비수열, 무한등비급수, 등비급수, 공비
† 교신저자 : nice1mj@nate.com

대해서도 연구하였다. 하지만 무한등비급수의 공비의 정의는 모든 국내 교과서에서 통일하여 정의하고 있기 때문에 정의 자체에 문제를 두고 연구한 선행연구는 부족하다. (주)금성출판사 교과서, (주)지학사 교과서, (주)고려출판 교과서, (주)미래엔 컬처그룹 교과서, (주)두산동아 교과서, ㈜천재교육 교과서에는 수학 Ⅰ 수열 단원에서 등비수열의 정의가 먼저 제시되어 있고, 수학 Ⅰ 수열의 극한 단원에서 무한등비수열과 무한등비급수가 차례대로 제시되어 있다. 몇몇 국외 서적과 국내 서적 또는 국외 서적들 사이의 이러한 등비수열의 정의의 상이함이 학생들을 지도하는 교사들과 학생들에게 수열 자체에 대한 혼란을 야기할 수 있음에 문제를 제기하였다. 그리고 이러한 등비수열의 정의의 국제적인 상이함은 등비수열 뿐 만 아니라 무한등비수열과 무한등비급수까지 확장되어 학생들과 교사들에게 극한에 대한 개념에까지 혼돈을 야기할 수 있다.

본 연구에서는 등비수열의 정의의 기원을 찾아 보고, 무한등비수열과 무한등비급수에서 공비의 정의를 상이하게 하고 있는 여러 자료들을 조사해 보았다(Hall & Knight, 1940; Glfand & Shen, 1993; Kaufmann & Schwitters, 2009; Eves, 1995; Eicholz et als., 1991; 김동화와 홍우철, 2010). 국내 교과서를 통해 공부했던 학생들이 가지고 있는 등비수열의 개념에 대한 생각을 설문조사해 보았다. 그리고 무한등비수열의 수렴 조건과 무한등비급수의 수렴조건을 구하는 국내 교과서 연습 문제들이 학생들과 교사가 그 내용을 이해하는 데에 어떠한 어려움을 야기할 수 있는지 연구해 보았으며, 그 적절한 지도 방법을 제안해 보았다. 편의상 접근이 용이했던 상, 하수준이 섞인 9명의 학생들만 대상으로 설문조사하였으며, 등비수열의 정의를 영국과 미국, 일본과 중국의 서적만 조사하여서 일반화하는 데에는 한계가 있으나, 유클리드 원론과 미국 교과서의 비의 정의를 통하여 수학사 속에서 등비수열의 의미를 찾을 수 있어서 큰 의의가 있다고 볼 수 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 등비수열의 수학적 정의

미국의 Glfand와 Shen(1993)은 $1, 0, 0, 0, \ldots$를 등비수열인지에 대해 논의하였는데, $1, 0, 0, 0, \ldots$을 일정하게 곱해지는 수가 0인 등비수열로 볼 수 있으나, 몇몇의 경우에 수열의 공비를 0이 아니라고 요구할 수 있다고 했다. 즉, 국제적으로 등비수열의 공비에 대한 정의가 하나로 통일되어 있지 않다는 것을 알고 있다는 것을 의미한다. 그래서 그 이유를 보다 자세히 알기 위해서 등비수열의 기원을 찾아보았다. 등비수열은 유클리드 원론을 그 기원으로 하고 있었다.

Eves(1995)(p.127)는 유클리드 원론 제 Ⅷ 권에서 연속비례 $a:b=b:c=c:d$이면 a, b, c, d는 등비수열이라 한다고 하였다. 여기서 비(ratio)를 어떻게 정의할 것인가 하는 문제가 생긴다. Eicholz 외(1991)는 미국의 교과서에서 비(ratio)를 처음 도입하는 5학년 과정에서 비(비율)을 세 가지 방법으로 표현하고 있는데, “a to b, $a : b$, $\frac{a}{b}$ ”와 같이 말로 표현, 콜론(colon) 표현, 분수 표현을 함께 제시하고 있다(김홍기, 2009, p.3, 재인용). 이에 의하면 유클리드 원론의 $a:b=b:c=c:d$는 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$가 되어 분모인 b, c, d는 모두 0이 되어서는 안 된다. 그러면 a도 0이 될 수 없다. 유클리드 원론의 연속비례에서 등비수열이라 할 때 이 수열은 “서론”의 Hall과 Knight(1940)의 정의와 같이 항의 양이 증가하거나 감소할 때에만 의미가 있을 수 있다. 그러므로 공비가 1 또는 -1인 경우는 의미가 거의 미비하다. 하지만 공비가 1 또는 -1이 안되는 것은 아니다. 일반적으로 원론에 표현된 문자 a, b, c, d는 값이 다를 때 의미가 있을 것이다.

미국의 Kaufmann과 Schwitters(2009)는 등비수열(geometric progression)의 정의를 우리나라 교과서와 똑같이 두되, 공비를 일정하게 곱해지는 수 r으로 0이 아닌 수로 정의하고 있다. <표 1>은 등비수열의 일반항에 대한 일반적인 국내 교과서의 내용이다. <표 1>을 볼 때, $r=0$이면 $n=1$일 때 0^0이 되어 정의가 되지 않는다. 김동화와 홍우철(2010)은 영의 영제곱은 부정형(indeterminate form)이라는 사실은 19세기 코시에 의하여 극한의 개념이 정립되는 시기에 요즘 일반적으로 받아들여지고 있는 것처럼 이해되기 시작했다고 했으며, 영의 영제곱이 1이 되어야 한다는 주장과 관련된 지도 방법을 제시하였다. 만약에 등비수열의 공비가 0이 될

수 있다면 내용의 엄밀성을 위해 경우(case)를 1), 2)로 나누어 1) $r \neq 0$일 때, 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n = ar^{n-1}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) 2) $r=0$일 때, 등비수열의 제 n 항은 0 (단 $n \geq 2$) 이라는 식으로 제시해야 할 것이다.

하지만 교과서에서는 그렇게 제시하지 않았기 때문에 교과서에서도 $r \neq 0$라 두고 일반항을 유도한 것으로 볼 수 있다. Hall과 Knight(1940)도 <표 1>과 같이 일반항을 표현하고 있다. 그러므로 공비의 정의를 Wikipedia의 정의로 일정하게 곱해지는 0이 아닌 고정된 수(fixed non-zero number)로 국제적으로 통일하는 것이 가장 타당하다고 볼 수 있다.

<표 1> 국내 교과서의 등비수열의 일반항

등비수열의 일반항 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n = ar^{n-1}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

2. 무한등비수열과 급수의 교과서 내용 분석 및 연구 대상 선정 배경

국내 고등학교 수학 Ⅰ (주)금성출판사, (주)지학사, (주)고려출판, (주)미래엔 컬처그룹, ㈜두산동아, ㈜천재교육 교과서에서는 무한등비수열을 항의 개수가 무한인 등비수열이라고 정의하고 있다. 무한등비급수란 등비급수 가운데 무한 등비수열의 항을 한없이 더한 것이라고 정의하고 있다. 등비수열의 공비의 연장선에서 무한등비수열의 공비, 무한등비급수의 공비를 정의하고 있는 것이다. (주)금성출판사, (주)지학사, (주)고려출판, (주)미래엔 컬처그룹, ㈜두산동아, ㈜천재교육 교과서는 국가 검정을 거친 국내 교과서 중에서 6개를 무작위로 추출한 것이다. 6개의 교과서는 공통적으로 무한등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 <표 2>와 같이 설명하고 있다. <표 3>은 무한등비급수의 수렴, 발산에 대한 설명이다. 6개의 교과서는 공통적으로 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴, 발산을 <표 3>과 같이 설명하고 있다. $r=0$인 경우 등비수열이 되는지 안 되는지 확인하는 과정이 없으며 $r=0$일 때를 제외한다는 어떠한 언급도 없다. 그래서 관련된 대학 전공 책, 국외 책을 찾아보았다.

<표 2> 무한등비수열의 수렴, 발산 설명

무한등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산 ❶ $r > 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ (발산) ❷ $r = 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$ (수렴) ❸ $-1 < r < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (수렴) ❹ $r \leq -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

<표 3> 무한등비급수의 수렴, 발산 설명

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴, 발산 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ $(a \neq 0)$은 ❶ $\lvert r\rvert < 1$이면 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다. ❷ $\lvert r\rvert \geq 1$이면 발산한다.

김광환(1996)은 국내 대학교재의 무한등비급수의 개념을 그의 서적에서 다음과 같이 정의하고 있는데, 등비급수라는 표현을 쓰지 않고 "급수"라는 표현을 쓰고 있다.

급수(series) $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots$의 제 n 부분 합

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$
$$= \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r} (r \neq 1)$$

따라서 $\lvert r\rvert < 1$일 때 $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$,

$\lvert r\rvert \geq 1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n \neq 0$이므로 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$은 발산한다.

광환(1996)은 연습문제에서도 등비급수라는 표현을 쓰지 않고 "급수"라는 표현을 사용하고 있다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 의 제 n 부분합 S_n은

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$= 1-\frac{1}{2^n}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n = 1$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$은 1로 수렴한다.

Hall과 Knight(1940)(p.230)는 급수 $1+x+x^2+x^3+\cdots$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 $\frac{1-x^n}{1-x}$이라 두고 x의 범위를 $|x|>1$, $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$으로 나누고, 이 급수의 수렴, 발산을 조사하고 있다. 역시 등비급수라는 표현을 쓰지 않고 "급수" 라는 표현을 사용하고 있다. 그리고 김광환(1996)과의 차이점은 $x=-1$일 때 이 급수를 "발산" 한다는 표현을 사용하지 않고 "주기적으로 수렴하는 급수" 라는 표현을 사용하고 있다. 이와 같이 본 연구에서는 여러 국내, 국외 서적에서 무한등비급수의 수렴, 발산에 대한 사소하지만 중요한 부분에서 일치하는 않는 표현들을 발견할 수 있었다.

Fitzpatrick(1996)은 급수(series)가 아니라 등비급수(geometric series)에 대해 김광환(1996)과 같이 정의하고 있다.

등비급수(geometric series)

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n = 1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n+\cdots$$

의 제 n 부분 합

$$s_n = 1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}$$
$$= \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}-\frac{r^n}{1-r}\,(r\neq 1)$$

따라서 $|r|<1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}s_n = \sum_{n=0}^{\infty}r^n = \frac{1}{1-r}$,

$|r|\geq 1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n \neq 0$이므로 $\sum_{n=0}^{\infty}r^n$은 발산한다. <Ⅱ. 이론적 배경 1. 등비수열의 수학적 정의>에서와 같이 $n=0$일 때 $r=0$이면 0^0으로 정의되지 않으며, 자연적으로 $r=0$인 경우는 제외된다. 그러므로 국외 서적에서는 $r=0$인 경우는 제외하고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 국내 교과서에서 $r\neq 0$라고 공비를 정의한다면, 무한등비급수와 무한등비수열의 정의에 모순이 없지만 $r=0$이라고 공비를 정의한다면, $\frac{0}{0}$, 0^0, ...의 정의되지 않는 부정형으로 인해 모순이 생기게 된다. 그런데 이러한 복잡한 등비수열의 배경을 이해하여 정의의 참과 거짓을 구분할 수 있고 대수적 체계를 쌓아가는 데 방해받지 않을 정도의 학생 수준은 대도시의 일반계 인문계 고등학교 수준별 이동수업시의 상 수준반 이상이 되어야 할 것이다.

David(2003)는 변수가 수학의 추상화에 필요한 기본 요소이지만 많은 학생들이 함수에서 변수의 의미를 잘 알지 못한다고 하였다. 수열도 함수라고 볼 때, 평균적인 고등학생들이 수열을 제대로 이해하기 어렵기 때문에 본 연구에서는 상 수준반 이상이라고 한 것이다.

즉, 앞항에 일정한 수가 곱해져서 다음 항이 만들어지는 수를 나열한 형태인, 예를 들면, 단순한 수열인 $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$이 등비수열이 된다는 의미와 이것의 일반항을 찾는 과정도 이해하기에 어려운 학생들에게 등비수열의 정의의 참, 거짓의 이해를 강요하는 것은 오히려 혼란만 초래하게 될 것이다. 하지만 하 수준 학생들도 상 수준 학생들과 같은 교실 내에서 정의의 상이함을 접하게 될 가능성 있으며, 결국 정의의 상이함은 수학의 내용에 혼란스러움을 가중시켜 수학을 재미있게 공부할 수 있는 가능성을 더욱 낮추게 된다. 따라서 공비를 포함한 수학의 여러 정의를 통일할 필요는 더욱 강조되어야 한다. 그러므로 본 연구에서는 상 수준과 하 수준의 학생들을 섞어서 등비수열의 정의에 대해 설문조사하는 연구대상으로 선정한다. 이 때 이해력이 우수한 상위권 학생들의 수를 더 많도록 한다.

MacGregor(2010)는 수학교수와 수학 교사를 제외하고, 수학적으로 능력이 있는 컴퓨터 계통 전문가는 학교에서 배운 대수적 절차와 관련은 없지만 컴퓨터 공학을 사용하지만 대부분의 다른 사람들은 학교에서 배웠던 대수가 그들의 삶에서 어떤 역할도 하지 못한다고 믿고 있었다고 한다. 그러므로 본 연구에서는 수학에 관심이 없지만 다른 진로를 생각해서 수학을 공부하는 학생이 아니라, 학교 이후의 삶에서도 수학을 공부할 가능성이 있는 수학사, 수학자에 관심이 많은 학생들을 연구 대상으로 선정한다. 수학에 관심이 없는 학생들을 연구 대상으로 할 때에 그들은 깊이 있게 생각하지 않고 답해 연구

결과의 신뢰도에 부정적인 영향을 끼칠 수 있다고 보았기 때문이다.

즉, 본 연구의 대상 학생 수는, 연구 내용이 통계처리를 목적으로 하지 않고, 공비가 0이 아니고 첫째항이 0이 아니라고 알고 있는 학생의 존재성을 찾고자 하기 때문에 10명 이내로 하며, 그런 학생이 없을 경우 다시 표본을 잡기로 한다. 연구 대상의 특징은 상 수준과 하 수준의 학생들을 섞어서 하되 상 수준 학생이 많도록 하고, 수학사, 수학자에 관심이 많은 학생들로 인원이 적더라도 신중하게 선정한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

2011년 9월 초에 대도시 일반 인문계 P고등학교 2학년 1~8반 학생들 중 수학에 관심이 있는 수학자 연구 동아리 학생들 9명을 대상으로 하였다. 이 학생들은 동아리 활동을 통해 수학사 EBS를 보았고, 지식채널e-수학자 1부 푸앵카레의 추측, 지식채널e-수학자 2부 러시아의 수학자 페렐만의 증명을 주의 깊게 보았던 학생들이었다. 본 연구에서는 이 학생들은 수학에 대한 생각이 보통 학생들과 다르다고 보았기 때문에 본 연구에서 설정한 연구 대상으로 적절했다. 설문 조사에 응한 9명 중 7명은 수학 Ⅱ 수준별 이동수업 때 과학기술집중과정에서 상 수준반인 학생들이었다. 나머지 2명은 인문사회집중과정 수학 Ⅰ 수준별 이동수업 때 하 수준반인 학생들이었다. 이 학생들은 등비수열의 정의에 대해 교과서에 언급된 정의 이외에 학교에서는 배운 적이 없는 학생들이었다. P고등학교는 남학교로 인문사회집중과정, 과학기술집중과정을 따로 상, 하로 2개의 수준으로 반 편성을 하여 과학기술집중과정은 수학 Ⅱ 시간에, 인문사회집중과정은 수학 Ⅰ 시간에 이동수업을 하였다. 과학기술집중과정은 수학 Ⅰ 시간에는 수준별 이동수업을 하지 않고 교실 내 수준별 수업을 하였다. 9명의 학생은 실험의 대상으로서 인원이 적다고 느낄 수 있다. 그러나 등비수열의 정의에 대한 이해에서 일어날 수 있는 경우의 수는 상 수준 7명, 하 수준 2명에 대한 조사만으로도 앞에서 살펴본 몇 가지 상황을 모두 포함할 수 있다고 해도 무리가 없을 것이다.

2. 연구 방법

등비수열에 관해 <표 4>와 같은 내용으로 설문 응답지를 받았다. 설문응답지에 연구 논문을 위해서 간단한 설문 조사를 하려고 한다고 언급했으며, 바쁘시겠지만 협조해 주시면 고맙겠다는 감사의 인사를 하였으며, 통계 자료를 쓰려고 하며, 개인 신상 정보는 공개하지 않으며, 원하지 않으면 반 번호 이름을 쓰지 않아도 좋다고 하였다. 이종규(2006)는 연구 참여자의 피해가 아주 미비할 경우 참여자들에게 동의서가 면제될 수 있다고 하였으나, 본 연구에서는 과학기술집중과정 수학 Ⅰ 수업시간 접근이 용이하지 않아 학생들에게 자연스럽게 수업 중에 설문 응답지를 받을 수 있는 상황이 아니어서, 별도의 시간을 할애해야 해서 동의서를 받았으며, 등비수열의 공비가 0이 될 수 있는지, 아닌지에 대한 국외 서적의 내용 등 본 연구의 결과는 학생들에게 절대 언급하지 않았다. <표 4>는 등비수열의 개념에 대한 설문 응답지이다. 설문 응답지를 받은 후, “1번 문항의 답을 어떻게 했느냐?” 가 2번 문항의 답에 어떠한 영향을 주었는지 연관성을 조사하였고, 필요한 경우 학생과 면담을 하였다. 설문 조사와 면담 결과를 분석하였고, 국내 교과서 7개의 무한등비수열, 무한등비급수 관련된 연습문제의 문제점을 조사한 후, 그 해결방안을 연구하였다. 본 연구에서는 설문 응답지의 숫자가 적어 일반화하기에는 한계가 있으나, 간단한 통계를 내고, 상 수준 학생들 중에 2번 문제의 답을 X로 하는 학생들이 있는지 알아보았다.

3. 교수 학습 내용

2011년 1학기 과학기술집중과정 수학 Ⅰ 수업에서 등비수열, 무한등비수열, 무한등비급수에 대한 내용을 교과서 위주로 하였으며, 방과 후 학습 시간에 EBS교재를 활용하여 문제 풀이를 하였다. 이 수업은 수준별 이동수업은 이루어지지 않고 교실 내에서 수준별 수업으로 진행되었다. 인문사회집중과정 수학 Ⅰ 수업은 수준별 이동수업으로 진행되었으며 같은 시기에 수업이 이루어졌

다, 등비수열, 무한등비수열, 무한등비급수에 대한 수업을 과학기술집중과정, 인문사회집중과정 모두 마친 이후에 본 연구의 설문조사 및 면담을 실시하였다.

<표 4> 등비수열의 개념에 대한 설문 응답지

1. 등비수열의 정의로 가장 맞다고 생각하는 것 하나만 골라 주십시오. ( )
① 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열
② 첫째항에 차례로 0이 아닌 일정한 수를 곱하여 각 항이 얻어 지는 수열
③ 0이 아닌 어떤 수에서 차례로 0이 아닌 일정한 수를 곱하여 만든 수열

2. 다음 수열이 등비수열인지 아닌지 ○, X 로 표시해 주십시오.
① $0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$ ( )
② $1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$ ( )

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 설문조사 결과 분석

설문조사 결과를 분석해 보면, 등비수열의 공비가 0이 될 수 있다는 학생들의 생각이 9명 중 5명으로 과반수이상이었다. 하지만 연구에서 찾고자 했던 2번 문항에서 모두 X를 하는 학생을 발견할 수 있었다. 이 학생은 1번 문항에서 보기 ③번을 답했고, 2번 문항에서는 모두 X를 답했다. 이 학생은 공비가 0이 아니라고 답을 하였다. 이 학생은 성적이 우수한 학생으로 교과서 이외 서적 등으로 선수학습을 하고 학교 수업을 듣는 학생이었다. 설문 조사 이후 면담을 해 본 결과 이 학생은 4명 정도 그룹을 형성해서 가르치는 학원도 다니고 있었다. 본 연구에서는 교과서대로 수업했으며, 교과서와 연구 결과가 다르기 때문에 혼란이 예상되어 이 학생에게 수열 $0, 0, 0, 0, \ldots$이 등비수열이 되는지 안 되는지에 대한 연구결과에 대해서는 언급하지 않았다. 설문조사 결과를 간단히 통계를 내어 분석해 보면, 1번 문항에 대해 보기 ①번을 답한 학생 수는 5명, 보기 ②번을 답한 학생 수는 1명, 보기 ③번을 답한 학생 수는 3명이었다. 2번 문항의 ①번의 경우 1번 문항에서 보기 ③번을 답한 학생들 중 2명은 X, 1명은 O를 답하였다. ②번의 경우 1번 문항에서 보기 ③번을 답한 학생들 중 1명은 O, 1명은 X, 1명은 무응답을 하였다. 이름을 적지 않아도 된다고 하였으나, 모든 학생들이 연구에 협조를 잘 해 주었고, 이름을 적어서 제출하였다.

1번 문항에 보기 ①번을 답한 학생의 경우 2번의 ①, ②번에 대하여 모두 O를 답하였다. 국내 교과서의 등비수열의 정의에 의하면 $0, 0, 0, 0, \ldots$의 수열은 등비수열이 되고, $1, 0, 0, 0, \ldots$의 수열도 등비수열이 되기 때문에 이 학생들은 모두 정답을 맞춘 것이다. 1번 문항에 보기 ②번을 답한 학생의 경우 2번의 ①번은 O, ②번은 X로 답하였다.

학생들 사이에 혼란이 생길 수 있음을 알 수 있었다. 만약 ①번의 등비수열의 정의가 옳다고 생각하는 학생들은 무한등비수열의 정의나 무한등비급수의 정의도 그 맥락에서 이해할 것이며, 교과서의 내용 내에서 오류를 찾지 못할 것이다. 그런데 유클리드 원론의 등비수열의 최초의 정의를 접하고, $\frac{0}{0}, 0^0, \ldots$의 정의되지 않는 부정형이 생길 수 있음을 알게 되면, 기존의 생각에 혼란을 가질 것이다.

만약 유클리드 원론에 대한 본 연구의 해석이 옳다면 상위권 학생들의 절반 이상이 등비수열에 대한 오개념을 가지고 있는 셈이다. 하지만 현 교육과정의 교과서 상에서는 문제가 없을 것이다. 오히려 유클리드 원론의 등비수열의 최초의 정의대로 답한 유일한 학생 1명은 등비수열에 관한 다음과 같은 문제로 인하여 개념의 혼란을 가지게 될 것이다.

그러면 고등학교 수학 Ⅰ (주)미래엔컬처그룹 교과서 연습문제(유희찬 외, 2009, p.185)에서 "무한등비수열 $\left\{\left(\frac{1-x}{3}\right)^n\right\}$이 수렴할 조건을 구하라."가 제시되었을 때 $-1 < \frac{1-x}{3} \leq 1$에서 $-2 \leq x < 4$가 답이지만 답 속에 $x=1$이 포함되어서 $x=1$일 때에는 실제로 $\{0\}: 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$이 되어 수열을 자연수 집합과 실수 집합 사이의 함수로 간주하는 보편적인 관점으로 볼 때에 수열은 되지만 유클리드 원론과 비의 정의를 볼 때 등비수열이 되지는 않는다. 답이 실제로 $-2 \leq x < 1$ 또는 $1 < x < 4$ 으로 바뀌어야 한다.

2. 무한등비수열과 무한등비급수 관련된 국내 교과서 연습문제의 문제점 조사

<Ⅱ.이론적 배경>에 제시된 등비수열과 무한등비수열, 무한등비급수, 공비의 상이한 정의로 인하여 <Ⅳ. 결과 분석 및 논의 1. 설문조사 결과 분석>에서 언급되었던 교과서 연습문제로 인하여 학생들에게 혼란을 야기하는 문제들이 여러 교과서의 여러 문제들에서 생기고 있었다. 이러한 문제들은 각 교과서별 1문제 이상 있으며, 문제들의 유형이 모두 비슷하기 때문에 본 연구에서는 대표적으로 가.~사. 까지의 문제들만 예로 들기로 하였다. 가.~사. 까지의 문제들이 교과서의 정의와 부합되는 것은 아니고, 교과서의 정의가 교육과정이나 교육과정해설서와 다르게 다루는 것도 아니지만 교과서의 정의 방법이 학생들에게 심각한 오 개념을 발생시키고 있기 때문에 본 연구에서는 교과서 연습문제의 문제성을 조사하였다.

가. (주)금성출판서 교과서 문제

1) 무한등비수열 $\{(x-3)^n\}$이 수렴할 조건을 구하면?

정답)

$2<x\le 4$

(양승갑 외, 2012, p.188)

본 연구 결과)

$x=3$일 때 수열 $\{0\}: 0,0,0,0,0,\ldots$은 등비수열이 아니다.

나. (주)지학사 교과서 문제

1) 다음 무한등비급수가 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 정하여라.

$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$

정답)

$-1<x<1$

(이강섭 외, 2010, p.177)

본 연구 결과)

$x=0$일 때 등비수열이 아니다.

다. (주)고려출판 교과서 문제

1) 다음 급수가 수렴하기 위한 x의 값의 범위를 구하고, 그 때의 급수의 합을 구하여라.

$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n+\cdots$

정답)

급수가 수렴하기 위한 x의 값의 범위

$-2<x<0$

(이만근 외, 2009, p.179)

본 연구 결과)

$x=-1$일 때 등비수열이 되지 않지만 문제에서 등비급수라고 하지 않았기 때문에 정답에 이상이 없었다.

2) 수열 $\{(-4x^2)^n\}$이 수렴하도록 실수 x의 값의 범위를 정하면?

정답)

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

(이만근 외, 2009, p.167)

본 연구 결과)

문제에서 등비수열이라고 하지 않았기 때문에 정답에 이상이 없었다.

라. (주)미래엔컬처그룹 교과서 문제

1) 무한등비수열 $\left\{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하면?

정답)

$-\frac{1}{3}<x\le 1$

(유희찬 외, 2009, p.185)

본 연구 결과)

$x=\frac{1}{3}$일 때 수열 $0,0,0,0,\ldots$이 등비수열이 아니다.

마. (주)두산동아 교과서 문제

1) 다음 무한등비급수가 수렴하도록 실수 x의 값의 범위를 정하여라.

$1-2x+4x^2-8x^3+\cdots+(-2x)^{n-1}+\cdots$

정답)

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

(우정호 외, 2012, p.211)

본 연구 결과)

$x=0$일 때 수열 $1,0,0,0,\ldots$이 등비수열이 아니다.

바. (주)천재교육 익힘책 문제

1) 다음 무한등비급수가 수렴하도록 x의 값의 범위를 정하고, 그 합을 x로 나타내어라.

$1-3x+9x^2-27x^3+\cdots+(-3x)^{n-1}+\cdots$

정답)

$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

구하는 합은 $\frac{1}{1-(-3x)}=\frac{1}{1+3x}$

(최용준 외, 2012b, p.106)

본 연구 결과)

$x=0$일 때 수열 $1,0,0,0,\ldots$이 등비수열이 아니다.

사. (주)천재교육 교과서 문제

1) 다음 수열이 수렴할 때, r의 값의 범위를 구하여라.

$1,\ 2r,\ 4r^2,\ 8r^3,\ \ldots,\ (2r)^{n-1},\ \ldots$

정답)

$-\frac{1}{2}<r\le\frac{1}{2}$

(이준열 외, 2012, p.192, 문제2 (1))

본 연구 결과)

문제에서 등비수열이라고 하지 않았기 때문에 정답에 이상이 없었다.

고등학교 수학 I (주)고려출판 교과서(양승갑 외, 2009, p.167, p.179)와 ㈜천재교육 교과서(이준열 외, 2012, p.192, 문제2 (1)) 이외에 나머지 다섯 교과서 문제에는 등비수열인지 아닌지에 대해 정확한 확인이 없어 학생들에게 굉장한 혼란을 야기할 위험이 있었다.

㈜더텍스트 교과서(김해경 외, 2012, p.198)와 (주)더텍스트 교과서(윤재한 외, 2012, p.193)와 ㈜박영사 교과서(유무하 외, 2012, p.187)와 (주)금성출판사 교과서(정상권 외, 2012, p.181, 문제2)에는 ㈜고려출판 교과서와㈜천재교육 교과서(이준열 외, 2012, p.192, 문제2 (1))와 같은 방식으로 제시되어 있는 것을 관찰할 수 있었다.

㈜교학사 교과서(김수환 외, 2012, p.164)와 ㈜법문사 교과서(이동원 외, 2012, p.156)와 ㈜교학사 교과서(황석근 외, 2012, p.169)와 ㈜좋은책신사고 교과서(황선욱 외, 2012, p.181)와 ㈜더텍스트 교과서(김해경 외, 2012, p.178)와 ㈜더텍스트 교과서(윤재한 외, 2012, p.178)와㈜박영사 교과서(유무하 외, 2012, p.189)와 ㈜금성출판사 교과서(정상권 외, 2012, p.181, 예제2)에는 ㈜미래엔컬처그룹 교과서와 같은 방식으로 제시되어 있는 것을 관찰할 수 있었다.

㈜천재교육 교과서(최용준 외, 2012a)에는 무한등비수열 또는 무한등비급수의 수렴 조건을 구하는 문제는 제시되어 있지 않고 그 익힘책에만 ㈜미래엔컬처그룹 교과서와 같은 방식으로 제시되어 있었다.

<표 2> 무한등비수열의 수렴, 발산 설명과 <표 3> 무한등비급수의 수렴, 발산 설명에 의해 두 명제 "① $\{r^n\}$이 무한등비수열이고 $-1<r\le1$이면 수열 $\{r^n\}$이 0 또는 1로 수렴한다. 그리고 ② $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\,(a\neq0)$이 무한등비급수이고 $-1<r<1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$이 $\frac{a}{1-r}$로 수렴한다."는 참이다. 즉, r이 0이어도, r이 0이 아니어도 참이다.

하지만 그 역은 "①$\{r^n\}$이 무한등비수열이고 수열 $\{r^n\}$이 0 또는 1로 수렴하면 $-1<r\le1$이다. 그리고 ②$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}\,(a\neq0)$이 무한등비급수이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$이 $\frac{a}{1-r}$로 수렴하면 $-1<r<1$이다." 인데, 공비 r을 0이 아닌 고정된 상수라고 정의한다면, 참이 아니다. 일반적으로 어떤 명제가 참이라 해도 그 명제의 역이 반드시 참은 아니다(황우형 외, 2012, p.27).

3. 해결점 모색

<Ⅳ. 결과 분석 및 논의 2. 무한등비수열과 무한등비급수 관련된 국내 교과서 연습문제의 문제점 조사>에서 제시된 문제로 인해 다른 부분의 개념에도 혼돈을 가지게 된 학생들은 부득이하게 수학을 포기하게 되거나 싫어하게 되거나, 자신이 수학을 못한다거나, 소질이 없다고 생각하는 상황이 되도록 만들 수 있었다. 국제적으로 등비수열의 정의를 하나로 통일할 필요가 있다.

본 연구에서는 무엇이 옳은지 학생들에게 가르쳐 줄 필요가 있다고 제안한다. 첫째 학생들에게 본 연구 내용을 그대로 전달하는 것이다. 가설을 세우는 것이 아니라 있는 대로 유클리드 원론의 내용을 전달하고 많은 수학자들 사이에 정의의 상이함이 있으며 하나로 정의를 통일할 필요가 있다는 것을 수준별 이동 수업할 때 상 수준의 학생들에게 알리고, 스스로 판단하도록 하는 것이다. 공비의 정의를 Wikipedia의 정의인 일정하게 곱해지는 0이 아닌 고정된 수(fixed non-zero number)로 국제적으로 통일하는 것이 가장 타당하다고 학생들에게 설명해 줄 필요가 있다. 중등학교 수학 학습시의 하 수준의 학생들은 상 수준 학생들에 비해 자료를 분석 정리하는 능력이 떨어지기 때문에 교과서 이외의 여러 자료들을 접한다 하더라도 별 도움이 되지 않는다. 결과적으로 하 수준의 학생들은 교과서 위주로 공부하게 되기 때문에 교과서의 정의를 하나로 통일해서 명확하게 제시해 줄 필요가 있다. 둘째, 연습 문제 또는 평가를 할 때 이런 상황으로 혼란이 야기될 수 있는 문제들은 제시하거나 출제하지 않는 것이다. 일반적으로 수학에서 분모가 0인 경우는 정의되지 않는다고 학생들에게 설명하고, 굳이 무한등비급수라는 용어를 쓰지 않고, 무한급수라는 용어를 사용하는 것이다. <Ⅳ. 결과 분석 및 논의 2. 무한등비수열과 무한등비급수 관련된 국내 교과서 연습문제의 문제점 조사>의 <다. (주)고려출판 교과서 문제>와 <사. (주)천재교육 교과서 문제>와 같이 나머지 5개의 교과서에서도 "무한급수 $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$가 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 정하라."로 수정하는 것이다. 용어를 무한등비수열 대신에 "무한수열"로 바꾸고 무한등비급수 관련 문제의 경우 무한등비급수 대신에 "무한급수"로 용어를 바꾸는 것을 제안한다.

Ⅴ. 결 론

등비수열(Geometrical Progression)의 공비(common ratio)의 정의는 유클리드 원론의 기원에 의해 설명되어야 할 것이다. 유클리드 원론에서 연속비례를 현재 등비수열로 정의하고 있는데 연속비례란 $a:b=b:c=c:d$이 성립하는 a, b, c, d로 $a:b=b:c=c:d$는 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$가 되어 분모인 b, c, d는 모두 0이 되어서는 안 될 것이다. 그러므로 공비의 정의를 Wikipedia의 정의인 일정하게 곱해지는 0이 아닌 고정된 수(fixed non-zero number)로 국제적으로 통일하는 것이 타당할 것이다.

그러므로 본 연구에서는 이런 문제점에 대한 해결책으로 첫째, 공비의 정의를 다양한 관점에서 학생들에게 있는 대로 설명하고, 둘째, 반드시 "평가"에서는 무한등비급수라는 용어 대신에 "무한급수"라는 용어를 사용함으로써 혼돈을 줄이고, 무한등비수열이라는 용어 대신에 "무한수열"이라는 용어를 사용하는 것이 바람직하다고 제안한다.

정의의 혼란으로 인하여 상위권 학생들 중에는 무한등비급수의 수렴 조건을 구하는 문제에서 혼란을 가질 수 있다. 하위권 학생들에게도 마찬가지이다. 본 연구에서는 미국과 영국, 일본과 중국 이외의 국가에서의 등비수열의 정의를 찾아보지는 못했으며, 인문계 고등학교 9명의 학생들만 대상으로 등비수열의 정의에 대한 설문 조사 결과를 살펴보았다. 이 연구의 확장은 추후의 과제로 남기고자 한다. 그런 과정을 통해 국내 교과서의 등비수열과 공비의 정의가 정확하게 "하나"로 확립되어야 할 것임을 제안하는 바이다.

참 고 문 헌

고다이라 구니히코(김성숙 역) (1999). 수학이 살아야 나라가 산다. 서울: 경문사.

김광환 (1996). 해석학 입문. 서울: 청문각.

김동화・홍우철 (2010). 고등학교 수학에서 0^0의 지도

방안. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 24(2), 283-300.
김수환 외 (2012). 수학 I, 서울: (주)교학사.
김해경 외 (2012). 수학 I. 서울: ㈜더텍스트.
김홍기 (2009). 초·중등학교 수학에서 다루는 비와 닮음에 대한 고찰. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 19(1), 1-24.
나귀수 (2005). PISA 2003에 나타난 우리나라 학생들의 수학적 소양의 특징. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 15(2), 147-176.
양승갑 외 (2012). 수학 I, 서울: ㈜금성출판사.
우정호 외 (2012). 수학 I, 서울: (주)두산동아.
유무하 외 (2012). 수학 I, 서울: ㈜박영사.
유희찬 외 (2009). 수학 I, 서울: (주)미래엔 컬처그룹.
윤재한 외 (2012). 수학 I, 서울: ㈜더텍스트.
이강섭 외 (2010). 수학 I, 서울: ㈜지학사.
이동원 외 (2012). 수학 I 익힘책, 서울: ㈜법문사.
이만근 외 (2009). 수학 I, 서울: ㈜고려출판.
이종규 (2006). 질적 연구 방법론, 서울 : 교육과학사.
이준열 외 (2012). 수학 I, 서울: ㈜천재교육.
정경미 (2010). 수학교수학의 인류학적 이론에 입각한 수학 교수 방법 '수열의 극한'을 중심으로, 부산대학교 박사학위논문.
정상권 외 (2012). 수학 I, 서울: ㈜금성출판사.
최용준 외 (2012a). 수학 I, 서울: ㈜천재교육.
______ (2012b). 수학 I 익힘책, 서울: ㈜천재교육.
황석근 외 (2012). 수학 I, 서울: ㈜교학사.
황선욱 외 (2012). 수학 I, 서울: ㈜좋은책신사고.
황우형 외 (2012). 수학, 서울: ㈜미래엔.
David, C. (2003). *International Comparative Research in Mathematics Education,* In Alan J. B., Second International Handbook of Mathematics Education, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 143-184.
Eicholz, R. E. et al. (1991). *Addison-Wesley Mathematics,* Boston: Addison-Wesley Publishing Company.
Eves, A. (이우영 · 신항균 역)(1995). 수학사, 서울: 경문사.
Fitzpatrick, M. P. (1996). *Advanced Calculus A Course in Mathematical Analysis,* Boston: PWS Publishing Company a division of International Thomson Publishing Inc.
Glfand, I. M., & Shen, A. (1993). *Algebra.,* Boston: Birkhäuser Boston, Inc..
Hall, H. S., & Knight, S. R (1940). *Higher algebra.* London : MacMillan.
Kaufmann, J. E., & Schwitters, K. L. (2009). *Elementary Intermediate Algebra: A Combined Approach.,* Glendale: Thomson Learning Inc..
MacGregor, M. (2001). Dose Learning Algebra Benefit Most People?, *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference The Future of the Teaching and Learning of Algebra,* Vol.2, 405-411.
Wikipedia(위키피디아 영어판) (2012). *Geometric progression,* San Francisco: Wikimedia Foundation Inc..
ウィキペディア(위키피디아 일본어판) (2012). *等比數列,* San Francisco: Wikimedia Foundation Inc..
維基百科(위키피디아 중국어판) (2012). *等比數列,* San Francisco: Wikimedia Foundation Inc..

On the Definition of Geometrical Progression of the High school

Lee, Min Jung†
Dept. of Mathematics Education, Pusan National University Graduate School, Pusan, 609-735, Korea
E-mail : nice1mj@nate.com

Lee, Yang
Dept. of Mathematics Education, Pusan National University, Pusan, 609-735, Korea
E-mail : ylee@pusan.ac.kr

We discovered that definition of a Geometrical Progression(Sequence) have some differences in domestic textbooks & some foreign countries' books. This will be able to cause a chaos when students divide whether a sequence is a Geometrical Progression(Sequence) or not, and a question error when teachers compose questions about convergence conditions of Infinite Geometric progressions & series. We took a question investigation for students about definition of a Geometrical Progression(that is called G. P.), we discovered that high level students have an error about definition of a G. P.. So We modified expressions of terminology in domestic textbooks appropriately through a Geometrical Progression(Sequence), infinite series, & infinite geometrical series in some foreign countries' books.

---

* ZDM Classification : B74, U24, G14
* 2000 Mathematics Classification : 97B40
* Key Words : geometric progression, infinite geometric progression, infinite geometric series, infinite series, common ratio

† Corresponding author