대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 22 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 22, No. 3, 331 ~ 352. Aug 2012

비례 문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인 분석

성 창 근* · 이 광 호**

이 연구는 비례문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인이 무엇인지 확인하는 것을 궁극적인 목적으로 한다. 이를 위해 비례 문제를 구조화 정도에 따라 잘-구조화된 문제, 구조화된 문제, 비-구조화된 문제로 분류하고, 이론적 고찰을 통해 비례문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인으로 사실 · 알고리즘 지식, 개념적 지식, 문제유형 지식, 양의 변화 인식, 메타인지를 추출하였다. 중다회귀분석 방법을 사용해 구조화 정도가 다른 문제를 해결하는데 유의하게 영향을 주는 인지적 변인이 무엇인지를 분석하였다. 분석 결과 구조화 정도가 다른 문제를 해결하는데 서로 다른 인지적 변인이 영향을 주었다. 즉 잘-구조화된 문제 해결에는 사실 · 알고리즘 지식과 문제유형 지식, 그리고 구조화된 문제 해결에는 개념적 지식, 문제유형지식, 양의 변화 인식, 마지막으로 비-구조화된 문제해결에는 메타조절, 개념적 지식, 양의 변화 인식, 문제유형지식이 영향을 주었다. 이처럼 문제 유형에 따라 다른 인지적 변인이 영향을 미치기 때문에, 수학수업에서는 문제 유형에 따라 다른 교수학습 방법과 다른 평가 틀을 적용할 필요가 있으며, 더불어 학생들의 비례 문제 해결 능력을 계발하기 위해서는 수학 수업에서 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 적극 활용할 필요가 있다는 결론을 도출할 수 있었다.

Ⅰ. 서론

비례추론은 초등학교와 중학교 수학 교육에서 매우 중요한 토픽이다. 초등학교 학생들이 비례추론이라는 수학적 아이디어를 적용하는 문제 상황은 소위 미지값 비례 문장제이다. 이 문제에서 첫 번째 비를 구성하는 두 수(양)은 모두 주어지며 두 번째 비 중 하나의 양은 제시되고 나머지 양은 미지값이 된다. 학생들은 비례식의 성질인 “내항의 곱은 외항의 곱과 같다”에 기반한 알고리즘을 학습한 후 그것을 적용해 이 문제를 해결한다. Hamilton(2007)은 이러한 문제 해결 관행은 ‘선 개념 후 문장제 해결(concept-then-word problem)’ 접근으로써, 만일 대부분의 문제해결 수업 관행과 과제가 이와 같다면, 학생들의 문제 해결은 학습한 절차나 개념을 단순히 적용하는 것에 지나지 않는다고 지적하였다.

초등학교 수학교과서에서 주로 다루고 있는 미지값 비례 문장제는 최초상태와 목표상태가 명확하게 정의되며(well-defined), 단일한 정답이 존재하는 잘-구조화된 문제(well-structured problem)이다. 하지만 비례추론을 적용해 해결될 수 있는 실생활 문제 상황은 잘-구조화된 미지값 문제와 구조적으로 동일하지 않다.

학생들이 일상생활에서 접하는 문제는 교과서 문제처럼 최초상태와 목표상태가 명확하게 정의되지도 않으며 분명한 답이 존재하는 경우는 드

* 큰별초등학교(doway7668@hanmail.net)
** 한국교원대학교(paransol@knue.ac.kr), 교신저자

물다(Jonassen, 1997). 예를 들어 “말레이시아 정글에서 발견된 괴물 빅풋의 발자국이 찍힌 사진을 학생들에게 보여준 후 빅풋의 키는 얼마일지를 예상하시오?”라는 문제를 생각해 보자. 먼저 이 문제는 문제의 최초상태(주어진 정보)가 잘-정의되지 않았으며, 단일한 정답이 존재하지 않는 열린 문제(open-ended problem)이다. 이러한 문제를 비-구조화된 문제(ill-structured problem)라고 한다. 이 문제를 해결하기위해서 학생들은 사진에 제시된 빅풋의 발 크기와 자신의 발 크기 사이의 곱셈적 관계(몇 배 또는 비의 값)를 추론하고 이를 빅풋의 키와 자신의 키의 관계에 적용할 수 있어야 한다. 또한 이러한 유형의 문제는 복잡한 인지적 능력을 요구하는 문제로써 학생들의 수학적 사고와 문제 해결 기술을 향상시키는데 유용하다(Chamberlin & Moon, 2005; Hong, 1998).

비-구조화된 문제와 더불어 학생들이 일상생활에서 접하는 문제는 최초상태와 목표상태가 분명하게 제시되지만, 문제를 해결하는 데 소음이 되는 비본질적인 정보가 많이 포함되어 있는 경우도 있다. 이러한 문제는 구조화 정도가 잘-구조화된 문제와 비-구조화된 문제 중간 정도에 위치한 문제로써, 구조화된 문제(moderately- structured problem)라고 한다(Jay & Perkins, 1997). 이러한 문제를 해결하기 위한 관건은 문제를 해결하는데 필요한 정보가 무엇인지를 추출해내는 것이다(English & Watters, 2005; Lesh & Zawonewski, 2007).

최근에 수학교육 연구에서 주목받고 있는 문제해결 이론과 모형들 예컨대, 수학적 모델링 관점, 문제중심학습(PBL), 상황학습 등은 모두 학교에서 배운 지식을 일상생활에 적용할 수 있는 능력을 강조하고 전술한 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 학교 수학에서 적극 활용할 것을 권장하고 있다(Chamberlin & Moon, 2005; Lave, 1988; Oon-Seng, Chu-Tee, & Stefanie, 2009). 따라서 초등학교 학생 스스로 비례추론을 생성하고 적용할 수 있는 기회를 제공하기 위해, 수학 수업에서 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 적극 활용할 필요가 있다.

한편, 다른 수학 내용과 마찬가지로 비례 추론 역시 다양한 하위 지식과 인지적 기술이 유기적으로 통합될 때 진정한 의미의 비례추론 능력을 습득할 수 있다(Lamon, 2005). 성공적인 비례추론을 위해 곱셈, 나눗셈, 분수, 비, 비율, 그리고 일차함수 등 다양한 지식이 요구된다는 Vergnaud(1983)의 영향력 있는 주장을 주지할 때, 비례문제를 해결하는데 다양한 수학적 지식과 더불어 인지적 변인들이 영향을 미칠 수 있다.

비례 문제 해결에 영향을 주는 첫 번째 변인으로는 수학적 지식(고은성 · 이경화, 2007; 이종욱, 2006; Lo & Watanabe, 1997; Navors, 2003; Singh, 2000), 두 번째 변인은 양의 변화 특히 공변성을 인식하는 능력(Andrew & Joan, 2009; Labato & Siebert, 2002; Lamon, 2005; Behr, Harel, Lesh, & Post, 1994), 세 번째 변인은 비례 상황과 그렇지 않은 상황을 명확하게 구별하는 능력(예, 박정숙, 2008; de Bock, Verschaffel, & Janssens, 2002; Van Dooren, de Bock, Hessel, Janssens, & Verschaffel, 2009)이다. 마지막으로 네 번째 변인은 메타인지로써, 이것은 실생활 문제를 해결하는데 핵심적인 변인으로 여겨지고 있으므로(Janassen, 2010), 비례추론이 포함된 실생활 문제해결에도 그것이 상당부분 영향을 미칠 것으로 예상할 수 있다.

하지만 비례문제 해결에 영향을 미치는 인지적 변인을 조사했던 대부분의 연구들은 미지값 비례 문제 등 잘-구조화된 문제를 중심으로 수행되었으며, 더군다나 수학적 지식, 공변성 인식, 비례 상황 인식, 메타인지를 동시에 투입하지 않고 특정한 인지적 변인과 비례 문제해결의 관계를 조사하였다는 한계를 지니고 있다. 또한 연구방법 측면에서 대부분 질적사례연구 방법을 사

용함으로써, 비례추론을 위해 요구되는 인지적 변인이 무엇인지를 검사 도구를 사용해 직접적으로 측정하기 보다는 학생들이 비례 문제 해결 과정에서 드러나는 인지적 변인을 간접적으로 추출했다는 한계를 지니고 있다. 따라서 다양한 인지적 변인을 동시에 투입하여 잘-구조화된 문제뿐만 아니라 구조화된 문제와 비-구조화된 문제 해결에 기여하는 인지적 변인이 무엇인지를 실증적으로 규명할 필요가 있다.

본 연구는 문제해결과 인지적 변인의 관계에 대한 연구로, 구조화 정도가 다른 비례 문제해결에 영향을 주는 인지적 변인이 무엇인지를 확인하는 것을 궁극적인 목적으로 하며, 이를 위해 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다. 첫째, 잘-구조화된 비례 문제의 해결에 영향을 주는 인지적 변인은 무엇인가? 둘째, 구조화된 비례 문제의 해결에 영향을 주는 인지적 변인은 무엇인가? 셋째, 비-구조화된 비례 문제의 해결에 영향을 주는 인지적 변인은 무엇인가?

본 연구는 비례문제 해결에 기여하는 인지적 변인이 무엇인지를 경험적으로 밝힘으로써, 궁극적으로 비례추론과 문제해결 능력을 신장시키기 위해 학교수학에서는 어떠한 유형의 문제를 사용해야 하며, 그러한 문제의 해결능력을 신장시키기 위해서 수학 수업은 어떠한 점에 초점을 맞추어야 하는지에 대한 시사점을 제공할 수 있을 것이다.

II. 이론적 배경

1. 구조화 정도가 다른 비례 문제

비례성 또는 비례 추론은 전통적으로 학생들이 가장 어려워하는 수학적 추론중의 하나이며 (Nabors, 2003), 학생들의 수학적 발달에 중추적 역할을 하기 때문에 더 높은 수준으로 발전하기 위한 초석이며 초등학교에서 다루어지는 수학적 내용의 관석이다(Lesh, Behr, & Post, 1988). 또한 비례 추론은 초등학교에서 학습하는 많은 수학 내용을 연결시켜는 중요한 통합적 맥락으로써 (NCTM, 1989, 2000), 비례적으로 추론하는 능력은 수학, 과학 학습뿐만 아니라 일상생활을 영위하는데 매우 중요한 능력이다.

초등학교 학생들이 비례추론이라는 수학적 아이디어를 적용하는 문제 상황은 소위 미지값 비례 문장제이다. 이 문제에서 첫 번째 비를 구성하는 두 수(양)은 모두 주어지며 두 번째 비 중 하나의 양은 제시되고 나머지 양은 미지값이 된다. 학생들은 비례식의 성질인 “내항의 곱은 외항의 곱과 같다”에 기반한 알고리즘을 학습한 후 그것을 적용해 이 문제를 해결한다. 하지만 Behr 외(1992)에 따르면 비례 추론이란 공변과 곱셈적 비교 감각, 그리고 몇 개의 정보를 저장하고 처리하는 능력과 관련되는 수학적 추론의 한 유형으로써, 단순히 A/B=C/D로 표현되는 미지값 문제를 해결했다고 해서 비례 추론을 습득했다고 볼 수 없다. 학생들이 미지값 문제를 해결할 때 비례 추론을 사용했다고 판단할 수 있을 때는 등식의 양변에 내재하는 구조적 유사성을 인식했다는 증거가 포착되었을 경우에 한한다. 만약 그렇지 아니하면 비례 추론이 관여하지 않는 것이라고 할 수 있다. 즉 미지값 문장제를 형식적 알고리즘을 적용해 해결했다고 해서 비례 개념을 습득했다고 볼 수 없다. 비례적으로 변화하는 상황에서 공변과 불변에 대한 이해를 기반으로 두 비의 구조적 불변성을 인식할 수 있을 때 비례 개념을 진정으로 이해했다고 볼 수 있다.

따라서 학생들에게 진정한 비례추론을 경험할 수 있는 기회를 제공하기 위해 두 양이 서로 관계를 맺으며 변화하는 상황에서 비례적 관계를

스스로 발견할 수 있는 문제 상황을 적극 활용할 필요가 있다. 즉 학생들에게 잘-구조화되고 쉬운 알고리즘을 적용해 해결될 수 있는 미지값 문장제 외에 현실 세계의 비-구조화되고 진정성 있는 문제를 해결해보는 기회를 제공할 필요가 있다.

Jonassen(2000)은 문제 해결을 위해 요구되는 정보가 학생들에게 어느 정도 명확하게 제시되었는지를 준거로, 교실에서 사용할 수 있는 문제를 구조화 정도에 따라 논리적 문제, 알고리즘 문제, 이야기 문제, 규칙 적용 문제, 의사결정 문제, 장애해결 문제, 진단-해결 문제, 전술/전략 수행, 사례/체제 분석, 설계 문제, 딜레마의 11개의 유형으로 분류하였다. 특히, 초등학교 교과서에 제시된 미지값 문장제는 위의 문제 분류중 이야기 문제에 해당되는 것으로써 잘-구조화된 문제라 할 수 있다.

학교에서 사용가능한 문제를 구조화 정도에 따라 분류한 Jonassen(2000)의 연구는 학교 교육에서 사용가능한 문제의 유형을 세분화하여 제시하였다는 점에서 매우 고무적이긴 하지만, 고안된 분류틀은 사회학 분야나 천문학 등에 적용하기 위해 개발한 것이므로 학교수학에 아무런 여과 작업을 거치지 않은채 직접 적용하기에 적절하지 않다. 또한 문제 분류의 준거로 제시한 구조성 또는 구조화 정도가 정확히 무엇을 의미하는지 조작적으로 정의하지 않는 한계를 지니고 있다. 따라서 학교 수학의 특성에 적합한 구조성의 준거를 보다 명확하게 규정하고, 그것에 근거해 문제를 분류할 필요가 있다.

Wood(1983)는 문제의 구조성을 문제에 포함된 아이디어 즉 문제해결자가 취해야할 일련의 조작자가 해결자에게 어느 정도 알려졌는지 또는 그가 알 수 있는지의 정도로 정의하고, 구조성을 결정하는 준거를 다음과 같이 제시하였다. 첫째, 문제 상태(최초상태, 목표상태)가 명확하게 또는 모호하게 제시되었는지 둘째, 문제 해결을 위해 필요한 규칙이나 원리가 인습적 또는 비인습적인지 셋째, 문제 안에 제약이 제시되었는지 아니면 그렇지 않은지 넷째, 조작자를 예측가능한지 또는 전혀 예측할 수 없는지, 다섯째, 해결책이 유일한지 또는 다양한지, 여섯째, 답의 적절성을 평가할 수 있는 준거가 명확한지 아니면 모호한지이다. 또한 김민경 외(2011)는 초등학교 수학

<표 Ⅱ-1> 구조성의 준거와 조작적 정의

준거 \ 설명	조작적 정의
투명성	최초상태, 목표상태 제시의 명확성 정도 적용해야할 지식이나 절차의 예측가능성 정도 적용해야할 지식이나 절차가 인습적/비인습적인지의 여부
해법의 다양성	문제를 해결하기 위해 다양한 방법이 적용 가능한지의 여부
해석의 다양성	과잉의 정보가 제시되어 문제해결에 필요한 정보를 선택하도록 요구하는지의 여부
실제성	아동의 실제(일상생활, 미래 직업, 문화)와의 관련성
해답의 적절성	도출된 해답의 적절성에 대한 평가자의 합의 가능성 정도

교과서에 실린 문제를 구조성을 준거로 분류하였는데, 이 연구에서 상정한 문제의 구조성 준거는 실제성, 복잡성, 개방성이었다. 구체적으로 실제성은 실생활과 관련성 정도, 복잡성은 문제를 해결하기 위해 얼마나 폭넓은 지식이 요구되는지의 정도, 셋째 개방성은 해법의 다양성 정도와 해석의 다양성 정도를 의미한다.

구조화 정도의 준거를 제시한 선행 연구를 참고하여 이 연구에서 구조화 정도의 준거는 실제성, 투명성, 해법의 개방성, 해석의 명확성이다. 이들 준거와 그에 대한 조작적인 정의를 제시하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

또한 이 연구에서는 선행연구 분석을 통해 추출한 구조성의 준거에 기초해, 비례 문제를 구조성 정도에 따라 잘-구조화된, 구조화된, 비-구조화된 문제로 구분하였다(<표 Ⅱ-2> 참고). 더불어 이 틀은 본 연구에서 학생들의 비례 문제 해결을 측정하기 위한 검사도구의 개발 준거로 사용되었다.

<표 Ⅱ-2>에서 알 수 있듯이, 잘-구조화된 문제는 문제해결에 필요한 모든 정보들이 명확하게 제시되고, 답이 하나로 수렴하며, 최종 해결책에 도달할 수 있는 단일한 문제해결 과정이 존재하는 문제로서 일반적으로 교과서에 제시된 정형적인 문장제를 의미한다. 이 연구에서 잘-구조화된 문제는 비례추론 관련 초등학교 교육과정에서 가장 전형적으로 제시되는 '미지값 구하기' 문제를 의미한다. 구조화된 문제는 구조화 정도의 연속선 상에서 잘-구조화된 문제와 비-구조화된 문제의 사이에 존재하는 중간 수준의 구조성을 지닌 문제로써 최초상태와 목표상태가 문제 진술에 진술되었지만 최초상태에 대한 정보가 과다하게 제시되어있어 문제해결자는 문제해결에 필수적인 정보를 선택해고, 그것들 간의 관계를 면밀히 관찰함으로써 어떤 조작자를 선택해야 할지를 결정해야 하는 문제를 의미한다. 마지막으로 비-구조화된 문제는 최초상태와 목표상태 중 적어도 한 가지가 명확하게 제시되지 않는 잘-정의되지 않은(ill-defined) 실생활 문제로써 어떤 해법을 적용해야할지가 명확하지 않으며, 다양한 해결책이 있으며, 평가자간 합의를 통해 정답 여부를 판단할 수 있는 문제를 의미한다.

<표 Ⅱ-2> 구조화 정도가 다른 문제 분류

준거 \ 문제 유형		구조화 정도에 따른 문제 분류		
		잘-구조화된	구조화된	비-구조화된
투명성	최초상태, 목표상태 제시 여부	모두 제시	모두 제시	최소한 하나가 미 제시
	적용해야할 지식이나 절차의 예측가능성 정도	매우 높음	어느 정도 예측가능	예측이 어려움
해법의 다양성		유일	유일 또는 다양	다양
해석의 다양성		해석 유일	대체로 유일	다양
실제성(실생활 관련 정도)		교과서 문제의 실제성 수준	실제적임	실제적임
해답의 적절성		즉각적 판단	합의를 통해 판단 가능	합의를 통해 판단 가능

2. 비례 문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인

다른 수학 내용과 마찬가지로 비례추론 역시 하위 지식의 단단한 기초위에 상위 지식이 유기적으로 통합될 때 진정한 의미의 비례추론 능력을 습득할 수 있다. Vergnaud(1983)는 성공적인 비례추론을 위해 곱셈, 나눗셈, 분수, 비, 비율, 그리고 일차 함수 등 다양한 지식이 요구된다는 점을 강조하고, 이러한 상황을 '곱셈적 개념 장'이라고 칭하였다. 또한 Lamon(2007)은 비례추론은 많은 종류의 수학적 지식이 중요하게 기능하는 중요한 시점이며, 만일 이러한 지식들의 개념적 통합이 성취되지 않는다면 학생들의 이해가 극도로 저하된다 말함으로써 비례적으로 추론하는데 있어서 다양한 수학적 지식의 역할을 강조하였다. 또한 정은실(2003)의 비 개념에 대한 수학적 분석에서 분수, 비 등 다양한 수학적 지식이 비례 추론의 토대가 된다는 점을 이론적으로 고찰하였다. 이상의 주장을 통해 비례문제를 해결하는데 수학적 지식과 더불어 다양한 인지적 능력이 요구된다는 점을 예상할 수 있다.

몇 몇 연구자들은 성공적인 비례추론을 위해 어떠한 수학적 지식이 필요한지에 대해 경험적인 연구를 실시하였다. 이종욱(2006)과 Singh (2000)은 기존에 학습한 나눗셈, 분수, 분수의 연산, 약수와 배수 등의 지식들이 성공적인 비례추론을 위해 필수적이라고 밝혔다. 고은성·이경화(2007) 또한 6학년 학생들을 대상으로 여러 가지 비례추론 문제를 사용해 이들의 비례추론 능력은 어떠한지를 알아보았다. 이 연구 결과 역시 성공적인 비례추론을 위해 기존에 학습한 수학적 지식들 특히 약수와 배수, 분수, 분수의 연산 등의 지식이 필요하다는 점을 밝혔다. 이 외에도 많은 연구자들은 비례추론에서 지식의 중요성을 강조하였다(예, Lamon, 2005, 2007; Lo & Watanabe, 1997; Nabors, 2003). 이 연구에서는 이상의 선행연구에 기초해 비례문제 해결에 영향을 미치는 지식을 사실·알고리즘 지식과 개념적 지식으로 구분하여, 그것들이 비례 문제를 해결하는데 어떻게 기여하는지를 분석하였다.

비례 문제 해결에 영향을 주는 두 번째 변인은 서로 관련을 맺으며 변화하는 두 양을 인식하는 능력 즉 공변 추론이다. 이는 상황에 제시된 변수들이 서로 관련을 맺으며 변화하는 방식에 주목하면서 변화하는 두 양을 조정하는 행위에 포함된 인지적 활동이다(Andrew & Joan, 2009). 많은 연구자들은 변화하는 양의 공변성을 추론하는 능력은 비례 문제를 해결하는데 영향을 주는 핵심적인 변인이라는 점을 밝혔다(Andrew & Joan, 2009; Labato & Siebert, 2002; Lamon, 2005; Harel, Behr, Lesh, & Post, 1994). 특히 Labato와 Siebert(2002)는 양적 추론과 전이의 관계를 규명하기 위해 수행한 교수실험에서 복잡한 상황에서 양 사이의 관계 즉 두 양이 서로 어떤 방향으로 변하는지를 인식할 수 있는 능력은 주어진 상황을 비례적인 것으로 이해하고, 새로운 상황에 그러한 이해를 적용하는 핵심적인 요소라고 보고하였다. Lamon(2005)은 또한 비례 추론을 기호적으로 도입하기 이전에 학생들로 하여금 두 양의 관계와 변화의 방향에 주목하도록 하는 기회를 주어야 하며, 주어진 상황에서 두 양이 서로 관계를 맺으며 어떻게 변하는지 인식하는 능력은 상황에 표면적으로 드러나지 않는 구조적 관계를 인식하는 능력으로 비와 비례 개념을 이해하는데 필수적인 성분이라고 하였다. 이 연구에서는 공변 추론을 '양의 변화 인식'으로 정의하고, 주어진 상황에서 두 양이 어떻게 변하는지 즉 두 양의 어떤 방향으로 변화하는지를 인식하는 능력으로 정의한다.

비례 문제 해결에 영향을 주는 세 번째 변인은 비례상황과 그렇지 않은 상황을 구별하는 능력

이다. 비례 관계가 포함되지 않는 상황에 비례식 알고리즘을 적용하는 학생들의 오류는 Van Dooren 외(2009)의 연구를 비롯해 지속적으로 연구되고 있으며(예, 박정숙, 2008; De Bock, Verschaffel, & Janssens, 2002), 이러한 능력은 비례 추론이 포함된 문제를 성공적으로 해결하는데 기여하는 핵심적인 인지적 변인으로 간주되어지고 있다. Van Dooren 외(2009)의 연구에서 10~12세 학생 중 90%가 비례가 포함되지 않은 문제를 비례 상황으로 인식하는 오류를 범하였다. 많은 학생들이 이러한 오류를 범하는 이유는 학생들이 주어진 문제에 대해 깊이 있는 표상을 구성하기보다는 문제에 제시된 맥락, 수의 구조, 구문론적 특징 등의 문제의 표면적 특징이 수업 중 해결하였던 미지값 비례 문제와 비슷하다고 예상하고 별다른 거부 반응 없이 비례식 알고리즘을 적용하여 문제를 해결하기 때문이다. 따라서 비례문제와 비-비례 문제를 구별할 수 있는 능력을 주어진 문제 상황에 대해 깊이 있는 표상과 관련된 것으로 비례 문제해결에 영향을 주는 강력한 변인이다.

비례 문제 해결에 영향을 주는 네 번째 변인으로 메타인지를 고려할 수 있다. 메타인지는 메타지식과 메타조절로 분류할 수 있으며, 메타 지식은 인간에 대한 지식, 과제에 대한 지식, 일반적 전략에 대한 지식으로 나눌 수 있다(Garofalo & Lester, 1985). Mayer와 Hegarty(1996)는 메타지식의 세 가지 유형 중 인간에 대한 지식(예, 열심히 노력한다면 이 과제를 풀 수 있다)과 과제에 대한 지식(예, 복잡하고 친숙하지 않는 문제는 어렵다)을 태도와 신념 영역에 포함시켰다. 이 연구에서는 인간과 과제에 대한 지식이 비인지적 변인인 태도와 신념에 포함된다고 판단하여, 메타지식을 일반적 전략에 대한 지식으로 제한하며, 문제해결을 위해 필요한 정보를 선택하고, 문제를 이해하기 위해 필요한 전략에 대해 아는 것으로 정의한다. 아울러 메타 조절은 문제해결을 계획하고, 모니터하고, 통제하고 평가하는 것으로 구성된다. 메타인지는 비-구조화된 문제해결에 핵심적인 변인으로 여겨지고 있으므로(Jonassen, 2010), 비례추론이 포함된 비-구조화된 문제해결에도 그것이 상당부분 영향을 미칠 것으로 예상할 수 있다.

결과적으로 본 연구에서는 인지적 변인으로 비와 비례에 대한 사실·알고리즘 지식, 개념적 지식, 문제유형지식(비례 상황과 비-비례 상황의 구별), 양의 변화 인식, 메타지식, 메타조절의 6가지를 설정하고, 구조화 정도가 다른 비례 문제 해결에 유의하게 영향을 주는 인지적 변인이 무엇인지를 확인하는 작업을 수행하였다.

III. 연구 방법

이 연구는 구조화 정도가 다른 비례 문제 해결에 기여하는 인지적 변인이 무엇인지를 확인하는 것을 목적으로 한다. 이러한 목적을 위해 조사 연구를 통해 자료를 수집하고 통계적인 방법을 사용해 자료를 분석하였다.

1. 연구 대상

이 연구는 K시에 소재하고 있는 A 초등학교에서 학급 단위로 선정된 6학년 5개 학급의 학생 154명을 대상으로 하였다. A 초등학교는 개교한지 3년이 되었으며, 대 단위 아파트 단지 내에 위치해 있다. 또한 K시의 사회경제적 수준을 기준으로할 때 전반적으로 중류층 가정의 학생들이 많은 편이다. 연구 대상학생들은 5학년과 6학년 수학과 교육과정에 제시된 비와 비율, 비율그래프, 비례식을 이미 학습하였으므로, 공식적으로 비와 비율, 비례 관련 학습을 모두 이수하였다고 판단할 수 있다.

2. 연구 설계

연구문제를 해결하기 위해 중다회귀분석 방법을 사용하였다. 이 설계에서 독립변인은 인지적 변인으로써, 사실·알고리즘 지식, 개념적 지식, 문제 유형에 대한 지식, 양과 양의 변화 인식, 메타인지(메타지식과 메타조절) 검사 점수이며, 잘-구조화된 문제에 대한 해결 능력, 구조화된 문제에 대한 해결 능력, 비-구조화된 문제에 대한 해결 능력(점수) 각각을 종속변수로 설정하였다.

3. 검사 도구

이 연구에서 사용한 검사 도구는 모두 9가지이다. 최초로 개발된 검사 도구는 타당도를 높이기 위해 전문가 집단(수학교육 전문가 2인과 교사 5인)의 검토를 받아 수정하였으며, 수정된 검사 도구는 다시 예비 검사를 통해 문항 수, 문항 진술, 난이도 등을 점검하였다. 예비 검사를 마친 후 현장에서 검사를 직접 실시했던 담임교사들로부터 검사 도구에 포함된 진술의 가독성 및 이해 가능성, 검사 시간, 검사 실시 방법에 대한 의견을 수렴하였다. 이후 다시 수학교육 전문가 집단과의 협의를 거쳐 최종 확정하였다.

가. 잘-구조화된 비례 문제

비례식 단원에서 전형적으로 사용되는 '미지값 구하기' 문제를 검사 영역으로 설정하고 단위비와 변화인수가 정수인지, 비정수인지 그리고 변화의 방향이 증가 또는 감소인지에 따라 하위 문항을 개발하였다.

먼저 변화 비율과 단위 비가 모두 정수인 경우, 단위비가 정수이고 변화인수가 비정수인 경우, 단위비가 비정수이고 변화인수가 정수인 경우, 단위비와 변화인수가 모두 비정수인 경우로 구별하였다. 이어서 위의 4가지 각각에 대해 변화의 방향이 증가 또는 감소하는지에 따라 구분하여 8문제로 구성하였다(<부록 1> 참고). 채점은 각 문항에 대해 1점을 부여하여 총 8점 만점으로 구성되며, 검사 문항에 대한 신뢰도는 Cronbach α계수로 측정하였으며 신뢰도 계수는 0.875로 나타났다.

나. 구조화된 문제

구조화된 수학적 문제의 해결 능력을 측정하기 위해 Lesh 외(1988)에서 사용한 문제를 번역한 후, '물가 상승'이라는 맥락은 그대로 유지하고 문제에 제시된 수의 크기를 조정하였다(<부록 2> 참고). 전술했듯이 이 문제는 구조화 정도가 잘-구조화된 문제와 비-구조화된 문제 중간 정도에 위치한 문제로써, 최초상태와 목표상태가 비교적 명확하게 제시되지만, 문제를 해결하는 데 소음이 되는 비본질적인 정보가 많이 포함되어 있다는 특징이 있다. 따라서 이 문제를 해결하기 위한 관건은 문제 해결을 위해 필요한 양을 추출하고, 그것들이 곱셈적 또는 비례적으로 변화한다는 점을 추론하는 것이다.

이 검사 도구에 대한 채점 기준(<표 Ⅲ-1> 참고)은 비-구조화된 문제해결 검사 도구의 채점 기준 중 2번째 항목인 '변수를 선택하고 곱셈적 관계를 찾아 문제를 해결하는 능력'과 일치시켜 두 검사 도구 간의 점수 부여에 있어서 일관성을 유지하였다. 3명의 채점자가 각각 채점하였으며 일치도는 94%였다. 채점자간에 부여한 점수가 지나치게 상이한 경우 의견조율을 통해 최종 점수를 확정하였다.

다. 비-구조화된 문제

비-구조화된 문제는 국내 모 방송사에서 방영된 거인 'Big Foot'에 대한 프로그램에서 아이디어를 얻어 문항을 개발하였다. 이 검사 도구는 2장 문헌연구에서 제시된 바와 같이 목표 상태는

<표 Ⅲ-1> 비-구조화된 문제의 평가 준거

평가 기준	수준	점수
내용의 완성도	문제해결의 단계를 모두 제시하였으며, 정보가 명확하고 매우 논리적임	5
	문제해결의 단계(요소, 절차)를 모두 제시하였으나 어느 정도 부정확한 정보를 사용하고 논리적이지 못함	3
	문제해결의 단계(요소, 절차)를 모두 제시하지 않았으며, 그 정보가 부정확하고 논리적이지 못함	1
변수를 선택하고 곱셈적 관계를 찾아 문제를 해결하는 능력	비례 개념에 대한 이해를 보임 변수들 간의 곱셈적 관계(배)에 기초해 수학적인 기호나 용어를 사용하고 적절한 수학식을 사용해 문제를 해결함	7
	비례 개념에 대한 이해를 보임 변수들 간의 곱셈적 관계를 파악하였으나, 수학적 기호나 용어를 사용하지 않거나 수학적 표현이 정교하지 못함	5
	적절한 변수를 선택하였으나, 비례 개념으로 발전시키지 못하고 변수들 간의 덧셈적 관계(차) 또는 단순한 추측과 어림을 통해 답을 제시	3
	문제해결에 필요한 변수를 인식하지 못하고, 단순한 추측에 의해 답을 제시	1

'빅풋의 키는 얼마쯤일까?'로 비교적 명확하게 제시되었으나 빅풋의 키를 어림할 수 있는 수치적 자료 또는 정보가 제시되지 않아 학생들은 빅풋의 키를 어림하기 위해 해결 계획을 수립하고, 그러한 계획에 따라 문제를 해결해야 한다는 특징이 있다(<부록 3> 참고).

<표 Ⅲ-2> 사실·알고리즘 지식의 평가 요소

평가 요소	세부 평가 항목	문항 번호
비 알아보기	기호로 제시된 비를 읽는 방법 알기	1
비율과 비의 값 알아보기	비에서 기준량, 비교하는 양을 구별하고, 비율로 나타내기	2
비례식 알아보기	비례식 구별하기	3
	비에서 전항과 후항 구별하기	4
	비례식 세우기	5
비의 성질 알아보기	비의 성질(1), (2) 알기	6
	비의 성질을 이용해 동치비 구하기	7
	비의 성질을 이용해 간단한 자연수의 비로 만들기	8
비례식의 성질 알아보기	비례식에서 외항의 곱과 내항의 곱 구하기	9
	비례식에서 미지값 구하기	10

이 검사도구의 채점 기준은 <표 Ⅲ-1>과 같다. 3명의 채점자가 각각 채점하였으며 일치도는 91%였다. 채점자간에 부여한 점수가 지나치게 상이한 경우 의견조율을 통해 최종 점수를 확정하였다.

라. 비와 비례에 대한 사실·알고리즘 지식

비례에 대한 사실·알고리즘 지식 검사는 6학년 학생들이 학교 수업을 통해 습득한 비와 비율, 비례식에 관련된 지식을 얼마나 습득하고 있는지를 조사하기 위해 개발되었다. 이 검사는 초등학교 교육과정을 기반으로 '5-2-7. 비와 비율', '6-1-7. 비례식' 단원에서 학습하는 내용으로 비와 비율에 대한 사실, 개념, 원리를 묻는 질문으로 구성된다. 세부적인 문항 구성은 <표 Ⅲ-2>와 같다. 각 문항에 대해 1점을 부여하여 총 10점 만점으로 구성되며, 검사 문항에 대한 신뢰도 Cronbach α는 0.842이었다.

마. 비와 비례에 대한 개념적 지식

비와 비례에 대한 개념적 지식 검사 도구는 두 단계를 거쳐 개발되었다. 첫 번째 단계에서는 일반적인 수준에서 개념적 지식의 평가 요소를 추출하였다. 이를 위해 NCTM(1989)의 개념적 지식 평가 규준 8개 항목, 절차적 지식 평가 규준 5개 항목, 연결성 평가 규준 3개 항목과 NCTM(2000)의 수와 연산 규준과 대수 규준 4개 항목, 연결성 규준 5개 항목, Baroody와 Coslick(1998)의 연결성 요소 8개 항목을 참고하여 유목화가 가능한 항목끼리 묶어 최종 5개 평가 요소를 생성하였다.

두 번째 단계에서는 전 단계에서 개발된 일반적인 평가 기준을 '비와 비율' 영역에 적절하도록 특수화 시키는 작업을 수행한 후 각 요소에 해당하는 문항을 개발하였다. 개발된 문항은 수학교육 전문가 2인과 교사 5인의 검증을 받았다. 위와 같은 과정을 통해 도출된 개념적 지식 평가 틀은 <표 Ⅲ-3>와 같다. 이 검사 도구는 선다형, 단답형, 서술형 형식을 갖추고 있으며, 각 문항의 특성을 고려하여 각 문항에 해당하는 평가 기준을 개발하였다.

바. 비와 비례에 대한 문제 유형 지식

문제 유형 지식 검사 도구는 비례상황과 비-비례상황을 명확하게 인식하는지를 검사하기 위해 개발되었다. 예비 검사에서 비례상황과 비-비례상황이 섞여있는 문제들을 주고 풀이 방법이 동

<표 Ⅲ-3> 개념적 지식의 평가 요소

개념적 지식 평가 요소	비와 비례에 대한 개념적 지식 평가	문항 번호
개념의 내포적, 외연적 의미의 이해와 해석	비의 다양한 의미를 해석하고 이해	1
다양한 표상 간의 연결	그래프로 표현된 비례 관계를 표와 기호로 번역	2
수학적 개념사이의 연결	곱셈, 비, 분수, 소수, 퍼센트, 분수의 크기 개념을 통합적으로 적용해 문제해결	3
개념과 절차의 연결	비례식 알고리즘을 어떻게 수행했는지를 구체적인 수준에서 설명	4
개념과 일상생활과의 연결	비의 개념과 비의 순서 관계를 실제적 수준에서 이해하고 설명	5

<표 Ⅲ-4> 문제 유형 지식 검사

표준문제	비례 추론 문제	줄임 표현	번호
비교문제 1	맥락: 같음, 구조: 다름	S(surface)	3
비교문제 2	맥락: 다름, 구조: 동일	P(proportion)	4
비교문제 3	맥락: 다름, 구조: 동일(깊이)	DP(deep proportion)	2
비교문제 4	무관련 문제	UR(unrelated)	1

일한 문제끼리 묶도록 하였는데, 전체 학생들 중 정답률이 10% 미만이었다. 이러한 결과는 학생들이 이러한 과제를 수행해본 경험이 없고, 교실 상황에 적절하지 않기때문일 수 있다고 판단하여 Carlo 외(1992)의 연구를 참고하여 검사 도구를 수정하였다. 개발된 검사 도구는 크게 표준문제 1문항과 비교 문제 4문항으로 구성된다. 표준문제는 교과서에 제시된 정비례 상황으로서 비례식을 세워 해결할 수 있는 문항이다. 비교문제는 표준문제와 맥락은 같으나 구조가 다른 경우, 맥락은 다르나 구조가 같은 경우, 맥락은 다르지만 구조가 같고 더 깊이 있는 추론을 요하는 경우, 맥락도 구조도 다른 무관련 문제로 구성된다(<표 Ⅲ-4> 참고).

사. 양의 변화인식

양과 양의 변화를 인식하는 능력을 측정할 수 있는 검사는 기존에 개발된 도구가 없어 다음과 같은 절차를 통해 개발하였다. 첫 번째 학생들이 양을 포함하고 있는 일상적인 상황에서 어디에 초점을 맞추는지를 알아보기 위해 동료 교사에게 “지금 여러분의 집 앞에서 자전거를 타고 학교를 간다고 상상해보세요. 무엇이 변했나요?”와 같은 문항을 이메일로 보내 학생들의 반응을 수집해 줄 것을 부탁하였다.

학생들은 답변은 “나무가 지나간다. 집에서 멀어져 간다. 자전거 페달이 위 아래로 움직인다. 자전거 바퀴가 돈다. 친구 집 앞을 지나간다… 등이였다. 이러한 반응을 통해 학생들은 눈에 보이는 현상을 기술할 뿐 현상의 밑바탕에 깔린 양과 그것들의 변화를 관찰하지 못한다는 점을 알 수 있었다. 동시에 이러한 결과가 나타난 이유가 학생들이 양을 인식할 수 있는 능력이 없어서라기보다는 이러한 형태의 문제가 학생들에게 친숙하지 않으며, 문항 자체에 학생들이 무엇을 해야 할 지에 대한 지시문이 포함되지 않아 학생들이 구체적으로 무엇을 해야 할 지를 인식하지 못했기 때문일 수 있다고 판단하였다. 따라서 학생들에게 주어진 상황에서 수량화할 수 있는 특성에 초점을 맞추도록 하기 위해 활동 목표를 보다 구체적으로 안내하는 지시문을 포함시켜 문항을 개발한 후, 다시 동료교사에게 이메일로 보내 학생들의 반응을 수집해 줄 것을 요구하였다. 학생들의 반응에서 주어진 일상적인 상황에서 양을 인식하는 빈도는 향상되었으나 양의 변화는 주목하지 않는 경향이 있었다.

이상 두 차례의 비형식적인 개발 절차에서 나타난 문제점과 보완사항을 종합하여 다음 같은 점에 주안점을 두어 예비 검사 문항을 제작하였다. 첫째, 검사지 안에 양의 의미에 대한 설명을 포함시켰다. 둘째, 초등학교 교육과정에서 취급하고 있는 양의 종류 예컨대, 시간, 온도, 무게, 넓이 등을 제시하고 설명하였다. 셋째, 양의 인식과 더불어 양의 변화를 분석하도록 하기 위해 ‘어떤 양이 어떻게 변하는가?’와 같이 질문 형식을 변경하였다. 넷째, 문장으로 제시된 상황을

구체적으로 머릿속으로 그려볼 수 있는 기회를 제공하였다. 예를 들어, '달리는 차 안에서 바깥 풍경을 보니'의 경우와 같이 학생들로 하여금 차를 타는 경험을 떠올리게 한 후 달리는 차 안에서 바깥 풍경을 바라보는 자신의 모습을 상상해보게 하였다. 다섯째, 학생들에게 제시된 상황은 학생들에게 친근하며, 머릿속으로 이미지화시켜볼 수 있는 내용으로 구성하였다. 예비 검사 결과는 대체로 만족스러웠다. 예비 검사 결과를 토대로 전문가 집단의 검토를 거쳐 본 검사 문항을 최종 확정하였다.

아. 메타인지

Hong(1998)에서 사용한 'How Do Your Solve Problems?'을 한글로 번안하여 사용하였다. 하나의 심리학적 구인을 측정하기 위해 여러 개의 문항을 사용할 경우 원래 연구자가 의도하는 방향으로 측정되었는지를 알아볼 필요가 있기 때문에 예비 연구에서 메타인지 측정 도구에 대한 요인분석을 실시하였다. 요인분석 방식은 주성분분석을 통하여 직교 회전 방법인 verimax 회전 요인분석이었으며, 또한 요인의 수를 결정하기 위해 고유값을 1.0 기준으로 그 이상의 요인을 추출하였다. 반복추출요인분석을 수행하여 Varimax 방법으로 회전한 1차적인 주성분분석결과 고유값이 1.0이상의 요인의 수를 확인하였더니 전체 4개 요인이 산출되었는데, 검사 문항 중 조절 1번 문항이 지식 문항과 중복되어 삭제하였다. 최종적으로 메타 지식 9문항, 메타 조절 8문항이 포함되었다.

4. 검사 실시와 자료 수집

검사를 실시할 학교의 교장, 교감, 연구 부장, 6학년 부장 교사에게 협조를 요청하기 위해 본 검사 실시 1주일 전에 학교를 방문하였다. 연구 대상 학급의 담임교사에게 본 연구의 취지와 목적, 검사 도구의 성격 및 검사 실시 방법과 유의사항 등에 대한 오리엔테이션을 실시하였다. 본 검사는 해당 학교의 정상적인 교육과정 운영을 저해하지 않는 범위 내에서10일에 걸쳐 이루어졌다. 학생들의 응답지를 회수한 다음 무응답율이 높거나 불성실한 응답자를 배제한 총 154명에 대한 자료를 수집하였다.

5. 자료 분석

중다회귀분석을 사용해 구조화 정도가 다른 문제를 해결하는데 통계적으로 유의한 영향을 주는 인지적 변인이 무엇인지를 분석하였다. 중다회귀식을 추정하는 방식은 동시입력방식(enter)을 사용하였다. 동시입력방식은 연구자가 고려하는 모든 독립변수들을 한꺼번에 투입하여 분석하는 방법이다. 검사 도구에 대한 학생들의 반응 결과에 의해 수집된 자료들은 SPSS를 사용해 분석되었다. 수정된 $R^2(adjusted R^2)$과 표준화된 β 값을 사용해 인지적 변인의 영향력에 대한 통계적 유의성을 검증하였다.

Ⅳ. 연구 결과

도출된 회귀 모형에 대한 통계적 유의성과 개별 독립변수의 종속변수에 대한 기여도와 통계적 유의성을 검정하였다. 구조화 정도가 다른 문제를 해결하는데 영향을 주는 인지적 변인이 무엇인지를 분석한 결과는 다음과 같다.

1. 잘-구조화된 문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인 분석

잘-구조화된 문제에 대한 해결 능력을 종속변

<표 Ⅳ-1> 잘-구조화된 문제해결에 대한 분산분석(n=154)

	제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
회귀모형	137.696	6	22.949	11.666	.000
잔차	300.082	146	2.055		
합계	437.778	152			
$R = .56$ $R^2(adj.\ R^2) = .32(.29)$					

수로 그리고 사실·알고리즘 지식, 개념적 지식, 범주화지식, 양의변화 인식, 메타지식, 메타조절을 독립변수로 정의하고, 동시에 투입하여(enter 입력 방식), 중다회귀분석을 실시하였다. 구조화된 문제해결 수행에 대한 분산분석표는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

수준 .05에서 잘-구조화된 문제 해결 수행 능력에 유의하게 영향을 미치는 독립변수는 사실·알고리즘 지식($t = 4.958$, $p = .000$), 문제유형 지식($t = 3.102$, $p = .000$)이며, 독립변수의 상대적 기여도를 나타내는 표준화 계수(B)에 의하면 사실·알고리즘 지식(.38), 문제유형 지식(.28)

<표 Ⅳ-2> 잘-구조화된 문제해결에 대한 중다회귀분석(n=154)

독립변수	비표준화 계수		표준화계수(β)	t	유의확률
	B	표준오차			
사실·알고리즘	.373	.075	.394	4.958	.000
개념적 지식	.026	.029	.090	.900	.370
문제유형 지식	.226	.073	.265	3.102	.002
양의변화인식	.121	.089	.128	1.366	.174
메타지식	.044	.171	.020	.258	.797
메타조절	.059	.156	.029	.376	.707
상수	2.070	.756		2.739	

잘-구조화된 문제 해결 수행 능력을 측정하는 모형에 대한 통계적 유의성 검정 결과, 회귀 모형의 F 통계값은 11.666 유의 확률은 .000으로 모형에 포함된 독립변수는 유의수준 .05에서 잘-구조화된 문제 해결 수행 능력을 유의하게 설명하고 있으며, 잘-구조화된 문제 해결 수행 능력 총 변화량의 32%가 모형에 포함된 독립변수에 의해 설명되고 있다(<표 Ⅳ-1> 참고).

개별 독립변수의 종속변수에 대한 기여도와 통계적 유의성을 검정한 결과(<표 Ⅳ-2>), 유의의 순으로 잘-구조화된 문제 해결 수행 능력에 영향을 미치고 있다.

결과적으로, 사실·알고리즘 지식과 문제 유형 지식 검사에서 높은 점수를 받은 학생들이 잘-구조화된 문제 해결 수행에서 높은 점수를 받은 것으로 해석할 수 있다. 이러한 결과를 통해 사실·알고리즘 지식과 문제 유형에 대한 지식은 잘-구조화된 문제를 성공적으로 해결하는데 필수적인 인지적 변인임을 알 수 있다.

2. 구조화된 문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인 분석

구조화된 문제에 대한 해결 능력을 종속변수로 그리고 사실·알고리즘 지식, 개념적 지식, 범주화지식, 양의변화 인식, 메타지식, 메타조절을 독립변수로 정의하고, 동시에 투입하여(enter 입력 방식), 중다회귀분석을 실시하였다. 구조화된 문제해결 수행에 대한 분산분석표는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 구조화된 문제해결에 대한 분산분석(n=154)

	제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
회귀모형	404.252	6	67.375	16.195	.000
잔차	607.408	146	4.160		
합계	1011.660	152			
$R = .632,\ R^2(adj.\ R^2) = .400(.38)$					

구조화된 문제해결 수행 능력을 측정하는 모형에 대한 통계적 유의성 검정 결과, 회귀 모형의 F 통계값은 16.195, 유의 확률은 .000으로 모형에 포함된 독립변수는 유의수준 .05에서 구조화된 문제해결 수행 능력을 유의하게 설명하고 있으며, 구조화된 문제해결 수행 능력 총 변화량의 40%가 모형에 포함된 독립변수에 의해 설명되고 있다.

개별 독립변수의 종속변수에 대한 기여도와 통계적 유의성을 검정한 결과, 유의수준 .05에서 구조화된 문제해결 수행 능력에 유의하게 영향을 미치는 독립변수는 개념적 지식($t = 1.999, p = .047$), 문제유형지식($t = 2.669, p = .008$), 양의 변화 인식($t = 2.149, p = .033$)이었으며, 독립변수의 상대적 기여도를 나타내는 표준화 계수(β)에 의하면 문제 유형 지식(.249), 개념적 지식(.216), 양의변화인식(.191) 순으로 구조화된 문제의 해결 수행

<표 Ⅳ-4> 구조화된 문제해결에 대한 중다회귀분석(n=154)

독립변수	비표준화 계수		표준화계수	t	유의확률
	B	표준오차	(β)		
사실·알고리즘 지식	.022	.028	.077	.770	.442
개념적 지식	.258	.129	.216	1.999	.047
문제 유형 지식	.106	.040	.249	2.669	.008
양의 변화 인식	.222	.103	.191	2.149	.033
메타지식	.197	.107	.137	1.832	.069
메타조절	.093	.091	.097	1.029	.305
상수	.853	1.080		4.703	.002

능력에 영향을 미치고 있다(<표 Ⅳ-4> 참고).

이러한 결과에 기초해 문제유형지식, 개념적 지식, 양의변화인식 검사에서 높은 점수를 받은 학생들이 구조화된 문제의 해결 수행에서 높은 점수를 받은 것으로 해석할 수 있다. 따라서 문제유형지식, 개념적 지식, 양의변화인식 능력은 구조화된 문제를 성공적으로 해결하는데 필수적인 변인임을 알 수 있다.

3. 비-구조화된 문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인 분석

인지적 변인 중 어느 요인이 비-구조화된 문제의 해결에 영향을 주는지를 알아보기 위해 범주화지식, 양의 변화 인식, 사실·알고리즘 지식, 개념적 지식, 메타인지를 독립변수로 하고 비-구조화된 문제해결 수행 능력을 종속변수로 하여 중다회귀분석을 실시하였다. 비-구조화된 문제해결 수행에 대한 분산분석표는 <표 Ⅳ-5>와 같다.

6개의 독립변수로 비-구조화된 문제해결 수행 능력을 측정하는 모형에 대한 통계적 유의성 검정 결과, 모형의 F 통계값은 41.676 유의 확률은 .000으로 모형에 포함된 독립변수는 유의수준 .05에서 비-구조화된 문제해결 수행 능력을 유의하게 설명하고 있으며, 비-구조화된 문제해결 수행 능력 총 변화량의 63%가 모형에 포함된 독립변수에 의해 설명되고 있다.

개별 독립변수의 종속변수에 대한 기여도와 통계적 유의성을 검정한 결과, 유의수준 .05에서 비-구조화된 문제의 해결에 유의하게 영향을 미치는 독립변수는 개념적 지식($t=2.497$, $p=.014$), 문제

<표 Ⅳ-5> 비-구조화된 문제의 해결에 대한 분산분석(n=154)

	제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
회귀모형	1436.128	6	239.355	41.676	.000
잔차	835.512	146	5.743		
합계	2274.641	152			
$R=.795$ $R^2(adj.\ R^2)=.631(.616)$					

<표 Ⅳ-6> 비-구조화된 문제의 해결에 대한 중다회귀분석(n=154)

독립변수	비표준화 계수		표준화계수(β)	t	유의확률
	B	표준오차			
사실·알고리즘 지식	.025	.126	.012	.199	.842
개념적 지식	.117	.047	.263	2.497	.014
문제 유형 지식	.726	.152	.176	4.785	.000
양의 변화 인식	.343	.121	.207	2.826	.005
메타지식	.193	.177	.086	1.091	.277
메타조절	1.250	.259	.330	4.819	.000
상수	5.929	1.268		4.674	.000

유형 지식($t=4.785, p=.000$), 양의 변화 인식($t=2.826, p=.005$), 메타조절($t=4.819, p=.000$)이었으며, 독립변수의 상대적 기여도를 나타내는 표준화 계수에 의하면 메타조절(.330), 개념적 지식(.263), 양의 변화 인식(.207), 문제 유형 지식(.176) 순으로 비-구조화된 문제해결 수행 능력에 영향을 주었다(<표 Ⅳ-6> 참고).

이러한 결과에 기초해 메타조절, 개념적 지식, 양의 변화 인식, 문제 유형 지식 검사에서 높은 점수를 받은 학생들은 비-구조화된 문제해결 수행에서 높은 점수를 받은 것으로 해석할 수 있다. 따라서 메타조절, 개념적 지식, 양의 변화인식, 문제 유형 지식은 비-구조화된 문제를 성공적으로 해결하는데 필수적인 변인임을 알 수 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

이 연구의 핵심적 고려사항은 구조화 정도가 다른 문제의 해결을 위해 요구되는 인지적 변인이 무엇인지를 밝히는 것이다. 연구는 구조화정도가 다른 비례 문제의 해결을 위해 다른 인지적 변인이 기여한다는 점을 입증하였다. 즉 잘-구조화된 문제의 해결에 영향을 주는 인지적 변인은 사실·알고리즘 지식과 문제 유형 지식이었으며, 구조화된 문제의 해결에 영향을 주는 인지적 변인은 개념적 지식, 문제유형지식, 양의 변화 인식이었으며, 비-구조화된 문제의 해결에 영향을 주는 인지적 변인은 메타조절, 개념적 지식, 양의 변화 인식, 문제유형지식이었다.

따라서 학생들의 수학적 문제해결 능력을 신장시키기 위해, 구체화된 교육 목표와 문제의 본질에 따라 구조화 정도가 다른 문제와 다양한 원리를 사용한 교수학습이 이루어져야 할 것이다. 더불어 구조화 정도가 다른 문제 유형에 따라 인지과정과 인지적 변인이 다르기 때문에, 수학 교육자들은 문제 유형에 따라 다른 평가 틀을 개발해야 한다. 이 연구 결과에 기초해 개념적 지식, 문제 유형 지식, 양의 변화 인식은 구조화된 문제와 비-구조화된 문제해결 능력을 평가하기 위한 개념적 틀에 포함되어야 한다.

초등학교에서 비례 추론의 지도는 미지값을 구하는 문제 상황이 제시되고, 비례식을 세운 후 알고리즘을 사용해 해결하는 접근 방법을 따르고 있다. Lesh 외(1988)는 만일 학생들이 단순히 알고리즘을 사용하여 비례 문제를 해결하도록 학습한다면 알고리즘을 적절하게 사용해 문제를 해결했을지라도 비례적으로 추론했다고 볼 수 없다고 주장했다. 이러한 주장은 본 연구 결과에 의해 강력하게 지지되었다. 즉 학교에서 주로 다루고 있는 잘-구조화된 비례 문제의 해결에 가장 강력한 영향을 주는 인지적 변인은 사실·알고리즘 지식이었다. 이러한 결과는 잘-구조화된 비례 문제로는 학생들의 비례 추론과 문제해결 기술을 향상시키는데 역부족이라는 점을 반증한다고 볼 수 있다. 따라서 학생들의 개념적 지식, 문제 유형 지식을 포함한 개념적 이해 점검하고 통합할 수 있는 기회를 제공하기 위해 수학 수업에서 구조화된 문제와 비-구조화된 문제를 적극 활용할 필요가 있다.

또한 비례문제 해결 학습과 연구에서 메타인지 기술에 관심을 둘 필요가 있다. 다양한 관점과 제약들을 포함하며 진정성 있고, 복잡한 문제를 활용할 때 비로소 학생들의 메타인지를 활성화시키고 신장시킬 수 있다. 따라서 교사 및 연구자들은 실세계 상황에서 직면하는 상황과 유사한 도전적이며 진정성 있는 수학적 문제를 개발하는데 상당한 노력을 기울일 필요가 있다. 따라서 효과적인 수업 전략은 학생들로 하여금 다양한 실생활 관련 문제 상황 안에서 다양한 관점으로 상황을 이해하는 경험을 제공하는 것이다.

학생들의 지식의 연결 정도와 깊이를 평가할

수 있는 도구를 개발할 필요가 있다. 개념적 지식과 지식의 연결 정도를 측정하는 다양한 방법을 사용해 교사들은 의도하는 수업 결과에 귀결될 수 있는 중요한 요소를 평가할 필요가 있다. 더불어 이러한 평가를 통해 얻어진 점수는 학생들의 문제해결 능력을 예측하는데 사용할 수 있다. 따라서 보다 많은 연구가 학생들의 수학적 지식의 연결 정도와 깊이를 평가할 수 있는 방법을 개발하는데 초점을 둘 필요가 있다.

본 연구에서 가지는 제한점을 밝히고 후속 연구를 위한 제언을 제시하면 다음과 같다.

첫째 본 연구에서는 사실·알고리즘 지식, 개념적 지식, 문제 유형에 대한 지식, 양의 변화 인식, 메타인지를 인지적 변인으로 설정하였다. 그러나 이 외에도 문제해결에 영향을 주는 다양한 변인, 예컨대 학습동기 및 태도, 문제 친숙성 등이 존재할 가능성이 있다. 따라서 보다 다양한 인지적, 정의적 변인을 포함한 후속 연구가 필요하다.

둘째 본 연구는 문제의 구조화 정도를 해결 방법을 어느 정도 예측가능하지에 따라 잘-구조화된 문제, 구조화된 문제, 비-구조화된 문제로 분류하였다. 그러나 이와 같은 분류 방식 외에 문제 상황의 구조화 정도를 구분하는 또 다른 방식이 있을 수 있다. 따라서 본 연구에서 사용한 구분 방식을 검증하고, 다른 방식으로 문제 상황의 구조화 정도를 구분하거나 구조화 정도를 더 세밀하게 구분하여 문제해결 과제를 다양하게 구성할 수 있는 방법에 대하여 구체적인 연구가 수행된다면 문제 상황의 구조화 정도와 인지적 변인간의 관계에 대해 보다 깊이 있게 고찰할 수 있을 것으로 생각된다.

셋째 본 연구는 전국의 초등학교 6학년 학생 표본이 아니라 일부 소재의 학생만을 연구대상으로 수행되었기 때문에 본 연구의 결과를 우리나라 전체 초등학교 6학년 학생까지 일반화하기 어렵다는 제한점이 있다. 후속연구는 전국적인 표본을 대상으로 동일한 연구 결과가 나타나는지 검토할 필요가 있다.

마지막으로 후속된 경험적 연구는 이 연구에서 발견된 비-구조화된 문제해결 결과가 다른 종류의 비-구조화된 영역에 일반화할 수 있는지를 조사할 필요가 있다. 이 연구의 내용은 비례 추론 영역이었다. 분수, 소수, 도형, 측정 등 다양한 내용 영역에서 이 연구 결과와 일관된 결과를 도출하는지를 조사할 필요가 있다.

참고문헌

고은성·이경화(2007). 초등학교 6학년 학생의 비례 추론 능력 분석: 2명의 사례 연구. **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 17**(4), 359-380.

김민경·이지영·홍지연·김은경(2011). 초등학교 수학 교과서에 나타난 문제의 비구조성에 관한 연구. **학습자중심교과교육연구, 11**(2), 1-21.

박정숙(2008). 학생들의 문제해결전략 유형과 비례상황 인지와의 관계. **한국학교수학회논문집, 11**(4), 609-627.

이종욱(2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 16**(2), 157-177.

정은실(2003). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. **대한수학교육학회 학교수학, 5**(4), 421-440.

Andrew, S. Z., & Joan, B. G. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Eucational Research Journal, 8*(1), 7-31.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 296-333). NY: Macmillan.

Carlo, M. S., Royer, J. M., Dufresne, R., & Mestre, J. P. (1992). *Reading, inferencing and problem identification: Do experts and novices differ in all three?* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association(San Francisco).

Chamberlin, S. A., & Moon, S. (2005). Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 37-47.

de Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and fomulations on the illusion of lenearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(1), 65-89.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematical Education Research Journal, 16*(3), 58-79.

Garofalo, J., & Lester, J. R. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and human performance, *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 163-176.

Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F., & Yoon, C. (2007). The use of reflection tools in building personal mod딘 of problem solving. In R. Lesh, E. Hamilton, & J. Kaput(Eds.). *Foundations for the future in mathematics education*(pp. 349-366). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hong, S. N. (1998). *The relationship between well-structured and ill-structured problem solving in multimedia simulation.* Unpublished doctoral dissertation. The Pennsylvania State University.

Jay, E. S., & Perkins, D. N. (1997). Problem finding: The search for mechanism. In M. A. Runco(Ed.), *The creativity research handbook.* cresskii, NJ: Hampton Press Inc.

Jonassen, D. G. (1997). Instruction design models for well-structured and ill-structured problem solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development, 45*(1), 65-94.

Jonassen, D. G. (2010). *Research issue in problem solving.* Paper presented at the 11th International Conference on Education Research(Seoul, Korea).

Jonassen, D. G., & Hung, W. (2008). All problems are not equal: Implications for problem-based learning. *The Interdisciplinary Journal of Problem Based Learning, 2*(2), 6-28.

Labato, J., & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 87-116.

Lamon. S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teacher.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lamon. S. J. (2007). Rational number and proportional reasoning. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of NCTM*(pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice.* NY: Cambridge University Press.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr(Eds.), *Number concept and operations in the middle grades*(pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modelling. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of NCTM*(pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.

Lo, J. J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportional schemes: A story of a fifth grader. *Journal of Research in Mathematics Education, 28*(2), 216-236.

Mayer, R. E., & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg, & T. Ben-Zeev(Eds.), *The nature of mathematical thinking*(pp. 29-5). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Nabors, W. K. (2003). From fraction to proportional reasoning: A cognitive schemes of operation approach. *The Journal of Mathematical Behavior, 22,* 133-179.

NCTM. (1989). *Curriculum and assessment standards.* Reston, VA: Author.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Oon-Seng, T., Chu-Tee, T., & Stefanie, C. (2009). Problem and creativity. In T. Oon-Seng(Ed.), *Problem-based learning and creativity*(pp. 1-11). Singapore: Cengage Asia Pte Ltd.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportional and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43,* 271-292.

Van Dooren, W., de Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportiona: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1). 57-86.

Vergnaud, G. (1983). Mutiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau(Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*(pp. 128-173). NY: Academic Press, INC.

Wood, P. K. (1983). Inquiring systems and problem structure: Implications for cognitive development. *Human Development, 26*, 249-265.

Analysis on cognitive variables affecting proportion problem solving ability with different level of structuredness

Sung, Chang Geun(Keunbyeol Elementary School)
Lee, Kwangho(Korea National University of Education)

The purpose of the study is to verify what cognitive variables have significant effect on proportional problem solving. For this aim, the study classified proportional problem into well-structured, moderately-structured, ill-structured problem by the level of structuredness, then classified the cognitive variables as well into factual algorithm knowledge, conceptual knowledge, knowledge of problem type, quantity change recognition and meta-cognition(meta-regulation and meta-knowledge). Then, it verified what cognitive variables have significant effects on 6th graders' proportional problem solving abilities through multiple regression analysis technique.

As a result of the analysis, different cognitive variables effect on solving proportional problem classified by the level of structuredness. Through the results, the study suggest how to teach and assess proportional reasoning and problem solving in elementary mathematics class.

* Key word : proportional reasoning(비례추론), proportional problem solving(비례문제해결), well-structured problem(잘-구조화된 문제), moderately-structured problem(구조화된 문제), ill-structured problem(비-구조화된 문제), conceptual knowledge(개념적 지식), knowledge of problem types(문제유형지식), recognition of quantity change(양의 변화 인식)

논문접수 : 2012. 6. 26
논문수정 : 2012. 7. 27
심사완료 : 2012. 8. 20

<부록 1> 잘-구조화된 문제

1. 길이가 3m인 막대의 그림자가 120cm 일 때, 길이가 12m인 막대의 그림자는 몇 cm입니까?
2. 15개에 2400원인 사탕이 있습니다. 사탕 3개의 값은 얼마입니까?
3. 바닷물 3L를 증발시켜 9kg의 소금을 얻었습니다. 바닷물 12L를 증발시키면 몇 kg의 소금을 얻을 수 있습니까?
4. 어느 과일 가게에서 사과 12개를 6천원에 판매하고 있습니다. 사과 5개를 사려면 얼마를 지불해야 합니까?
5. 어느 자전거가 5분 동안 7km를 달릴 수 있습니다. 같은 빠르기로 15분 동안 달린다면 몇 km를 달릴 수 있습니까?
6. 철사 24cm의 무게를 재어보니 300g입니다. 철사 8cm의 무게는 얼마입니까?
7. 어느 문방구에서 공책 7권을 5000원에 판매하고 있습니다. 공책 20권을 사려면 얼마를 지불해야 합니까?
8. 빵 30개를 만드는데 달걀이 11개 필요합니다. 빵 7개를 만들기 위해서는 달걀이 몇 개 필요합니까?

<부록 2> 구조화된 문제

- 여러분! 요즘 부모님들께서 물가가 너무 비싸다는 말씀 자주하시죠? 아래 글은 '진실한 신문'의 경제면에 실린 기사의 일부입니다. 기사를 잘 읽어보세요.

김행복씨는 10년전 광주로 이사와 직장생활을 시작하였다. 그와 부인은 중앙로 3188번지에 매달 임대료가 170,000원인 임대아파트에 살았다. 그는 또한 자동차를 4500,000원에 구입하였다. 그의 첫 월급은 1400,000원이였다. 올해, 아들 김소망씨도 광주에서 직장생활을 시작하였다. 그와 그의 신부는 그의 아버지가 10년 전에 살았던 똑같은 임대아파트에 살며, 현재 임대료는 매달 350,000원이다. 아들 김소망씨 또한 그의 아버지가 샀던 모델과 똑같은 자동차를 8,900,000원에 샀다.

- 김행복씨의 아들 김소망씨의 첫 월급은 얼마쯤일까? 해결 과정을 아래에 자세히 적어주세요. 필요하다면 그림, 도표, 그래프 등을 사용해서 설명해주세요.

<부록 3> 비-구조화된 문제

※ 아래 글은 신문 기사에 실린 내용을 조금 수정한 글입니다. 잘 읽고 물음에 답하시오.

"전설의 괴물 빅풋(Big Foot) 출몰, 광주 시민들 공포"

-산 근처에서 전설의 괴물 '빅풋(Big Foot)'의 발자국이 발견되어 시민들이 공포에 떨고 있다. 또 괴물을 목격했다는 증언이 잇따르는 가운데 빅풋 발자국이 발견되어 언론에 공개되었다.

언론을 통해 처음 알려진 '정글 빅풋'은 2일 로이터, AP 등을 통해 세계적으로 알려지면서 미국의 한 포털에서는 '가장 많이 본 뉴스' 부문 상위권에 오르는 등 화제를 낳고 있다.

이러한 소식을 접한 국립공원 측은 '빅풋'의 키가 얼마쯤인지를 알아보기 위해, 국립과학수사 연구소에 수사 의뢰를 하였다.

• 당신은 괴물 '빅풋'의 키를 조사하기 위해 만들어진 국립과학수사연구소 소속 팀장입니다. 시민들의 공포를 하루라도 빨리 덜어주기 위해 지금 바로 '빅풋'의 키가 얼마쯤인지를 밝혀내야 합니다. 그리고 기자들을 만나 그동안의 수사 결과를 이야기해야 합니다. 각자 '빅풋'의 키는 얼마인지를 구해봅시다. 그리고 기자회견에서 기자들의 질문에 답해봅시다.

■ NBT 박대기 기자입니다.

빅풋의 키를 어떻게 구했습니까? 빅풋의 키를 어떻게 구했는지를 국민들이 쉽게 납득할 수 있게 연구 진행 과정을 첫째, 둘째, 셋째....등 몇 개의 단계로 나누어 설명해 주십시오. 그리고 각 단계를 설명하는 과정에서 필요하다면 그림, 수학 식 등을 사용해 최대한 자세히 설명해 주십시오.