

공간의존 파론도 게임과 주식 투자[†]

조동섭¹ · 이지연²

^{1,2}영남대학교 통계학과

접수 2012년 7월 27일, 수정 2012년 8월 20일, 게재확정 2012년 8월 25일

요약

파론도 역설은 개별로는 지는 게임들이 결합하여 이기게 되거나 개별로는 이기는 게임들이 결합하여 지게 되는 역설적인 현상을 말한다. 본 논문에서는 주변의 투자 결과에 의해 매수 종목을 정하는 공간의존 파론도 게임의 규칙을 적용하여 매일 주식을 사고 파는 경우에 각 포트폴리오의 거래당 기대수익금을 계산하고, 2008년부터 2010년까지의 한국거래소의 주식 데이터를 이용하여 주식 투자에서도 파론도 역설 현상이 존재함을 확인한다.

주요용어: 공간의존 파론도 게임, 마코프 체인, 역 파론도 효과, 정상확률, 주식 데이터, 파론도 역설, 파론도 효과.

1. 서론

파론도 역설 (Parrondo paradox)은 스페인의 물리학자 파론도 (Juan M. R. Parrondo)가 처음 소개한 동전 던지기 게임에서 유래하였다 (Parrondo, 1996). 이 동전 던지기 게임은 두 개의 게임 A와 B로 구성되며, 게임 A에서는 앞면이 나올 확률이 $1/2 - \epsilon$ 인 동전을 던지고, 게임 B에서는 게임자의 현재 누적 상금이 3의 배수이면 앞면이 나올 확률이 $1/10 - \epsilon$ 인 동전을 던지고, 3의 배수가 아니면 앞면이 나올 확률이 $3/4 - \epsilon$ 인 동전을 던진다. 동전을 던져서 앞면이 나오면 게임자는 1원을 얻고, 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. $\epsilon > 0$ 일 때, 두 게임 A와 B는 모두 지는 게임이 되는 반면에 때 시행에서 게임 A와 B 중에서 한 게임을 임의로 선택해서 진행하거나 게임 A와 B를 일정한 규칙에 의해 주기적으로 반복하면 이기는 게임이 되게 할 수 있다. 반대로 $\epsilon < 0$ 이면, 게임 A와 B는 각각 이기는 게임이지만 임의적으로 혼합하거나 주기적으로 반복하는 혼합게임은 지는 게임이 되게 만들 수 있다. 전자와 같이 지는 게임들로 이기는 결과가 나타나는 현상을 파론도 효과 (Parrondo effect)라고 하고, 후자와 같이 이기는 게임들로 지는 결과가 나타나는 현상을 역 파론도 효과 (reverse Parrondo effect)라고 한다. 이와 같이 두 시스템이 결합하여 원래의 특성과 다른 특성을 갖는 새로운 시스템이 되는 현상을 넓은 의미의 파론도 역설이라고 한다 (Harmer와 Abbott, 2002).

파론도가 처음 제안한 게임은 게임자의 현재 누적 상금에 따라 게임 B의 동전이 결정되기 때문에 원금의존 파론도 게임 (capital-dependent Parrondo game)이라고 부른다. Parrondo 등 (2000)은 기존의 원금의존 파론도 게임을 변형하여 게임자의 과거 시행 결과에 따라 게임 B의 동전이 결정되는

[†] 이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2012-0004434).

¹ (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 석사과정.

² 교신저자: (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 교수. E-mail: leeji@yu.ac.kr

과거의존 파론도 게임 (history-dependent Parrondo game)을 소개하였다. 게임 A 는 동일하고, 게임 B 는 4개의 동전을 사용하는데 만약 직전의 두 번의 시행 결과가 뒷면-뒷면 (또는 패-패)이면 앞면이 나올 확률이 p_0 인 동전을, 뒷면-앞면 (또는 패-승)이면 p_1 인 동전을, 앞면-뒷면 (또는 승-패)이면 p_2 인 동전을, 앞면-앞면 (또는 승-승)이면 p_3 인 동전을 던진다. 즉, 직전의 과거 2번의 시행 결과에 따라 현재 시행에서 사용될 동전이 결정되어 그 승패 확률이 정해진다. 과거의존 파론도 게임에서도 확률 모수의 범위에 따라 파론도 효과와 역 파론도 효과가 각각 존재함이 여러 연구자들에 의해 확인되었다 (Ethier와 Lee, 2009; Lee, 2011). 원금의존 파론도 게임과 과거의존 파론도 게임은 기본적으로 한 명의 게임자에 의해 진행되는 게임이다. 반면에 Toral (2001)의 공간의존 파론도 게임 (spatially dependent Parrondo game)은 여러 명의 게임자들이 서로 협력하여 진행되는 게임으로, 여러 명의 게임자들이 둘러 앉아있을 때, 한 명의 게임자를 임의로 선택하고, 선택된 게임자의 양옆에 있는 다른 게임자들의 최근 시행 결과에 의해 게임 B 의 동전이 결정된다. 즉, 주변 게임자들의 시행 결과에 의해 본인의 승패 확률이 정해지는 경우로서, 전체 게임자들의 수와 확률 모수의 값에 따라 파론도 현상이 존재함이 부분적으로 관찰되었다 (Ethier와 Lee, 2012).

파론도 역설은 처음 소개된 통계물리학 뿐 아니라 화학 (Osipovitch 등, 2009), 인구 유전학 (Reed, 2007), 신뢰성 이론 (Di Crescenzo, 2007), 인식론 (Stjernberg, 2007), 최적화 (Lee, 2009) 등의 다양한 분야에서 발견되고 있으며 그 적용사례가 점차 늘어나고 있다. 연구 초창기에 Harmer와 Abbott (1999)는 경제학이나 사회 동역학에서도 적용될 수 있음을 제안하였는데 특히, 주식 투자에서 가격이 떨어지는 주식에 투자를 하여 이익을 볼 수 있는 지에 대한 관심이 많았다 (Iyengar와 Kohli, 2004). Paulos (2000)는 표준적인 주식 시장은 앞서 소개된 다양한 형태의 파론도 게임으로 모형화되지는 않지만 게임의 변형으로 반직관적인 투자 전략을 만들 수 있다는 의견을 개진하였고, Stutzer (2010)는 리밸런싱 (rebalancing)을 통해 주식 투자에 있어서 기대수익 분포의 중앙값에 대한 파론도 현상을 설명하는 등 주식 투자와 파론도 역설을 연결하려는 다양한 시도가 있었다. 우리나라 KOSPI에 대한 확률적 연구는 Kim 등 (2008), Kim과 Oh (2011), Kim과 Lee (2011) 등에 의해 진행되어 왔으며, Cho와 Lee (2012)는 과거의존 파론도 게임의 규칙을 적용하여 파론도 효과와 역 파론도 효과가 적은 비중이지만 실제 발생할 수 있음을 KOSPI 데이터를 통해 확인하기도 하였다.

본 논문에서는 여러 명의 게임자들에 의해 진행되는 공간의존 파론도 게임의 규칙에 의해 주식 투자가 이루어지는 경우에 파론도 효과와 역 파론도 효과가 존재하는 지를 알아보고자 한다. 기존의 동전 던지기 게임을 주식 투자 모형으로 변형하여, 게임 A 를 포트폴리오 (portfolio) A 로, 게임 B 를 포트폴리오 B 로 나타낸다. 포트폴리오 A 는 한 개의 주식으로 구성되고, 포트폴리오 B 는 4개의 주식으로 구성된다. 기존의 공간의존 파론도 게임에서의 여러 명의 게임자들을 주식 투자 모형에서는 여러 개의 투자 계좌로 간주하고, 여러 개의 계좌를 관리하는 투자자는 매일 투자할 계좌를 임의로 한 개 선택하여 선택된 계좌의 주변에 있는 다른 계좌들의 투자 결과에 따라 4개의 주식 중 어느 종목을 매수할 것인지를 정한다. 투자자가 관리하는 전체 계좌들의 총 수익금이 포트폴리오 A 와 포트폴리오 B 는 각각 음의 기대값을 가지는 손실을 보는 포트폴리오이지만, 두 포트폴리오를 동일한 확률로 혼합한 혼합 포트폴리오는 양의 기대값을 가져 이익이 되는 파론도 효과가 존재하는지를 확인하고자 한다. 또한 이익을 주는 두 개의 포트폴리오의 임의적 혼합으로 손실이 되는 역 파론도 효과가 가능한 지도 알아본다.

2절에서는 공간의존 파론도 게임에 대한 자세한 설명과 게임의 시행당 점근적인 기대수익을 계산하고 파론도 효과와 역 파론도 효과가 존재하는 확률 모수의 범위를 정한다. 3절에서는 2008년부터 2010년까지의 주식 데이터를 이용해 공간의존 파론도 게임의 규칙에 의해 파론도 현상이 어떻게 존재하는지 파악한다.

2. 공간의존 파론도 게임

2.1. 고정 상금행렬의 공간의존 파론도 게임

$N (\geq 3)$ 명의 게임자들이 등글게 둘러앉아 있다. 이들 중에서 한 명의 게임자를 임의로 택하는데 그를 게임자 i ($i = 1, 2, \dots, N$)라고 하자. 게임 A 는 앞면이 나올 확률이 p 인 동전을 던져서 앞면이 나오면 게임자는 1원을 얻어 승의 상태가 되고, 뒷면이 나오면 1원을 잃어 패의 상태가 된다. 게임 B 는 앞면이 나올 확률이 각각 p_0, p_1, p_2, p_3 인 4개의 동전을 사용한다. 게임자 i 의 양옆 게임자 $i-1$ 과 $i+1$ 의 상태가 패-패이면 p_0 동전을, 게임자 $i-1$ 는 패, 게임자 $i+1$ 는 승이면 p_1 동전을, 게임자 $i-1$ 는 승, 게임자 $i+1$ 는 패이면 p_2 동전을, 양옆 게임자 $i-1$ 과 $i+1$ 모두 승이면 p_3 동전을 사용한다. 즉, 양옆 게임자들의 상태에 따라 본인이 현재 시행에서 사용할 동전이 달라진다. 게임자 i 가 게임을 한 후 앞면이 나오면 1원을 얻어 승의 상태가 되고, 뒷면이 나오면 1원을 잃어 패의 상태가 되며, 이 상태는 게임자 i 가 다시 게임을 하게 될 때까지 변하지 않고 유지된다. 다만, 첫 시행을 위한 상태는 패-패, 패-승, 승-패, 승-승 중에서 동일한 확률 $1/4$ 로 하나를 정하는 것으로 가정한다.

Toral (2001)는 $N = 50, 100$, 또는 200인 경우에 대해

$$p = \frac{1}{2}, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = p_2 = \frac{4}{25}, \quad p_3 = \frac{7}{10} \quad (2.1)$$

일 때, 선택된 게임자들이 모두 게임 A 를 진행하는 경우는 공정한 게임이 되고, 모두 게임 B 를 진행하는 경우는 지는 게임이 되는 반면에 게임 A 와 게임 B 를 동일한 확률로 혼합한 혼합게임 $C := (1/2)(A + B)$ 는 이기는 게임이 되어 파론도 효과가 존재함을 시뮬레이션을 통해 관찰하였다. 이 때, 혼합게임은 공정한 동전을 던져 앞면이 나오면 선택된 게임자는 게임 A 를 하고, 뒷면이 나오면 게임 B 를 하는 것을 말한다. Ethier와 Lee (2012)는 $3 \leq N \leq 19$ 에 대해 $p = 1/2$ 일 때, 몇 개의 특별한 확률값 (p_0, p_1, p_2, p_3)에 대해 시행당 N 명 전체의 기대상금을 계산하여 파론도 효과가 존재함을 확인하였다. 더불어 게임 B 는 이기는 게임이 되는 반면에 혼합게임 C 는 지게 되는 역 파론도 효과가 대칭적으로 존재함을 증명하였다.

본 절에서는 상금이 +1원 또는 -1원으로 고정된 기존의 공간의존 파론도 게임의 기대상금을 유도하는 과정 (Ethier와 Lee, 2012)을 정리하여 2.2절의 일반 상금의 공간의존 파론도 게임의 경우로 확장한다. 이를 위해 먼저 Ethier와 Lee (2009)의 마코프 체인에 의해 진행되는 게임의 평균에 대한 강대수의 법칙 (strong law of large numbers)이 필요한데 그 내용은 다음과 같다.

정리 2.1 (Ethier와 Lee, 2009) 유한 상태공간 Σ 에서 정의되는 분할불가 (irreducible)이고 비주기적 (aperiodic) 마코프 체인 $\{X_n, n \geq 0\}$ 의 1단계 전이확률행렬 (transition probability matrix)과 정상확률분포 (stationary distribution)를 각각 \mathbf{P} 와 $\boldsymbol{\pi}$ 라고 하자. 함수 $w : \Sigma \times \Sigma \mapsto \mathbf{R}$ 로 상금행렬 (payoff matrix) $\mathbf{W} = (w(i, j))_{i, j \in \Sigma}$ 을 나타내고, 모든 n 에 대해 $\xi_n := w(X_{n-1}, X_n)$ 이고 $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ 로 정의하면 S_n 은 n 번의 시행 후의 누적 상금이 된다. (i, j) 의 요소가 $P(i, j)w(i, j)$ 인 행렬을 $\dot{\mathbf{P}}$ 라고 하고, 열벡터 $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)^T$ 라고 두면,

$$\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{1}$$

은 임의의 초기상태 X_0 에 대해

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \boldsymbol{\mu} \text{ a.s.}$$

을 만족한다.

공간의존 파론도 게임의 확률모형은 N 명의 게임자들의 각 상태를 패 혹은 승 즉, 0 또는 1로 나타내고 다음 시행에서 게임을 진행할 게임자를 포함하여 함께 나타내면, 상태공간

$$\Sigma := \{(\mathbf{x}, i) : \mathbf{x} \in \{0, 1\}^N, i \in \{1, 2, \dots, N\}\}$$

에서 정의되는 마코프 체인이 된다. 단, $\{0, 1\}^N := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) : x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, N\}$ 이다. $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 에 대해

$$m_i(\mathbf{x}) := 2x_{i-1} + x_{i+1}$$

라 두면, $m_i(\mathbf{x})$ 는 게임자 $i-1$ 의 상태 x_{i-1} 와 게임자 $i+1$ 의 상태 x_{i+1} 에 의해 $\{0, 1, 2, 3\}$ 의 정수값 중 하나를 갖게 된다. N 명의 게임자들이 원으로 둘러앉기 때문에 $x_0 := x_N$ 이고 $x_{N+1} := x_1$ 이다. 따라서 게임 B 의 1단계 전이확률행렬 \mathbf{P}_B^* 은, 전체 게임자들의 수 N 뿐만 아니라 모수 p_0, p_1, p_2, p_3 에도 의존하여, 다음과 같이 나타낼 수 있다 (Ethier와 Lee, 2012). 모든 $(\mathbf{x}, i) \in \Sigma$ 와 $j = 1, \dots, N$ 에 대해

$$P_B^*((\mathbf{x}, i), (\mathbf{x}^i, j)) = \begin{cases} N^{-1}p_{m_i(\mathbf{x})} & \text{만약 } x_i = 0 \text{이면,} \\ N^{-1}q_{m_i(\mathbf{x})} & \text{만약 } x_i = 1 \text{이면,} \end{cases}$$

$$P_B^*((\mathbf{x}, i), (\mathbf{x}, j)) = \begin{cases} N^{-1}q_{m_i(\mathbf{x})} & \text{만약 } x_i = 0 \text{이면,} \\ N^{-1}p_{m_i(\mathbf{x})} & \text{만약 } x_i = 1 \text{이면,} \end{cases}$$

그 외의 경우에는 $P_B^*((\mathbf{x}, i), (\mathbf{y}, j)) = 0$ 이다. 여기서 벡터 \mathbf{x}^i 는 벡터 $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 와 나머지는 모두 동일하고 i 번째 요소 x_i 의 값만 차이가 나는 것으로서 $\mathbf{x}^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$ 이다. 그리고 $q_m := 1 - p_m$, $m = 0, 1, 2, 3$ 이다. 게임 B 의 상금행렬 $\mathbf{W}_B = (w_B(\mathbf{x}, i), (\mathbf{y}, j))$ 는 모든 $(\mathbf{x}, i) \in \Sigma$ 와 $j = 1, \dots, N$ 에 대해

$$w_B((\mathbf{x}, i), (\mathbf{x}^i, j)) = \begin{cases} +1 & \text{만약 } x_i = 0 \text{이면,} \\ -1 & \text{만약 } x_i = 1 \text{이면,} \end{cases}$$

$$w_B((\mathbf{x}, i), (\mathbf{x}, j)) = \begin{cases} -1 & \text{만약 } x_i = 0 \text{이면,} \\ +1 & \text{만약 } x_i = 1 \text{이면,} \end{cases}$$

그 외의 경우에는 $w_B((\mathbf{x}, i), (\mathbf{y}, j)) = 0$ 이다. 만약 모든 $m = 0, 1, 2, 3$ 에 대해 $0 < p_m < 1$ 이면 이 마코프 체인은 분할불가이고 비주기적이므로 유일한 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}_B^*$ 가 존재한다.

따라서 게임 B 의 시행당 N 명 전체의 점근적인 기대상금 μ_B 는 정리 2.1에 의해

$$\begin{aligned} \mu_B &= \boldsymbol{\pi}_B^* \dot{\mathbf{P}}_B^* \mathbf{1} \\ &= \sum_{(\mathbf{x}, i) \in \Sigma} \pi_B^*(\mathbf{x}, i) \sum_{j=1}^N N^{-1} [p_{m_j(\mathbf{x})} - q_{m_j(\mathbf{x})}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

으로 계산된다. 여기서 $\dot{\mathbf{P}}_B^*$ 는 각 요소가 $\dot{P}_B^*((\mathbf{x}, i), (\mathbf{y}, j)) := P_B^*((\mathbf{x}, i), (\mathbf{y}, j))w_B((\mathbf{x}, i), (\mathbf{y}, j))$ 인 행렬로서 \mathbf{P}_B^* 의 각 요소에 있는 q_m , $m = 0, 1, 2, 3$ 대신에 $-q_m$ 을 대입하여 얻은 행렬과 일치한다.

한편 공간의존 파론도 게임을 N 명의 게임자들의 상태 $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 만으로 나타내면, 모든 $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N$ 와 $i = 1, \dots, N$ 에 대해

$$\begin{aligned} P_B(\mathbf{x}, \mathbf{x}^i) &= \begin{cases} N^{-1}p_{m_i(\mathbf{x})} & \text{만약 } x_i = 0 \text{이면,} \\ N^{-1}q_{m_i(\mathbf{x})} & \text{만약 } x_i = 1 \text{이면,} \end{cases} \\ P_B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= N^{-1} \left[\sum_{i:x_i=0} q_{m_i(\mathbf{x})} + \sum_{i:x_i=1} p_{m_i(\mathbf{x})} \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

그 외의 경우에는 $P_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 인 전이확률행렬 \mathbf{P}_B 를 갖는 마코프 체인이 된다. 상태공간이 $\{0, 1\}^N$ 인 이 마코프 체인도 분할불가이고 비주기적이므로 유일한 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}_B$ 가 존재하고, 모든 $i = 1, 2, \dots, N$ 에 대해

$$\pi_B^*(\mathbf{x}, i) = \pi_B(\mathbf{x}) \frac{1}{N}$$

이 성립한다 (Ethier와 Lee, 2012). 따라서 (2.2)의 기대상금 μ_B 는

$$\begin{aligned} \mu_B &= \sum_{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N} \pi_B(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^N N^{-1} [p_{m_j(\mathbf{x})} - q_{m_j(\mathbf{x})}] \\ &= \boldsymbol{\pi}_B \dot{\mathbf{P}}_B \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

으로 계산된다. 여기서 $\mathbf{1}$ 는 크기가 2^N 인 열벡터 $(1, 1, \dots, 1)^T$ 이고, $\dot{\mathbf{P}}_B$ 는 \mathbf{P}_B 의 각 요소에 있는 q_m , $m = 0, 1, 2, 3$ 대신에 $-q_m$ 을 대입하여 얻은 행렬이다.

게임 A 에 대한 마코프 체인의 1단계 전이확률행렬 \mathbf{P}_A 는 $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 := p$ 인 게임 B 의 전이확률행렬 \mathbf{P}_B 과 동일하다.

한편 이 확률모형은 게임자들의 위치가 시계방향으로 회전을 하여도 그 전이확률이 변하지 않는 특성을 가진다. 그러므로 다음의 정리를 적용하면 기존의 마코프 체인의 상태 공간을 축소하여 더 간단하게 기대상금을 계산할 수 있다.

정리 2.2 (Ethier와 Lee, 2012) G 를 대칭군 (symmetric group)의 부분집합이라 하고, $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_N) \in \{0, 1\}^N$ 와 $\sigma \in G$ 에 대해서 $\mathbf{x}_\sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \in G$ 라고 하자. 1단계 전이확률행렬 \mathbf{P} 과 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}$ 를 갖는 마코프 체인이 모든 $\sigma \in G$ 와 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ 에 대해

$$P(\mathbf{x}_\sigma, \mathbf{y}_\sigma) = P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

이면

$$\pi(\mathbf{x}_\sigma) = \pi(\mathbf{x})$$

이 성립한다. $\mathbf{y} = \mathbf{x}_\sigma$ 가 되는 $\sigma \in G$ 가 존재하면, \mathbf{x} 와 \mathbf{y} 는 동치 (equivalent)가 되고 $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ 로 나타내며 \mathbf{x} 를 포함하는 동치류 (equivalence class)는 $[\mathbf{x}]$ 로 표현한다. 그러면 동치류들의 공간 $\{0, 1\}^N / \sim$ 에서 정의되는 마코프 체인의 1단계 전이확률행렬은

$$\bar{P}([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) := \sum_{\mathbf{y}': \mathbf{y}' \sim \mathbf{y}} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}') = \sum_{\sigma \in G: \mathbf{y}_\sigma \text{ distinct}} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}_\sigma)$$

이며, \bar{P} 의 정상확률분포 $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ 가 존재하여 $\pi(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\pi}}([\mathbf{x}]) / |\mathbf{x}|$ 를 만족한다. 단, $|\mathbf{x}|$ 는 동치류 $[\mathbf{x}]$ 의 크기이다.

게임 B 의 전이확률 (2.3)은 G 가 $(1, 2, \dots, N)$ 의 순환치환 (cyclic permutations)의 집합일 때 정리 2.2를 적용할 수 있다 (Ethier와 Lee, 2012). 따라서 (2.4)의 기대상금 μ_B 는

$$\begin{aligned} \mu_B &= \sum_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^N} \pi_B(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^N N^{-1} [p_{m_j(\mathbf{x})} - q_{m_j(\mathbf{x})}] \\ &= \sum_{[\mathbf{x}] \in \{0,1\}^N / \sim} \sum_{\mathbf{x}' : \mathbf{x}' \sim \mathbf{x}} \pi_B(\mathbf{x}') \sum_{j=1}^N N^{-1} [p_{m_j(\mathbf{x}')} - q_{m_j(\mathbf{x}')}] \\ &= \sum_{[\mathbf{x}] \in \{0,1\}^N / \sim} \sum_{\mathbf{x}' : \mathbf{x}' \sim \mathbf{x}} \bar{\pi}_B(\mathbf{x}') / |[\mathbf{x}']| \sum_{j=1}^N N^{-1} [p_{m_j(\mathbf{x}')}] - q_{m_j(\mathbf{x}')}] \\ &= \sum_{[\mathbf{x}] \in \{0,1\}^N / \sim} \bar{\pi}_B([\mathbf{x}]) \sum_{j=1}^N N^{-1} [p_{m_j([\mathbf{x}])} - q_{m_j([\mathbf{x}])}] \\ &= \bar{\pi}_B \dot{\mathbf{P}}_B \bar{\mathbf{1}} \end{aligned}$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 $\dot{\mathbf{P}}_B$ 는 $\bar{\mathbf{P}}_B$ 의 각 요소에 있는 q_m , $m = 0, 1, 2, 3$ 대신에 $-q_m$ 을 대입하여 얻는 행렬로서 $\dot{\mathbf{P}}_B = \bar{\mathbf{P}}_B$ 이며 $\bar{\mathbf{1}}$ 는 $\{0, 1\}^N / \sim$ 에서 정의되는 열벡터 $(1, 1, \dots, 1)^T$ 이다.

만약 $N = 3$ 이면, 상태공간 $\{0, 1\}^3 := \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ 의 8개의 상태가 존재하고, 공간의존 파론도 게임 A 와 B 의 1단계 전이확률행렬은 각각

$$\mathbf{P}_A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3q & p & p & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ q & p+2q & 0 & p & 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p+2q & p & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & q & q & 2p+q & 0 & 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 & 0 & p+2q & p & p & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & q & 2p+q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 & q & 0 & 2p+q & p \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & q & q & 3p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3q_0 & p_0 & p_0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ q_0 & p_0 + q_1 + q_2 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ q_0 & 0 & p_0 + q_1 + q_2 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & q_1 & q_2 & p_1 + p_2 + q_3 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\ q_0 & 0 & 0 & 0 & p_0 + q_1 + q_2 & p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & q_1 & p_1 + p_2 + q_3 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & q_1 & 0 & q_2 & 0 & p_1 + p_2 + q_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 & q_3 & q_3 & 3p_3 \end{pmatrix}$$

이 된다. $0 < p < 1$ 이고 $0 < p_m < 1$, $m = 0, 1, 2, 3$ 이므로 이 마코프 체인들은 분할불가이고 비주기적이다. 한편, 이 마코프 체인들은 위의 정리 2.2에 의해 상태공간을 동치류들의 공간으로 축소시킬 수 있다. 즉, 기존의 8개의 상태로 구성된 상태공간을 4개의 동치류

$$\bar{0} = \{000\}, \quad \bar{1} = \{001, 010, 100\}, \quad \bar{2} = \{011, 101, 110\}, \quad \bar{3} = \{111\}$$

으로 나타낼 수 있다. 그러므로 $\{0, 1\}^3 / \sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ 에서 정의되는

$$\bar{P}_A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3q & 3p & 0 & 0 \\ q & p+2q & 2p & 0 \\ 0 & 2q & 2p+q & p \\ 0 & 0 & 3q & 3p \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\bar{P}_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3q_0 & 3p_0 & 0 & 0 \\ q_0 & p_0+q_1+q_2 & p_1+p_2 & 0 \\ 0 & q_1+q_2 & p_1+p_2+q_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 3q_3 & 3p_3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

로 1단계 전이확률행렬을 축소할 수 있다. 그러면 게임 A 의 축소된 정상확률분포 $\bar{\pi}_A$ 는

$$\bar{\pi}_A = (q^3, 3pq^2, 3p^2q, p^3)$$

가 되어 시행당 전체 게임자들의 기대상금 μ_A 는

$$\begin{aligned} \mu_A &= \bar{\pi}_A \dot{P}_A \bar{1} \\ &= 2p - 1 \end{aligned}$$

로 얻어진다. 한편, 게임 B 의 축소된 정상확률분포 $\bar{\pi}_B$ 는

$$\bar{\pi}_B = \frac{1}{p_0(p_1+p_2) + 4p_0q_3 + q_3(q_1+q_2)} (q_0q_3(q_1+q_2), 3p_0q_3(q_1+q_2), 3p_0q_3(p_1+p_2), p_0p_3(p_1+p_2))$$

로 계산되어 게임 B 의 시행당 전체 게임자들의 기대상금 μ_B 는

$$\begin{aligned} \mu_B &= \bar{\pi}_B \dot{P}_B \bar{1} \\ &= \frac{p_0(p_1+p_2) - q_3(q_1+q_2)}{p_0(p_1+p_2) + 4p_0q_3 + q_3(q_1+q_2)} \end{aligned}$$

로 얻어진다. 여기서 만약 $p_1 = p_2$ 이면, $N = 3$ 일 때의 공간의존 파론도 게임 B 의 시행당 기대상금 μ_B 은 1명의 게임자에 의해 동일한 확률값 p_0, p_1, p_2, p_3 로 진행되는 과거의존 파론도 게임 B 의 시행당 기대상금 (Cho와 Lee, 2012)과 일치한다.

두 게임 A 와 B 의 임의적 혼합게임 $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ 의 축소된 전이확률행렬 \bar{P}_C 은 $\frac{1}{2}\bar{P}_A + \frac{1}{2}\bar{P}_B$ 로써, \bar{P}_B 의 각 요소의 p_m 대신에 $p/2 + p_m/2$, $m = 0, 1, 2, 3$ 를 대입하면 얻을 수 있다. 그리고 게임 C 의 축소된 정상확률분포 $\bar{\pi}_C$ 는 $\frac{1}{2}\bar{\pi}_A + \frac{1}{2}\bar{\pi}_B$ 가 되므로 혼합게임 C 의 시행당 전체 게임자들의 기대상금 μ_C 는

$$\begin{aligned} \mu_C &= \bar{\pi}_C \dot{P}_C \bar{1} \\ &= \frac{(p+p_0)(2p+p_1+p_2) - (q+q_3)(2q+q_1+q_2)}{(p+p_0)(2p+p_1+p_2) + 4(p+p_0)(q+q_3) + (q+q_3)(2q+q_1+q_2)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

가 된다.

2.2. 일반 상금행렬의 공간의존 파론도 게임

2.1절의 공간의존 파론도 게임은 매 시행의 결과에 따른 상금이 모두 동일하게 +1원 또는 -1원인 경우만 고려하였다. 이 모형을 주식에 적용하기 위해서는 상금행렬의 금액을 일반화시킬 필요가 있다. 게임 A 의 경우, 각 시행에서 이기면 u 원을 얻고, 지면 d 원을 잃는다고 하자. 단, $u, d > 0$ 이다. 게임 B 의 경우, 구성하는 각 동전에 따라 이기는 경우는 각각 $u_0, u_1, u_2, u_3 > 0$ 원을 얻고, 질 때는 각각 $d_0, d_1, d_2, d_3 > 0$ 원을 잃는다고 하자. 예를 들어 상태 0의 경우, 즉 주변 게임자들의 시행 결과가 패-패인 경우에는 앞면이 나올 확률이 p_0 인 동전을 던지고 그 동전에서 앞면이 나오면 u_0 원을 얻어 승의 상태가 되고, 뒷면이 나오면 d_0 원을 잃어 패의 상태가 된다. 나머지 상태 1, 2, 3의 경우에도 유사하게 진행된다. 그러면 게임 B 의 상금행렬 $\mathbf{W}_B = (w_B((\mathbf{x}, i), (\mathbf{y}, j)))$ 은 $(\mathbf{x}, i) \in \Sigma$ 와 $m = 0, 1, 2, 3$ 에 대해

$$w_B((\mathbf{x}, i), (\mathbf{x}^i, j)) = \begin{cases} +u_m & \text{만약 } x_i = 0, m_i(\mathbf{x}) = m \text{이면,} \\ -d_m & \text{만약 } x_i = 1, m_i(\mathbf{x}) = m \text{이면,} \end{cases}$$

$$w_B((\mathbf{x}, i), (\mathbf{x}, j)) = \begin{cases} -d_m & \text{만약 } x_i = 0, m_i(\mathbf{x}) = m \text{이면,} \\ +u_m & \text{만약 } x_i = 1, m_i(\mathbf{x}) = m \text{이면,} \end{cases}$$

이고 그 외의 경우는 $w_B((\mathbf{x}, i), (\mathbf{y}, j)) = 0$ 이다. 게임 A 의 상금행렬 \mathbf{W}_A 은 $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 := u$ 이고 $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 := d$ 인 상금행렬 \mathbf{W}_B 와 일치한다. 따라서 축소된 마코프 체인의 $\dot{\mathbf{P}}_A$ 는 (2.5)의 $\bar{\mathbf{P}}_A$ 에서 p 대신에 up 를, q 대신에 $-dq$ 를 대입하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{P}}_A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3dq & 3up & 0 & 0 \\ -dq & up - 2dq & 2up & 0 \\ 0 & -2dq & 2up - dq & up \\ 0 & 0 & -3dq & 3up \end{pmatrix}.$$

게임 B 도 (2.6)의 $\bar{\mathbf{P}}_B$ 에서 $p_m, m = 0, 1, 2, 3$ 대신에 $u_m p_m$ 를, $q_m, m = 0, 1, 2, 3$ 대신에 $-d_m q_m$ 를 대입하여

$$\dot{\mathbf{P}}_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3d_0q_0 & 3u_0p_0 & 0 & 0 \\ -d_0q_0 & u_0p_0 - d_1q_1 - d_2q_2 & u_1p_1 + u_2p_2 & 0 \\ 0 & -d_1q_1 - d_2q_2 & u_1p_1 + u_2p_2 - d_3q_3 & u_3p_3 \\ 0 & 0 & -3d_3q_3 & 3u_3p_3 \end{pmatrix}$$

로 얻을 수 있다. 따라서 게임 A 와 B 의 시행당 기대상금은

$$\begin{aligned} \mu_A &= \bar{\pi}_A \dot{\mathbf{P}}_A \bar{\mathbf{1}} \\ &= up - dq \end{aligned} \quad (2.8)$$

과

$$\begin{aligned} \mu_B &= \bar{\pi}_B \dot{\mathbf{P}}_B \bar{\mathbf{1}} \\ &= \{p_0[u_0q_3(q_1 + q_2) + 2q_3(u_1p_1 + u_2p_2) + u_3p_3(p_1 + p_2) - 2q_3(d_1q_1 + d_2q_2) \\ &\quad - d_3q_3(p_1 + p_2)] - d_0q_0q_3(q_1 + q_2)\} / [p_0(p_1 + p_2) + 4p_0p_3 + q_3(q_1 + q_2)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

로 계산된다.

한편, 두 게임 A 와 B 의 임의적 혼합게임 $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ 의 축소된 전이확률행렬 $\dot{\bar{P}}_C$ 는 $\bar{P}_C = \frac{1}{2}\bar{P}_A + \frac{1}{2}\bar{P}_B$ 에서

$$\dot{\bar{P}}_C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3dq - 3d_0q_0 & 3up + 3u_0p_0 & 0 & 0 \\ -dq - d_0q_0 & up - 2dq + u_0p_0 - d_1q_1 - d_2q_2 & 2up + u_1p_1 + u_2p_2 & 0 \\ 0 & -2dq - d_1q_1 - d_2q_2 & 2up - dq + u_1p_1 + u_2p_2 - d_3q_3 & up + u_3p_3 \\ 0 & 0 & -3dq - 3d_3q_3 & 3up + 3u_3p_3 \end{pmatrix}$$

를 얻고, 따라서 시행당 기대상금 μ_C 는

$$\begin{aligned} \mu_C &= \bar{\pi}_C \dot{\bar{P}}_C \bar{1} \\ &= -\{4(d_1 + d_2)(p + p_0) - 2p(p + p_0)(d_1 + d_2 - d_3) - p_1(p + p_0)(4d_1 - d_3 - 2d_1p) \\ &\quad - p_2(p + p_0)(4d_2 - d_3 - 2d_2p) - 2p_3(p + p_0)(d_1 + d_2 + d_3p) + p_1p_3(2d_1p - d_3p + 2d_1p_0 \\ &\quad - d_3p_0) + p_2p_3(2d_2p - d_3p + 2d_2p_0 - d_3p_0) + d_0q_0(q + q_3)(2q + q_1 + q_2) + dq[6 + 2q_2 \\ &\quad + 2pp_2 + p_0(2 + 2q + p_1 + p_2 + 4q_3) - 4p_3 - 2pp_3 + p_2p_3 + p_1(p_3 - 2q)] - 2up[4 + p_0(4 - p)] \\ &\quad + up(p_1 + p_2)(2q - p_0) + upp_3(2 + 2p + 4p_0 + q_1 + q_2) - 8u_0p_0 + 2u_0pp_0(4 - p) + u_0p_0p_3(2q \\ &\quad + q_1 + q_2) + (u_0p_0p_1 + u_0p_0p_2 - 2u_1pp_1 - 2u_1p_0p_1 - 2u_2pp_2 - 2u_2p_0p_2)(2 - p) + (2u_1p_1p_3 \\ &\quad + 2u_2p_2p_3 - 2u_3pp_3 - u_3p_1p_3 - u_3p_2p_3)(p + p_0)\} / \{2[6 + 2q_2 + 2pp_2 + p_0(2 + 2q + p_1 + p_2 \\ &\quad + 4q_3) - 4p_3 - 2pp_3 + p_2p_3 + p_1(p_3 - 2q)]\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

로 얻어진다.

식 (2.8), (2.9)와 (2.10)에서 게임 A 와 게임 B 의 시행당 기대상금 μ_A 와 μ_B 는 음수인데 반하여 게임 C 의 시행당 기대상금 μ_C 가 양수이면 해당 모수에서 파론도 효과가 존재하고, 역으로 게임 A 와 게임 B 의 시행당 기대상금은 양수이지만 게임 C 에서의 시행당 기대상금이 음수이면 역 파론도 효과가 존재하게 된다.

3. 주식투자

본 절에서는 2절의 공간의존 파론도 게임을 주식 투자에 적용하여 파론도 효과와 역 파론도 효과가 존재하는지 확인하고자 한다. Figure 3.1은 파론도 효과의 존재를 확인하는 분석 절차를 나타낸 것이다. 역 파론도 효과의 존재도 유사하게 확인할 수 있으며 Figure 3.1에 있는 부등호의 방향만 바꾸면 된다.

2008년부터 2010년까지 3년간 한국거래소의 유가증권 시장에 상장된 900여개 종목의 매일의 증가 데이터를 이용하여 전날과의 증가와 비교하여 전날에 비해 다음 날의 증가가 상승했다면 게임에서의 승에 해당되는 것이고, 전날에 비해 하락했다면 게임에서의 패에 대응된다. 증가의 변동이 없는 날은 2절의 마코프 체인 모형들을 적용하기 위해 본 분석에서 제외한다. 3년간 900개의 종목들 중 증가의 변동이 없는 날을 제외하고, 증가가 상승 혹은 하락한 날이 3년간의 전체 거래일 755일 중 적어도 700일 이상인 종목 279개만 분석에 이용하였다. 매일의 증가를 비교하여 증가의 총 변화일 중에서

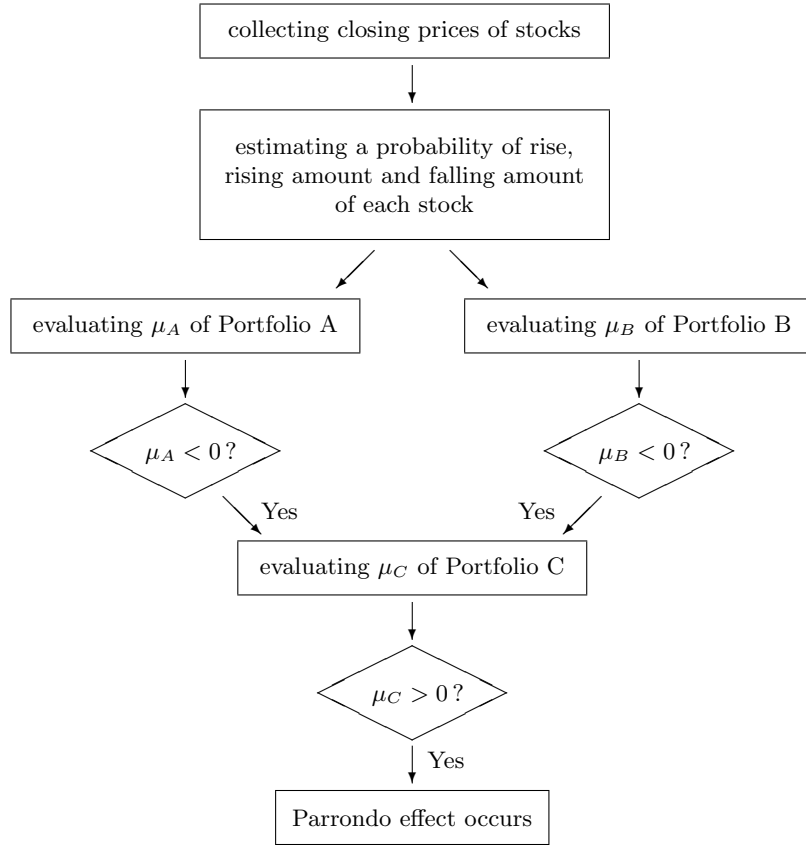


Figure 3.1 A checking process for Parrondo effects

상승한 날과 하락한 날의 수를 구하여, 279개의 각 종목에 대해

$$\hat{p} = \frac{\text{종가가 상승한 날의 수}}{\text{종가 변화일의 수}} \quad (3.1)$$

로 상승확률 p 를 추정한다.

$$\hat{u} = \frac{\text{종가 상승 폭의 합}}{\text{종가가 상승한 날의 수}} \quad (3.2)$$

$$\hat{d} = \frac{\text{종가 하락 폭의 합}}{\text{종가가 하락한 날의 수}} \quad (3.3)$$

로 평균 상승금액과 평균 하락금액을 구하여 상승금액 u 와 하락금액 d 의 추정값으로 사용한다 (Cho와 Lee, 2012).

$N = 3$ 개의 주식 계좌를 가지고 주식 투자를 하는 한 투자자가 공간의존 파론도 게임의 규칙으로 투자 종목을 선택한다고 하자. 게임 A 에 대응되는 포트폴리오 A 는 한 개의 주식 종목으로 구성되어 있고 거래 비용을 따로 고려하지 않기 때문에 동일한 주식을 사고 파는 것은 결국 계속 보유하는

것을 의미한다. 게임 B 에 해당되는 포트폴리오 B 는 4개의 주식 종목으로 구성되어 임의로 선택된 계좌의 양옆 다른 계좌들의 최근 투자 결과 (상승 혹은 하락)에 따라 4개의 종목 중 어느 것을 매수할 것인지를 결정한다.

Table 3.1 Percentage of Parrondo paradox

Portfolio	A	B	C	Percentage
$\mu_A < 0$ and $\mu_B < 0$	152	2,983,881,130	$\mu_C < 0$	445,342,937,023
			$\mu_C > 0$	56,845,937
			Total	445,399,782,960
$\mu_A > 0$ and $\mu_B > 0$	127	2,945,888,894	$\mu_C < 0$	58,245,169
			$\mu_C > 0$	367,058,162,841
			Total	367,116,408,010
Total	279	5,929,770,024		

279개의 종목 각각이 포트폴리오 A 를 구성할 때, 각 종목의 (3.1), (3.2)와 (3.3)의 값으로부터 계산되는 (2.8)의 거래당 전체 계좌들의 기대수익금 μ_A 가 음수인 종목은 Table 3.1에서 보듯이 152개로 얻어졌고, μ_A 가 양수인 종목은 127개로 나타났다. 포트폴리오 B 의 가능한 경우는 전체 279개 종목에서 서로 다른 4개의 종목으로 구성할 수 있는 5,929,770,024개가 존재하는데, 포트폴리오 B 의 거래당 기대수익금 μ_B 가 0보다 작은 경우는 2,983,881,130개이고, μ_B 가 0보다 큰 경우는 2,945,888,894개로 나타났다.

파론도 효과는 거래당 기대수익금이 음수인 포트폴리오 A 의 152개의 경우와 포트폴리오 B 의 2,983,881,130개의 경우에 동일한 확률로 두 포트폴리오를 결합한 혼합 포트폴리오 $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ 의 거래당 기대수익금 μ_C 가 양수가 되는 경우로서, Table 3.1과 같이 전체 조합의 약 0.0128%로 나타났다. 여기서 포트폴리오 A 의 종목 1개와 포트폴리오 B 의 종목 4개는 모두 다른 종목으로 구성하였다. 역 파론도 효과는 포트폴리오 A 와 포트폴리오 B 가 평균적으로 양의 수익을 얻는 경우에서 발생한다. $\mu_A > 0$ 인 127개와 $\mu_B > 0$ 인 2,945,888,894개로 구성할 수 있는 경우에 대해 혼합 포트폴리오 $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ 의 거래당 기대수익금 μ_C 가 0보다 작은 경우로 약 0.0159%로 얻어졌다. 즉, 양의 수익을 얻는 포트폴리오 A 와 포트폴리오 B 를 동일한 확률로 혼합하여 투자했을 때 손실이 발생하는 경우가 전체의 0.0159%로 나타났다. 이 결과를 Table 3.1에 정리하였다.

각 경우에 해당되는 실제 주식 종목들을 구체적으로 살펴보자. 파론도 효과의 경우, 포트폴리오 A 에 해당되는 다이아와 포트폴리오 B 에 해당되는 KCC, IB스포츠, 효성ITX, 태광산업의 각 모수 추정값을 Table 3.2에 나타내었다.

Table 3.2 Parrondo effect

Portfolio	Stock	Probability of rise	Rising amount	Falling amount	Expected profit
A	DI	0.4986	34.7734	35.8028	-0.61
	KCC	0.4722	8014.7059	7584.2105	
B	IB Sports	0.4534	83.6604	80.6589	-5.39
	Hyosung ITX	0.4426	180.8703	158.5553	
	Taekwang Industrial	0.4874	18855.9078	17375.3425	
C	$A/2+B/2$				+1.37

역 파론도 효과를 가지는 포트폴리오 A 와 포트폴리오 B 의 종목들로는 금호타이어, CJ제일제당, S&T중공업, 현대건설, 삼성전기를 들 수 있다. 각각의 모수 추정값은 Table 3.3와 같다.

Table 3.3 Reverse Parrondo effect

Portfolio	Stock	Probability of rise	Rising amount	Falling amount	Expected profit
A	Kumhotire	0.4602	213.3951	181.5526	+0.21
	CJ Cheiljedang	0.4816	4438.2353	4323.7705	
B	S&T Dynamics	0.5227	308.4824	305.2819	+1.85
	Hyundai E&C	0.5152	1486.8633	1641.8803	
	Samsung E&M	0.5441	1604.4987	1672.2393	
C	A/2+B/2				-2.15

Table 3.2과 Table 3.3에서 보듯이 비록 거래당 기대수익금의 크기는 종목의 주가에 비해 매우 작지만 음의 기대수익금의 두 포트폴리오를 혼합하여 양의 기대수익금이 되거나 양의 기대수익금의 두 포트폴리오를 혼합하여 음의 기대수익금이 얻어지는 역설적인 현상이 주식투자에서 실제로 존재할 수 있음을 확인한 것에 의미가 있다고 하겠다. 거래당 기대수익금이 음의 값을 가지면 거래가 계속 될 수록 누적되는 기대수익금은 점점 감소하여 $-\infty$ 에 가까워지고, 거래당 기대수익금이 양의 값을 가지면 거래가 계속될 수록 누적 기대수익금은 $+\infty$ 에 수렴하여 오랜 시간 진행되었을 때의 누적 기대수익금은 충분히 크거나 작을 수 있기 때문이다.

4. 결론

본 연구는 공간의존 파론도 게임에 의한 파론도 역설 현상이 주식 투자에도 존재하는지 알아보고자 하였다. 매일의 종가를 기준으로 주식을 사고 팔며 주변의 투자 거래 결과에 의해 매수 종목을 결정하는 공간의존 파론도 게임의 규칙을 적용한다. 투자자가 관리하는 주식 계좌가 모두 3개이고 각 주식 종목의 상승확률, 하락확률, 상승금액과 하락금액이 주어질 때, 각 포트폴리오에 대한 거래당 전체 계좌들의 기대수익금을 유도하였다. 기대수익금의 식으로부터 손실을 볼 것으로 기대되는 포트폴리오의 혼합으로 오히려 이익을 보는 파론도 효과와 이익을 볼 것으로 기대되는 포트폴리오의 혼합으로 손실을 보는 역 파론도 효과가 존재하는 모수들의 범위를 정하고, 2008년부터 2010년까지의 3년간의 한국거래소의 주식 데이터를 이용하여 주식 투자에서 파론도 역설 현상이 작은 비중이지만 실제로 존재함을 확인하였다.

참고문헌

- Cho, D. and Lee, J. (2012). Parrondo paradox and stock investment. *Korean Journal of Applied Statistics*, **25** (to appear).
- Di Crescenzo, A. (2007). A Parrondo paradox in reliability theory. *Mathematical Scientist*, **32**, 17–22.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2009). Limit theorems for Parrondo's paradox. *Electronic Journal of Probability*, **14**, 1827–1862.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2012). Parrondo games with spatial dependence. *Fluctuation and Noise Letters*, **11**, 1250004.
- Harmer, G. P. and Abbott, D. (1999). Parrondo's paradox. *Statistical Sciences*, **14**, 206–213.
- Harmer, G. P. and Abbott, D. (2002). A review of Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, **2**, R71–R107.
- Iyengar, R. and Kohli, R. (2004). Why Parrondo's paradox is irrelevant for utility theory, stock buying, and the emergence of life. *Essays & Commentaries*, **20**, 595–601.
- Kim, G. W. and Lee, S. C. (2011). A Random Matrix Theory approach to correlation matrix in Korea Stock Market. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 727–733.

- Kim, K. K., Cho, M. H. and Park, E. S. (2008). Forecasting the volatility of KOSPI 200 using data mining. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **19**, 1305–1325.
- Kim, M. S. and Oh, K. J. (2011). Using rough set to support arbitrage box spread strategies in KOSPI 200 option markets. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 37–47.
- Lee, J. (2009). Optimal strategies for collective Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 973–982.
- Lee, J. (2011). Paradox in collective history-dependent Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 631–641.
- Osipovitch, D. C., Barratt, C. and Schwartz, P. M. (2009). Systems chemistry and Parrondos paradox: Computational models of thermal cycling. *New Journal of Chemistry*, **33**, 2022–2027.
- Paulos, J. A. (2000). Winning at losing games : A new paradox in the world of probability. ABC News, <http://abcnews.go.com/Technology/WhosCounting/story?id=144000\&page=1>.
- Parrondo, J. M. R. (1996). How to cheat a bad mathematician? In *the Workshop of the EEC HC&M Network on Complexity and Chaos*, ISI, Torino, Italy. Unpublished.
- Parrondo, J. M. R., Harmer, G. P. and Abbott, D. (2000). New paradoxical games based on Brownian ratchets. *Physical Review Letters*, **85**, 5226–5229.
- Reed, F. (2007). Two-locus epistasis with sexually antagonistic selection: A genetic Parrondo's paradox. *Genetics*, **176**, 1923–1929.
- Stjernberg, F. (2007). Parrondo's paradox and epistemology - When bad things happen to good cognizers (and conversely). In *Hommage à Wlodek. Philosophical Papers Dedicated to Wlodek Rabinowicz*, edited by Rønnow-Rasmussen, T., Petersson, B., Josefsson, J., and Egonsson, D., <http://www.fil.lu.se/hommageawlodek>.
- Stutzer, M. (2010). A simple Parrondo paradox. *The Mathematical Scientist*, **35**.
- Toral, R. (2001). Cooperative Parrondo's games. *Fluctuation and Noise Letters*, **1**, 7–12.

Spatially dependent Parrondo games and stock investments[†]

Dongseob Cho¹ · Jiyeon Lee²

^{1,2}Department of Statistics, Yeungnam University

Received 27 July 2012, revised 20 August 2012, accepted 25 August 2012

Abstract

Parrondo paradox is the counter-intuitive situation where individually losing games can combine to win or individually winning games can combine to lose. In this paper, we derive the expected profit per trade for each portfolio when we trade stocks everyday under the spatially dependent Parrondo game rule. Using stock data of KRX (Korea Exchange) from 2008 to 2010, we show that Parrondo paradox exists in the stock trading.

Keywords: Markov chains, Parrondo effect, Parrondo paradox, reverse Parrondo effect, spatially dependent Parrondo games, stationary distribution, stock data.

[†] This work was supported by the Basic Science Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (No. 2012-0004434).

¹ Graduate student, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 712-749, Korea.

² Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 712-749, Korea. E-mail: leeje@yu.ac.kr