

뉴턴유체와 전단희석유체의 액적분사 거동에 대한 수치해석적 연구

김은정, 백제현*

포항공과대학교 기계공학과

NUMERICAL STUDY OF THE DROPLET EJECTION BEHAVIOR OF NEWTONIAN AND SHEAR-THINNING FLUIDS

E. Kim and J. Baek*

Dept. of Mechanical Engineering, POSTECH.

The droplet ejection behavior from drop-on-demand printhead are investigated numerically for Newtonian and shear-thinning fluid. The numerical simulation is performed using a volume-of-fluid model. In this study, we compare the printable range in terms of Z number and pinch-off time for Newtonian and shear-thinning fluids. The printability range are found to be $1.08 \leq Z \leq 12.9$ for Newtonian fluid and $0.8 \leq Z \leq 12.9$ for shear-thinning fluid. However, air entrainment is observed during merging of primary and satellite droplet within the printability range. The pinch-off time of the shear-thinning fluid is apparently shorter compared to the corresponding Newtonian fluid due to shear-thinning effects and the differences in the pinch-off time is enlarged significantly when the capillary number is larger than 0.5.

Key Words : 전산유체역학(CFD), 잉크젯프린팅(inkjet printing), 액적분사(droplet ejection), 단일분사(drop-on-demand), 뉴턴유체(Newtonian fluid), 전단희석유체(shear-thinning fluid)

1. 서 론

잉크젯 프린팅 기술은 노즐로부터 미세한 잉크액적을 분사시켜서 비접촉식으로 원하는 위치에 패터닝 하는 기술이다. 최근에는 생산공정의 단순화와 공정비용의 절감 목적에서 잉크젯 프린팅 기술을 산업분야에 적용하여 다양한 기능성 잉크소재를 이용해 플렉시블 디스플레이, RFID, 미세회로, LCD 컬러필터 등을 제작하고 있다. 잉크젯 기술의 활용폭을 넓히기 위해서는 다양한 기능성 잉크소재에 대응할 수 있도록 뉴턴유체뿐만 아니라 비뉴턴 유체에 대해서도 액적분사 거동에 대한 이해가 필요하다.

잉크젯 기술은 노즐의 구동방식에 따라서 연속방식(continuous jet)과 단일분사(drop-on-demand)방식으로 나뉘어진다.

다. 연속분사 방식에서는 고압으로 분사된 체트가 Rayleigh instability에 의해서 연속적인 액적 스트림을 형성하고, 분사된 잉크액적을 대전시켜서 전기장 제어를 통해서 불필요한 액적은 다시 프린트헤드로 재순환 시킨다. 이 방법은 외부의 액적 재순환 장치가 복잡하고 재순환 과정에서 액적이 오염 될 가능성이 있다. 반면에 단일분사 방식은 구동신호를 이용하여 필요할 때에만 액적을 분사하기 때문에 시스템이 단순하여 일반적으로 많이 사용되고 있다. 본 연구에서는 일반적으로 사용되는 단일분사 방식에 대하여 연구하였다.

단일분사 방식에서의 액적분사에 관하여 많은 연구가 진행되어 왔지만 이전의 연구들은 주로 뉴턴 유체에 국한되었다 [1-6]. 그러나 실제 산업 분야에 사용되는 고분자 용액, 입자현탁액 등 대부분의 유체가 비뉴턴 특성을 지니기 때문에 비뉴턴 유체 액적의 분사 거동에 대해서 이해하는 것이 중요하다. 본 연구에서는 전단속도가 증가할수록 점도가 감소하는 특징(shear-thinning)을 갖는 순수전단희석 유체 (purely shear-thinning fluid)의 액적분사 거동을 뉴턴유체의 거동과 비교하였다.

안정적인 액적분사를 위해서는 잉크가 적정 점도와 표면장

Received: April 23, 2012, Revised: June 24, 2012,

Accepted: June 26, 2012.

* Corresponding author, E-mail: jhbaek@postech.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/ksce.2012.17.3.033>

© KSCFE 2012

력을 갖는 것이 중요하다. 유체의 토출에 반대 작용을 하는 점성과 표면장력 효과를 극복하고 액적을 형성할 수 있어야 하고, 액적 분사 이후에 위성액적이 발생하지 않아야 한다. 이러한 조건을 만족시키는 영역을 printability 영역이라고 하는데 적용한 프린트헤드와 잉크의 종류에 따라서 printability 영역이 조금씩 다르다. 일반적으로 오네사지수(Oh)의 역수인 Z 수 ($Z=(\rho D\sigma)^{1/2}\mu^{-1}$)의 크기로서 printability를 체크한다[7,8]. 뉴튼유체의 경우에 Reis 와 Derby [7]는 printability의 영역이 $1 < Z < 10$ 사이에 있다는 것을 수치해석 방법으로 밝혔다. Z 수가 1 보다 작으면 점성에 의한 에너지 소산 때문에 액적 분사가 어렵고 10 보다 크면 위성액적이 발생한다. Jang 등[8]은 printability 영역이 $4 < Z < 14$ 사이에 있다는 것을 실험적으로 밝혔다. 그러나 아직 비뉴튼 유체의 printability에 대한 연구는 부족한 상황이다. 본 연구에서는 printability 측면에서 전단희석유체와 뉴튼유체의 액적분사 거동의 차이를 고찰하였다.

2. 수치해석 방법

2.1 유변학적 모델

전단희석유체의 유변학적 특성은 power law 모델로서 나타낼 수 있다.

$$\mu = K|\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (1)$$

식 (1)에서 m은 유체의 점도, $\dot{\gamma}$ 은 전단속도를 나타내며 K는 consistency factor, n은 power law index이다. 전단희석 유체의 경우 n의 값이 1보다 작으며 전단속도가 증가 할수록 점도가 감소하는 특성을 나타낸다. n은 전단희석 유체의 점도가 전단속도에 따라 얼마나 민감하게 변하는지를 나타내는 지표로서 n이 작아질수록 전단속도의 증가에 따른 점도의 감소폭이 더욱 크다. 본 연구에서는 n의 값을 0.5로 고정 시켜서 n의 크기에 따른 점도 변화 민감도의 영향을 분석하지 않았다. K의 값이 커질수록 유체의 점도는 증가하는데 본 연구에서는 K값을 조절하여 그 영향을 분석하였다.

2.2 지배 방정식

본 연구에서 액적충돌 거동은 축대칭으로 가정하였으며 비정상, 비압축성, 층류의 이상유동을 Fluent 6.3의 VOF 모델을 사용하여 계산하였다. 질량 및 운동량 보존식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \\ - \nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)] + \rho \vec{g} + \vec{F} \end{aligned} \quad (3)$$

식 (2)와 (3)에서 \hat{v} , p , \hat{g} , μ , \vec{F} 는 각각 속도벡터, 압력, 중력 가속도, 점도, 표면장력을 나타낸다.

VOF 방법 [9]에서 계면의 위치를 계산하기 위하여 다음의 체적비율 전달방정식을 계산한다.

$$\frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + \vec{v} \cdot \alpha_G = 0 \quad (4)$$

식 (4)에서 α_G 는 계산 셀에서 기체가 차지하는 체적비율을 의미한다. $\alpha_G=1$ 이면 기체로 가득 찬 셀, $\alpha_G=0$ 이면 액체로 가득 찬 셀, 그리고 $0 < \alpha_G < 1$ 이면 계면을 포함하는 셀이다. 밀도와 점성계수는 각 셀에서 체적비율에 따라서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha_G \rho_G + (1 - \alpha_G) \rho_L \\ \mu &= \alpha_G \mu_G + (1 - \alpha_G) \mu_L \end{aligned} \quad (5)$$

VOF 모델에서 표면장력 \vec{F} 는 Brackbill 등 [10]이 제안한 CSF (continuum surface force) 모델을 사용하였다.

$$\vec{F} = \sigma \frac{\rho \kappa \nabla \alpha_G}{\frac{1}{2}(\rho_L + \rho_G)} \quad (6)$$

식 (6)에서 κ 상경계면의 곡률을 나타내고 다음과 같이 표현된다.

$$\kappa = -(\nabla \cdot \hat{n}) \quad (7)$$

식 (7)에서 \hat{n} 은 계면의 단위법선벡터이고 체적비율 값으로부터 계산된다.

$$\hat{n} = \frac{\nabla \alpha_G}{|\nabla \alpha_G|} \quad (8)$$

2.3 경계 조건

본 연구에서는 Castrejon-Pita 등[2]의 실험에 사용된 프린트헤드 형상을 사용하여 수치해석을 수행하였다. Fig. 1은 본 연구에 사용된 계산영역과 격자계를 나타낸다. Fig. 1에 나타난

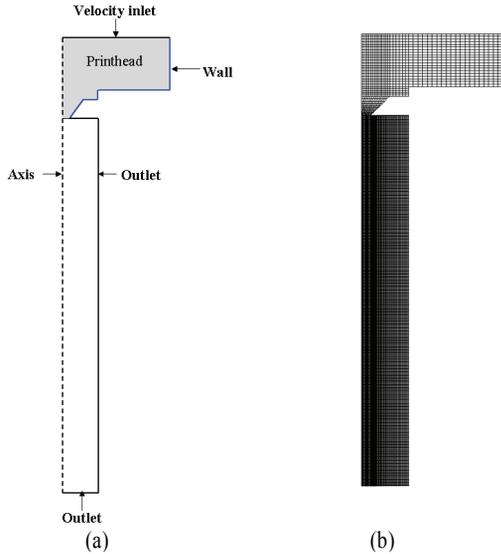


Fig. 1 (a) Schematic diagram showing the computational domain and boundary conditions (b) computational mesh generation

프린트헤드 영역의 높이는 8.6mm, 입구 직경은 30mm이다. 액적이 분사되는 노즐의 직경은 2mm이다. 프린트헤드 외부에 해당하는 사각형 영역은 길이와 직경이 각각 40, 10mm이다. 본 연구에서 사용된 노즐의 크기는 실제산업분야에 사용되는 것보다 훨씬 크지만 상용 프린트헤드의 작동 조건과 유사한 무차원수 ($O(1) < Re < O(10)$, $O(1) < We < O(10)$ [8])를 갖도록 유체의 물성치 (점도)를 설정하였다. 참고문헌의 실험에서는 압력펄스를 인가하여 액적을 분사 시켰고 압력펄스에 의해서 발생하는 프린트헤드에서의 속도 변화를 측정하였다 (Fig. 2). 본 연구에서는 Fig. 2의 속도조건을 입구 경계조건으로 사용하였다. 격자는 참고문헌의 실험 데이터[2]와 비교하는 검증 단계에서 격자 의존성을 최소화할 수 있는 격자수를 찾아 23,075개로 구성하였다[11].

3. 수치해석 결과 및 고찰

본 연구에 사용된 수치해석 모델의 신뢰성은 이전의 연구 [11]에서 Castrejon-Pita 등[2]의 실험데이터와의 비교를 통하여 검증하였고, VOF 모델을 사용하여 뉴튼 유체의 액적분사 거동을 정확히 예측할 수 있다는 결과를 얻었다. 전단희석유체의 액적 분사 해석 결과를 실험 데이터와 정량적으로 비교할 수 있는 참고문헌을 찾지는 못했지만 VOF 모델을 사용하여 전단희석유체의 액적분사 거동도 타당하게 예측할 수 있을 것으로 기대된다. 본 연구에서는 입구조건(구동신호)과 유체의 밀도, 표면장력은 고정시키고 점도만 변화시켜서 뉴튼유체

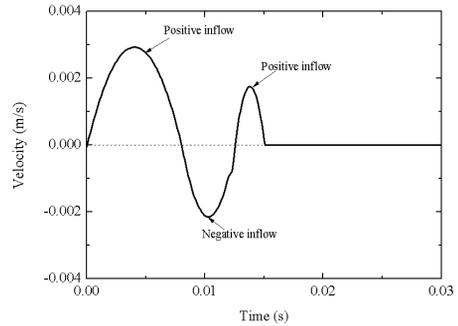


Fig. 2 The inlet velocity $V(t)$ obtained by a parabolic fitting to the inlet condition used in Lagrangian simulation of Castrejon-Pita et al.[2]

와 전단희석유체의 액적분사 거동을 비교하였다. 액적분사 거동은 printability와 pinch-off 시간의 측면에서 비교하였다.

뉴튼유체와 전단희석유체의 분사거동을 비교하기 위하여 동일한 effective viscosity (μ_{eff})와 무차원수를 갖도록 유체의 물성치를 선택하였다. 전단희석유체의 경우에 전단속도에 따라서 점도가 변하는데 액적분사 과정에서 나타나는 전단속도의 대표값을 추정하여 다음과 같이 effective viscosity를 정의하였다.

$$\mu_{eff} \approx K|\dot{\gamma}|^{n-1} \approx K\left(\frac{V_p}{R}\right)^{n-1} \quad (9)$$

식 (9)에서 V_p 는 유체토출 속도를 나타내는데 첫번째 positive inflow ($0 < t < 8ms$) 동안에는 inflow의 관성효과가 지배적이기 때문에 유체의 점도에 관계없이 거의 동일한 토출 속도를 갖는다[9]. 따라서 positive inflow 동안의 토출속도 0.6

Table 1 Fluid properties and dimensionless numbers based on the protrusion speed (0.6 ms^{-1}) during the first positive inflow. ST indicates the shear-thinning fluid ($n=0.5$) and NT indicates the Newtonian fluid. ($\rho = 1000 \text{ Kg m}^{-3}$, $\sigma=0.07 \text{ Nm}^{-1}$, $We=10.3$)

	$\mu_{eff}(\mu)(\text{Kg m}^{-1}\text{s}^{-1})$	K	Z	Re	Ca
ST1(NT1)	0.020	0.5	12.9	58.8	0.18
ST2(NT2)	0.033	0.8	8.1	36.7	0.28
ST3(NT3)	0.041	1	6.5	29.4	0.35
ST4(NT4)	0.061	1.5	4.3	19.6	0.52
ST5(NT5)	0.074	1.8	3.6	16.3	0.63
ST6(NT6)	0.082	2	3.2	14.7	0.70
ST7(NT7)	0.16	4	1.6	7.3	1.40
ST8(NT8)	0.20	5	1.3	5.9	1.75
ST9(NT9)	0.24	6	1.1	4.9	2.10
ST10(NT10)	0.33	8	0.8	3.7	2.80

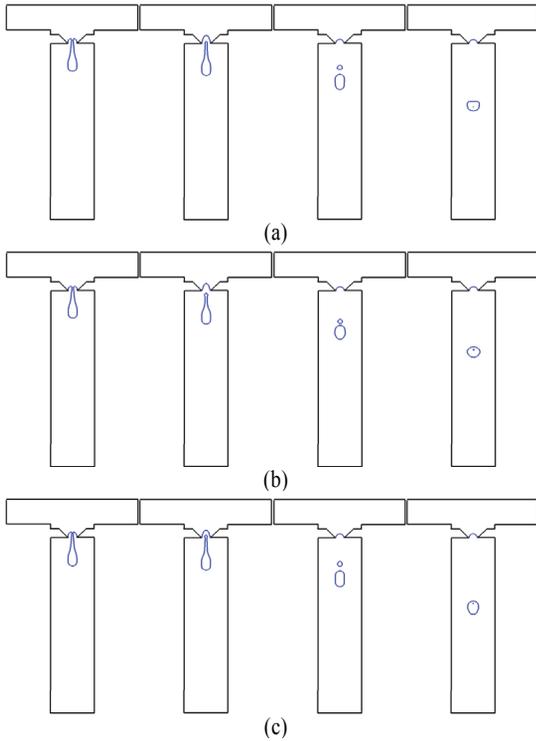


Fig.3 Time evolution of droplet shape after pinch-off
 (a) NT1 at $t = 11.4, 13.3, 19.8, 29.1$ ms
 (b) ST1 at $t = 11.3, 14.0, 21.1, 28.8$ ms (c) NT1 at $t = 11.7, 13.6, 21.1, 32.1$ ms (mesh 46,350)

ms^{-1} 를 특성속도 V_p 로 정의하였고 노즐의 반지름인 R 로 나누어서 전단속도의 대표값으로 추정하였다. 수치해석에 사용된 계산조건과 무차원수는 table 1에 명시하였다. 액적의 분사거동에 영향을 미치는 무차원 파라미터로는 Z 수, $Ca(=μV/σ)$, $We(=ρV^2D/σ)$, $Re(=ρVD/μ)$ 수 등이 있으며 토출속도 V_p 와 노즐직경 D 를 각각 특성속도와 특성 길이로 사용하여 무차원수를 계산하였다. 계산은 뉴튼유체 (NT) 10개 case와 동일한 effective viscosity를 갖는 전단희석유체(ST) 10개 case에 대하여 수행하였다.

3.1 Printability

본 연구에서는 $0.8 ≤ Z ≤ 12.9$ 의 범위에서 수치해석을 수행하였다. Fig. 3에서 NT1과 ST1은 pinch-off 이후에 액적의 꼬리부분이 분리되어 위성액적이 형성되었다가 낙하하는 동안 위성액적이 주 액적 (primary droplet)에 합쳐져서 단일액적을 형성한다. VOF 모델을 사용하여 두 액적이 합쳐질 때 유입되는 기포를 예측할 수가 있는데[12] 본 연구에서도 위성액적과 주 액적이 합쳐진 이후에 액적내부에 기포가 유입되는

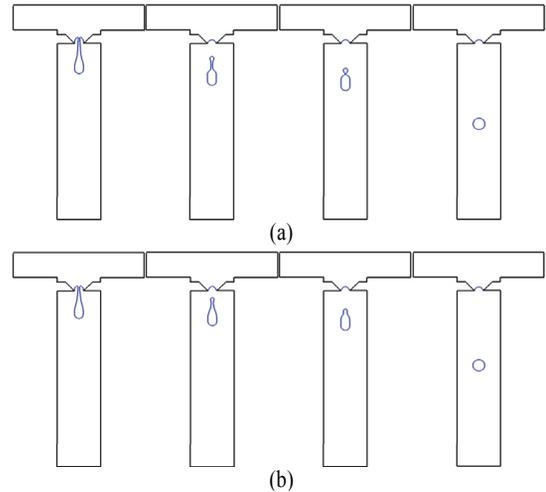


Fig.4 Time evolution of droplet shape after pinch-off
 (a) NT4 at $t = 12.7, 18.9, 21.5, 37.7$ ms
 (b) ST4 at $t = 11.6, 15.4, 17.9, 35.3$ ms

현상이 나타났다. 기포가 유입되는 현상이 grid resolution에 따른 수치에러에 의한 것인지 확인하기 위하여 46,350개로 구성된 격자를 사용하여 추가 계산을 수행하여 그 결과를 Fig. 3(c)에 나타내었다. Fig. 3(c)에 나타난 바와 같이 grid resolution을 증가 시켰을 때에도 기포가 유입 현상이 관찰되었으므로 수치에러에 의한 결과는 아닌 것으로 판단 할 수 있다. Jang 등[8]은 위성액적이 다시 주 액적에 합쳐져서 단일 액적을 형성하는 거동도 printability 영역으로 판단하였다. 그러나 합쳐지는 과정에서 액적내부에 기포가 유입되면 인쇄품질에 부정적인 영향을 미치기 때문에 printability 범위를 정의할 때 기포의 유입현상에 대한 고려가 필요 할 것이다.

반면에 Fig. 4에서 NT4와 ST4는 pinch-off 이후에 액적의 꼬리부분이 분리되지 않고 액적의 머리부분과 합쳐져서 단일 액적이 형성된다. 인쇄품을 고려하면 Fig. 4와 같이 위성액적이 전혀 발생하지 않는 것이 바람직할 것으로 보이며 본 연구에서 해석한 범위에서는 $Z ≤ 4.3$ 일 때 이러한 거동을 보였다.

Z 수의 값이 0.8인 NT10과 ST10을 비교하였을 때 NT10은 높은 점성 때문에 액적이 형성되지 못한 반면에 ST10은 액적이 형성되었다. 전단희석 특성이 액적형성을 더욱 용이하게 만드는 것으로 판단할 수 있다.

본 연구에서 해석한 범위에서 전단희석유체의 printability 영역은 $0.8 ≤ Z ≤ 12.9$ 이고 뉴튼유체는 $1.08 ≤ Z ≤ 12.9$ 인 것으로 나타났다. 전단희석유체의 경우에 printability 영역이 하한선에서 더욱 확장되는 경향이 나타났다. 그러나 전단희석 특성이 printability 영역의 상한선에 미치는 영향을 밝히

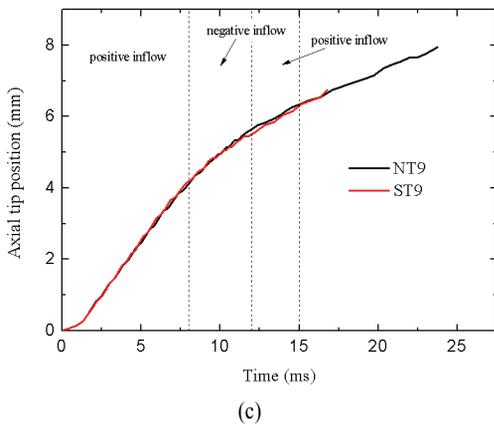
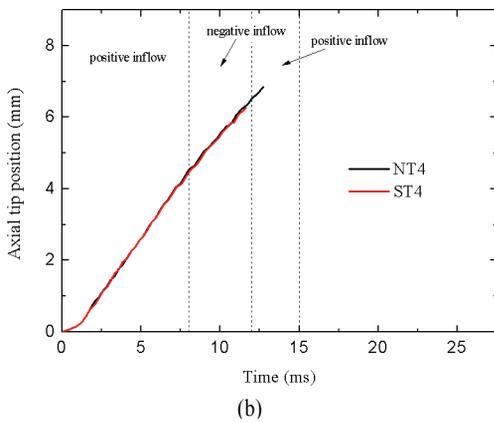
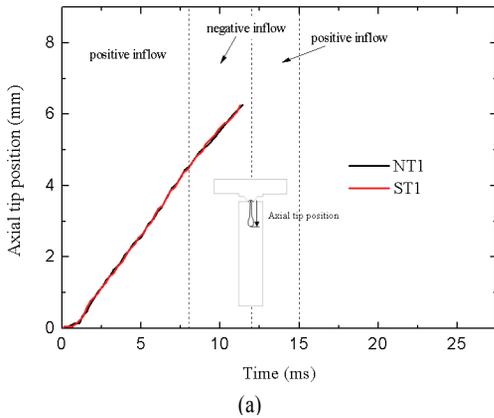


Fig. 5 Time evolution of axial tip position up to pinch-off. (a) NT1 and ST1 (b) NT4 and ST4 (c) NT9 and ST9

기 위해서는 Z 수의 값을 더 증가시켜 비교해야 할 필요성이 있다. 또한 Fig. 3과 같이 위상액적이 주 액체에 합쳐지는 과정에서 액적내부에 기포가 유입되는 경우를 printability에 부적합하다고 판단한다면 printability 영역은 이것보다 더 축소

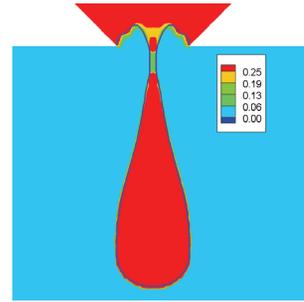


Fig. 6 Apparent viscosity distribution for ST9 at pinch-off time

될 것으로 보인다.

3.2 Pinch-off time

더욱 깊이 있는 고찰을 위하여 뉴튼유체와 전단희석 유체의 pinch-off 시간을 비교하였다. Fig. 5는 pinch-off 시간까지 액적선단의 위치(axial tip position) 변화를 나타낸 그래프이다. NT1과 ST1은 액적선단의 위치변화 및 pinch-off 시간이 거의 동일하게 나타나고 있다. NT4와 ST4는 액적선단의 위치변화는 거의 동일하게 나타나다가 pinch-off 시간에서만 차이를 보이는데 ST4의 pinch-off가 약 1.1 ms 정도 빠르게 발생한다. ST9와 NT9 역시 액적선단의 위치변화는 거의 비슷하게 나타나다가 ST9의 pinch-off가 약 7 ms 더 빨리 나타난다. 다른 나머지 case에 대해서도 pinch-off가 발생하기 전의 액적선단의 위치변화는 유사하고 pinch-off 시간에서만 차이를 보이고 있다. 따라서 전단희석 특성은 오직 necking에만 영향을 미치는 것으로 판단할 수 있다. pinch-off가 발생할 때 neck부분의 점도가 높으면 thinning을 방해하여 pinch-off를 지연시킨다[1].

Fig. 6은 ST9에서 pinch-off 가 발생하는 순간의 apparent viscosity 분포를 나타낸 그림이다. μ_{eff} 값이 $0.24 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$ 인데 반하여 pinch-off가 발생하는 neck부분의 점도는 약 $0.13 \text{ Kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$ 인 것으로 나타났다. neck 부분에 높은 전단속도가 발생하기 때문에 전단희석 특성에 의해서 이처럼 작은 점도가 나타나는 것이다. 같은 μ_{eff} 값을 갖는 뉴튼유체와 비교했을 때 neck부분의 점도가 약 절반 정도로 작기 때문에 pinch-off가 더 빨리 발생하는 것으로 해석된다.

Fig. 7은 동일한 effective viscosity를 갖는 뉴튼유체와 전단희석유체에 대하여 pinch-off 시간을 Ca 수에 대하여 나타낸 그래프이다. 전반적으로 전단희석유체의 pinch-off 가 뉴튼유체보다 더 빨리 발생하고 있다. 그리고 Ca 수가 0.5 이상일 때 pinch-off 시간의 차이가 더욱 크게 나타난다. 이것은 Ca 수가 커질수록 점성효과가 지배적이기 때문에 전단희석특성의 영향이 크게 나타나는 것으로 판단된다. 높은 점도에서 전단희석 특성이 크게 나타나는 것은 Davidson과 Cooper-

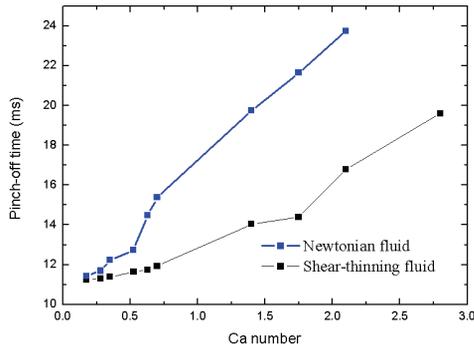


Fig. 7 Pinch-off time as a function of Ca number

White[13]의 연구결과와도 일치한다. 그들은 전단희석 액적의 dripping 현상을 수치해석적으로 연구하였는데 작은 점도에서는 shear-thinning 효과가 미미한 반면에 높은 점도에서 그 효과가 크게 나타나는 것을 확인하였다. pinch-off 시간이 짧을수록 액적분사의 주파수가 증가하기 때문에 인쇄속도 측면에서는 전단희석 특성을 갖는 잉크가 유리할 것으로 판단된다.

4. 결 론

뉴튼유체와 전단희박 유체의 액적분사거동을 수치해석적 방법으로 연구하였다. 같은 effective viscosity를 갖는 뉴튼유체와 전단희박 유체의 액적분사거동을 printability 영역과 pinch-off 시간의 측면에서 비교하였다. 뉴튼유체의 printability 범위는 $1.08 \leq Z \leq 12.9$ 이고 전단희석유체는 $0.8 \leq Z \leq 12.9$ 인 것으로 나타났다. 그러나 위성액적이 주 액적에 합쳐질 때 액적내부에 기포가 유입되는 현상을 고려한다면 printability 범위는 더 축소될 것이다. 전단희석유체의 pinch-off 시간이 뉴튼유체보다 더 짧게 나타나는데 Ca 수가 증가할수록 전단희박유체와 뉴튼유체의 pinch-off 시간차이가 훨씬 커지는 것으로 나타났다.

후 기

본 연구는 BK21 사업의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

[1] 2006, Dong, H. et al., "An experimental study of

drop-on-demand drop formation," *Phys. Fluids* Vol.18, 072102.

[2] 2011, Castrejon-Pita, J.R. et al., "Experiments and Lagrangian simulations on the formation of droplets in drop-on-demand mode," *Physical Review E*, Vol.83, 036306

[3] 2007, Xu, Q. and Basaran, O.A., "Computational analysis of drop-on-demand drop formation," *Phys. Fluids* Vol.19, 102111

[4] 2005, Kim, S. and Son, G., "Numerical study on drop formation through a micro nozzle," *Trans. of the KSME (B)*, Vol.29, No.2, pp.205-213.

[5] 2010, Kwon, K.S., "Experimental analysis of waveform effects on satellite and ligament behavior vis in situ measurement of the drop-on-demand drop formation curve and the instantaneous jetting speed curve," *J. Micromech. Microeng.* Vol.20, 115005.

[6] 2009, Kim, C.S. et al., "Modeling and characterization of an industrial inkjet head for micro patterning on printed circuit boards," *Computers & Fluids*, Vol.38, No.3, pp.602-612.

[7] 2000, Reis, N. and Derby, B., "Ink jet deposition of ceramic suspensions: Modeling and experiments of droplet formation," *MRS proceedings 625*, pp.117-22.

[8] 2009, Jang, D. et al. "Influence of fluid physical properties on ink-jet printability," *Langmuir*, Vol.25, pp.2629-2635.

[9] 1981, Hirt, C.W. and Nichols, B.D., "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol.39, p.201-225.

[10] Brackbill, J.U., Kothe, D.B., Zemach, C., "A continuum method for modeling surface tension," *J. Comput. Phys.*, Vol.100, p.335-354.

[11] 2012, Kim, E. and Baek, J., "Numerical study of the effects of the governing non-dimensional parameters on the droplet ejection behavior," (in Korean) *J. Comput. Fluids Eng.* Vol.17, No.2, pp.65-70.

[12] 2006, Passandideh-Fard, M. and Roohi, E., "Coalescence collision of two droplets: bubble entrapment and the effects of important parameters," *14th Annual (International) Mechanical Engineering Conference - May 2006*.

[13] 2006, Davidson, M.R. and Cooper-White, J.J., "Pendant drop formation of shear-thinning and yield-stress fluids," *Appl. Math. Model.*, Vol.30, pp.1392-1405.