

# P1 비순응 요소를 이용한 비압축성 유동 문제의 위상최적화

장강원\* · 장세명\*\*†

\* 세종대학교 기계항공우주공학부, \*\* 군산대학교 기계자동차공학부

## Topology Optimization of Incompressible Flow Using P1 Nonconforming Finite Elements

Gang-Won Jang\* and Se-Myong Chang\*\*†

\* Faculty of Mechanical and Aerospace Engineering, Sejong Univ.,

\*\* School of Mechanical and Automotive Engineering, Kunsan Nat'l Univ.

(Received January 9, 2012 ; Revised July 12, 2012 ; Accepted July 14, 2012)

**Key Words:** P1 Nonconforming Element(비순응요소), Navier-Stokes Flow(Navier-Stokes 유동), Topology Optimization(위상최적화), Locking-Free Property(무잠김특성)

**초록:** P1 비순응 요소를 이용하여 정상 비압축성 Navier-Stokes 유동의 위상최적화 문제를 푸는 방법을 제시한다. 본 연구는 Stokes 유동의 위상최적화 문제에 P1 비순응 요소를 적용하여 그 수치적 효율성을 보인 바 있는 이전 연구에 대한 후속 연구이다. 비압축성 물질 해석에서 잠김현상이 발생하지 않으며 선형 형상함수를 가지는 P1 비순응 요소의 장점이 관성항을 가지는 유체 문제의 해석과 설계에도 유효한 지를 파악하고자 한다. 일반적으로 사용되는 혼합정식화법과 비교하여 P1 비순응 요소의 사용은 벌칙 함수를 이용하여 연속 방정식을 따로 사용하지 않고 운동방정식에 부과할 수 있기 때문에 자유도의 개수를 감소시킬 수 있다. 벌칙 파라미터가 해의 정확도에 주는 영향과 적정 범위는 수치적으로 검토하도록 한다. 또한 보통의 사각 비순응 요소들이 요소면의 중앙에 절점을 가지고 고차의 형상함수를 지니는데 비하여, 본 연구에서 제시하는 P1 비순응 요소는 요소의 꼭지점에 절점을 가지고  $\{1, x, y\}$ 의 P1 형상함수로 구성됨으로써 수치적인 구현의 용이함이 일반 선형 사절점 요소와 동일하다. 제안한 방법의 효율성을 다양한 레이놀즈수에 따른 유동최적화 문제들을 살펴봄으로써 검증하도록 한다.

**Abstract:** An alternative approach for topology optimization of steady incompressible Navier-Stokes flow problems is presented by using P1 nonconforming finite elements. This study is the extended research of the earlier application of P1 nonconforming elements to topology optimization of Stokes problems. The advantages of the P1 nonconforming elements for topology optimization of incompressible materials based on locking-free property and linear shape functions are investigated if they are also valid in fluid equations with the inertia term. Compared with a mixed finite element formulation, the number of degrees of freedom of P1 nonconforming elements is reduced by using the discrete divergence-free property; the continuity equation of incompressible flow can be imposed by using the penalty method into the momentum equation. The effect of penalty parameters on the solution accuracy and proper bounds will be investigated. While nodes of most quadrilateral nonconforming elements are located at the midpoints of element edges and higher order shape functions are used, the present P1 nonconforming elements have P1,  $\{1, x, y\}$ , shape functions and vertex-wisely defined degrees of freedom. So its implementation is as simple as in the standard bilinear conforming elements. The effectiveness of the proposed formulation is verified by showing examples with various Reynolds numbers.

### 1. 서론

본 연구에서는 최근 Stokes 유동 위상최적설계 문제에 적용되어 그 수치효율성이 검증된 바 있는

P1 비순응 요소<sup>(1)</sup>를 Navier-Stokes 유동의 위상최적화 문제로 확장하고자 한다. 유체역학 문제에 위상최적설계가 최초 적용된 사례는 Borvall and Petersson<sup>(2)</sup>이 수행한 관성효과를 무시한 정상상태 유동, 즉 Stokes 유동장에서의 유로설계 문제에서 찾을 수 있다. 그들은 다공영역을 도입하고 다공 물질에 의한 투수율(permeability)을 설계 변수와 매개화하여 Darcy 유동을 도입함으로써 성공적으

† Corresponding Author, [smchang@kunsan.ac.kr](mailto:smchang@kunsan.ac.kr)  
© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

로 유동 영역과 비유동 강제 영역의 위상을 결정할 수 있었다. 이 연구는 그 후 Guest and Prévost,<sup>(3)</sup> Wiker 등<sup>(4)</sup>에 의해 다듬어졌으며 Gersborg-Hansen 등<sup>(5)</sup>은 이를 Navier-Stokes 유동 문제에 적용하였다.

위의 연구들은 유체의 비압축성을 다루기 위하여 혼합정식화 방법 기반의 유한요소법을 사용하였다. 혼합정식화 방법은 수치적으로 안정성이 뛰어나다는 장점이 있으나 압력 변수를 추가로 사용하여야 하고, 속도 변수와 압력 변수의 차수를 적절히 선택해주어야 하며, 일반적으로 높은 차수의 속도 변수를 사용해야 하므로 해석에 소요되는 수치 비용이 높아진다.

유체의 비압축성을 효과적으로 다룰 수 있는 또 다른 방법으로서 비순응 요소를 사용할 수 있다. 즉 비압축성 물질을 다룰 때 생기는 잠김현상을 삼각형 또는 사각형 비순응 요소를 사용함으로써 해결할 수 있다.<sup>(6-11)</sup> 본 연구에서 사용하게 될 P1 비순응 요소<sup>(12)</sup>는 비압축성 물질에서의 잠김현상이 없고 선형 기저함수특성을 지님으로써 기존 순응 요소를 이용한 혼합정식화법이나 고차 비순

응 요소를 사용할 경우에 비해 최적화에 소요되는 수치 비용을 효과적으로 줄일 수 있다.

제안한 P1 비순응 요소를 이차원 채널 설계 문제에 적용함으로써 그 효용성을 검증하도록 한다.

### 2. P1 비순응 요소

Fig. 1 에 P1 비순응 요소들의 형상함수들을 나타내었다. 특이한 것은 요소 모서리의 중앙점에서만 연속성을 만족시키며 꼭지점에서는 불연속이라는 점이다. 전역 좌표계  $(x, y)$  에서 정의된 일반 사각 형상의 비순응 요소  $Q$  의 요소면 중앙점들은 다음과 같이 정의된 아핀 변환(affine transformation)  $A$  에 의해서  $(\hat{x}, \hat{y})$  좌표계의  $(\pm 1, 0)$  와  $(0, \pm 1)$  로 매핑된다.<sup>(12)</sup>

$$(x, y) = A(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1-\hat{x}-\hat{y}}{4} \mathbf{v}_1 + \frac{1+\hat{x}-\hat{y}}{4} \mathbf{v}_2 + \frac{1+\hat{x}+\hat{y}}{4} \mathbf{v}_3 + \frac{1-\hat{x}+\hat{y}}{4} \mathbf{v}_4 \quad (1)$$

또한 전역 좌표  $(x, y)$  는 쌍일차 변환(bilinear transformation)  $B$  에 의해서 자연 좌표  $(\xi, \eta)$  로 변환된다.

$$(x, y) = B(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \mathbf{v}_1 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \mathbf{v}_2 + \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \mathbf{v}_3 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \mathbf{v}_4 \quad (2)$$

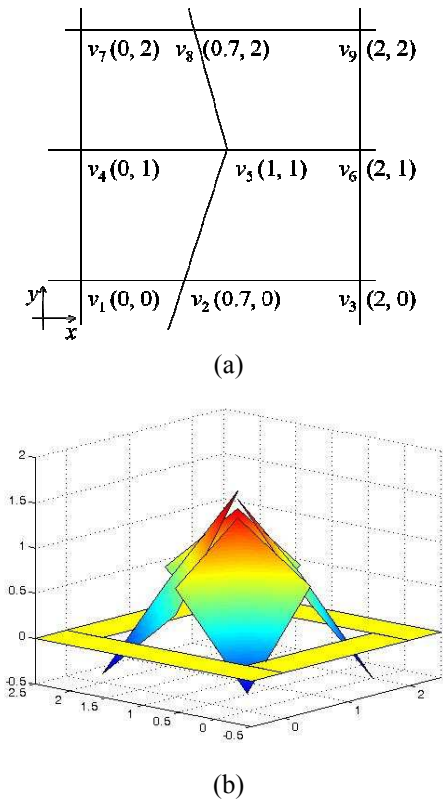
식 (1)의  $A$  변환과 식 (2)의  $B$  변환에 의해서  $(\hat{x}, \hat{y})$  와  $(\xi, \eta)$  사이의 변환  $S$  를 다음과 같이 구할 수 있다.<sup>(12)</sup>

$$(\hat{x}, \hat{y}) = S(\xi, \eta) = (\xi + d_1 \xi \eta, \eta + d_2 \xi \eta) \quad (3)$$

여기에서

$$(d_1, d_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4) \begin{pmatrix} -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 \\ -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \end{pmatrix}^{-1} \quad (4)$$

이다.



**Fig. 1** P1 nonconforming elements: (a) quadrilateral elements, and (b) shape functions associated with the vertex  $v_5$  (note that the continuity is only preserved at the midpoints of the element edges, not at the vertices)

요소의 강성행렬이나 힘벡터의 계산을 위해 전역 좌표에서 정의된 적분식들은 식 (1-3)의 변환들을 이용하여 자연좌표에 의한 식들로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \beta(x, y) \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \beta(x, y) \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \beta(B(\xi, \eta)) \hat{\varphi}_i(S(\xi, \eta)) \hat{\varphi}_j(S(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

위의 식에서  $\varphi_i(x, y)$  는 전역좌표에서 정의된 P1 비순응 형상함수들이고  $\hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y})$  는  $(\hat{x}, \hat{y})$  에서 정의된 형상함수로서 식 (3)의 변환  $S$  에 의해서  $(\xi, \eta)$  좌표로 변환된다. 요소가 직사각형일 경우에는 변환  $S$  는 단위 행렬로서 형상함수는 다음과 같다.

$$\hat{\varphi}_1(\xi, \eta) = \frac{1 - \xi - \eta}{2}, \quad (6a)$$

$$\hat{\varphi}_2(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi - \eta}{2}, \quad (6b)$$

$$\hat{\varphi}_3(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi + \eta}{2}, \quad (6c)$$

$$\hat{\varphi}_4(\xi, \eta) = \frac{1 - \xi + \eta}{2}, \quad (6d)$$

P1 비순응 요소의 수렴성은 다음과 같이 주어진다.<sup>(12)</sup>

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq Ch \|u\|_2 \quad (7)$$

위 식에서  $\|\cdot\|_{1,h}$  은 요소단위로 계산하여 합한 에너지 측정치(broken energy norm),  $h$  는 요소의 크기를 나타내며  $C$  는 상수로서 물성과 무관하다. 따라서 P1 비순응 요소의 수렴성은 포와송 비에 영향을 받지 않으며 비압축성 유체를 다룰 때 별도의 압력 변수를 필요로 하지 않는다.

### 3. 위상최적설계

#### 3.1 유한요소정식화

비압축성 유체의 정상상태 Navier-Stokes 문제의

지배방정식은 아래 두 식으로 주어진다.

$$\text{Re}(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad (8a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8b)$$

여기서  $\mathbf{v}$ 는 속도로서 이차원 문제의 경우  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y\}^T$  이고,  $p$ 는 압력을 나타내며  $\text{Re}$ 는 레이놀즈수이다. P1 비순응 요소를 사용할 경우 비압축성유동에서 해의 잠김현상이 발생하지 않으므로 압력을 속도의 미분형으로 표현하고 벌칙법을 써서 운동방정식에 부과시킬 수 있다. 즉, 압력을

$$p = -\kappa \dot{\epsilon}_v = -\kappa \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (9)$$

와 같이 표현하고 ( $\kappa$ : 벌칙 파라미터) 이를 식 (8a)에 대입하면 다음과 같은 하나의 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\text{Re}(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = \nabla(\kappa \nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (10)$$

위 식에서  $\kappa \rightarrow \infty$  이면 해는 식 (8)의 결과와 일치하게 된다.<sup>(13)</sup> 이 때  $\kappa$  가 너무 크게 되면 강성 행렬의 수치적인 성질이 나빠져서 주의가 필요하며 Hughes 등<sup>(13)</sup>은 다음과 같은 값을 제안하였다.

$$\kappa = c \max\{\mu, \mu \text{Re}\}, \quad (10)$$

위 식에서  $c$  는 실수 변수가 차지하는 물리적인 메모리 길이에 따라 달라지며  $\mu$  는 점성 계수이다. 벌칙 파라미터를 사용하는 본 해석방법은 혼합 정식화법에 비하여 시스템 행렬의 크기가 작아지는 장점이 있는 반면에 높은 강성행렬의 조건수로 인하여 반복 해법을 사용할 경우에는 더 많은 반복 회수가 요구된다.

위상최적화 수행을 위하여 설계영역의 요소들의 반투수율(inverse permeability)을 설계변수와 매개화시키고<sup>(1)</sup> 이를 지배방정식에 체적력으로 부과한다. 따라서 식 (10)은

$$\begin{aligned} & \text{Re}(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \\ &= \nabla(\kappa \nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] - \alpha \mathbf{v} \end{aligned} \quad (11)$$

와 같이 쓸 수 있다. 설계변수와 반투수율의 매개화와 이들 값에 따른 요소의 물성은 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha_e = \bar{\alpha} + (\underline{\alpha} - \bar{\alpha}) \rho_e \frac{1+q}{\rho_e + q}, \quad (0 \leq \rho_e \leq 1), \quad (12a)$$

$$\rho_e = \begin{cases} 0 \rightarrow \alpha = \bar{\alpha} \rightarrow \text{solid} \\ 1 \rightarrow \alpha = \underline{\alpha} \rightarrow \text{fluid} \end{cases} \quad (12b)$$

위의 식에서  $\rho_e$ 는 요소  $e$ 에서의 설계 변수를 의미하는데  $\rho_e$ 가 0이면 해당 요소의 반투수율이 최대가 되어 유체가 통과할 수 없는 고체 영역이 되고  $\rho_e$ 가 1이면 반투수율이 최소가 되어 해당 요소는 유체 영역이 된다. 식 (12a)에서  $q$ 는 벌칙 파라미터로서 본 연구에서는 0.01을 사용하였다.

비선형 미분방정식인 식 (11)의 속도 벡터를  $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^n + \mathbf{u}$ 로 표현하면 ( $n$ : solution iteration step) 다음과 같은 선형식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \text{Re}(\nabla \mathbf{v}^n) \mathbf{u} + \text{Re}(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{v}^n - \nabla(\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}) \\ & - \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \alpha \mathbf{u} \\ & = -\text{Re}(\nabla \mathbf{v}^n) \mathbf{v}^n + \nabla(\kappa \nabla \cdot \mathbf{v}^n) \\ & + \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v}^n + (\nabla \mathbf{v}^n)^T] - \alpha \mathbf{v}^n \end{aligned} \quad (13)$$

유한요소정식화를 위하여 해인  $\mathbf{u}$ 와 시험함수(test function)  $\mathbf{w}$ 를

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{N} \mathbf{W} \quad (14)$$

와 같이 이산화한다. 식 (14)에서 형상함수 행렬  $\mathbf{N}$ 은 P1 비순응 형상함수로 구성되어 있다. 식 (14)의  $\mathbf{u}$ 를 식 (13)에 대입하고  $\mathbf{w}$ 의 형상함수를 곱하여 영역에 대하여 적분하면 이산화된 시스템 방정식을 얻을 수 있다.

### 3.2 최적설계문제 공식화

정상상태 비압축성 유체의 Navier-Stokes 위상최적화 문제는 아래와 같이 정의된다.<sup>(5)</sup>

$$\text{Minimize: } \phi(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} [\nabla \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] d\omega, \quad (15a)$$

$$\text{Subject to: } \sum_{e=1}^{N_b} \rho_e v_e \leq V^*, \quad (15b)$$

식 (15a)의 목적함수는 시스템 영역  $\omega$ 에서의 에너지 손실을 의미하는 것으로 적분식 내의 두 개의 항들은 거시적인 관점에서의 점성 에너지 손실과 미시적 다공영역에서의 점성 에너지 손실을 각각 의미한다.<sup>(5)</sup> 식 (15b)에서  $v_e$ 는 요소의 체적,  $V^*$ 는 최대 유체 체적,  $N_b$ 는 설계영역에 속해있는 요소의 수를 나타낸다.

민감도는 보조변수법(adjoint variable method)을 사용하여 구한다.<sup>(14)</sup> 식 (15a)의 목적함수와 이산화된 시스템 방정식의 잉여벡터를 이용하여 현 설계 단계에서의 라그랑지 함수  $L$ 을 다음과 같이 구성한다.

$$L = \phi + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{r} \quad (16)$$

위에서  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{V})$  ( $\mathbf{V}$ : 속도벡터)는 시스템 방정식의 잉여벡터로서 식 (11)에 갠러킨 정식화를 수행함으로써 얻는다. 식 (16)은 민감도 해석을 위한 식으로써 최적화 알고리즘의 최소화 대상인 라그랑지 함수와는 다르다.

식 (16)을 설계 변수에 대하여 미분을 수행하면

$$\frac{dL}{d\rho_e} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho_e} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho_e} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{V}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{V}} \right) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \rho_e} \quad (17)$$

가 되고 라그랑지 승수  $\boldsymbol{\lambda}$ 를 다음 식을 만족하도록 설정하면

$$\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{V}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{V}} \right)^T \quad (18)$$

식 (17)로 표현된 민감도는 다음과 같이 단순화된다.

$$\frac{dL}{d\rho_e} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho_e} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho_e} \quad (19)$$

식 (18)에서  $(\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{V})^T = (\mathbf{K}_r)^T$ 로써 이미 구성된 강성행렬을 이용하므로 민감도 해석에 소요되는 수치비용은 크지 않다. 식 (16)에서  $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{r}$ 을 모두 0으로 만들기 위하여 속도가 주어진 곳에서  $\boldsymbol{\lambda} = 0$ 으로 설정하여 식 (18)을 계산한다. 레이놀즈 수가 0일 경우의 설계 민감도를 식 (19)를 이용하여 계산할 경우, 참고문헌 (1)의 Stokes 유동 최적화 문제의 설계 민감도와 동일한 결과를 얻는다.

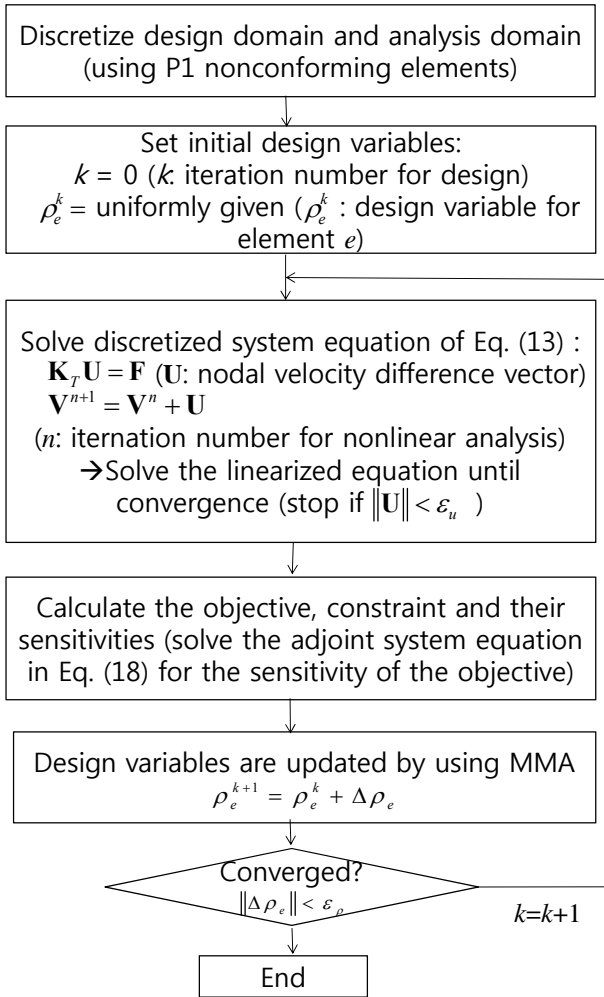


Fig. 2 Overall process of the proposed topology optimization using P1 nonconforming elements

열는다. 최적화는 순차적 근사기법으로서 구조 문제를 비롯한 위상최적화 문제에 효과적인 MMA (Method of moving asymptotes)를 사용 하였다.<sup>(15)</sup>

Fig. 2 에 본 연구에서 수행하는 위상최적화 방법의 전체적 과정을 요약하여 나타내었다.

#### 4. 설계 예제

Fig. 3(a)는 입구와 출구가 서로 수직으로 위치해 있는 채널의 설계문제이다. 설계 공간의 크기는 1×1 이고, 입구는 바닥으로부터 0.7~0.9 높이의 우측 벽에, 출구는 좌측 벽으로부터 0.7~0.9 거리의 바닥에 위치해 있다. 입구의 속도는 최대 속도가 1 인 포물선 분포(Hagen-Poiseuille 유동)로 부여되었으며 출구는 아무런 조건을 가하지 않았고 갤러킨 식에서 이는 출구 압력을 0 으로 설정한 것과 동일하다. 식 (9)에서  $\kappa = 10^7$  이고 식 (12)의 설계

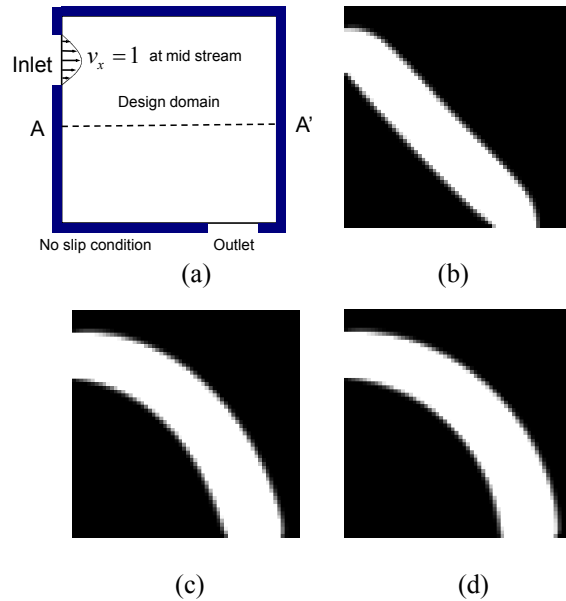


Fig. 3 An orthogonal channel design problem: (a) the design domain, and the optimum designs for (b) Re=0, (c) Re=400, and (d) Re=800

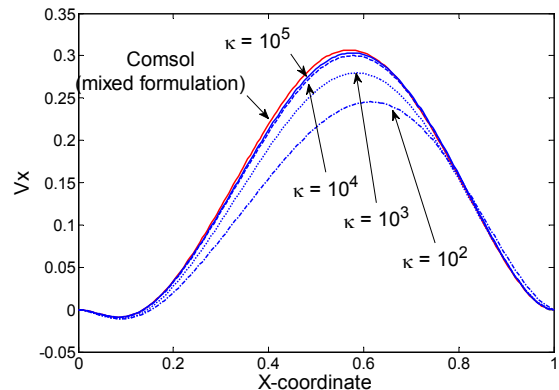


Fig. 4  $v_x$  on the centerline AA' in Fig. 3(a) for various values of the penalty parameter (the use of large value of the penalty parameter ( $\kappa \geq 10^5$ ) ensures the continuity condition in Eq. (8b) as in the mixed formulation)

변수 매개화에서  $\alpha = 40$ ,  $\bar{\alpha} = 40 \times 10^4$  를 사용하였다. 유체가 차지하는 부피는 설계공간의 30%로 제한하였다. Fig. 4 에 Re=100 일 때 Fig. 3(a)의 중심선 AA' 상의 수평 방향 속도  $v_x$  의 분포를 다양한 벌칙 파라미터 값에 대하여 계산한 결과를 나타내었다.  $\kappa \geq 10^5$  의 높은 벌칙 파라미터 값을 사용할 경우 속도의 분포는 혼합 정식화법으로 얻은 수렴된 결과와 거의 동일하다. 따라서 이 결과는 식 (8b)의 연속방정식이  $\kappa \geq 10^5$  의 경우 벌칙법에 의

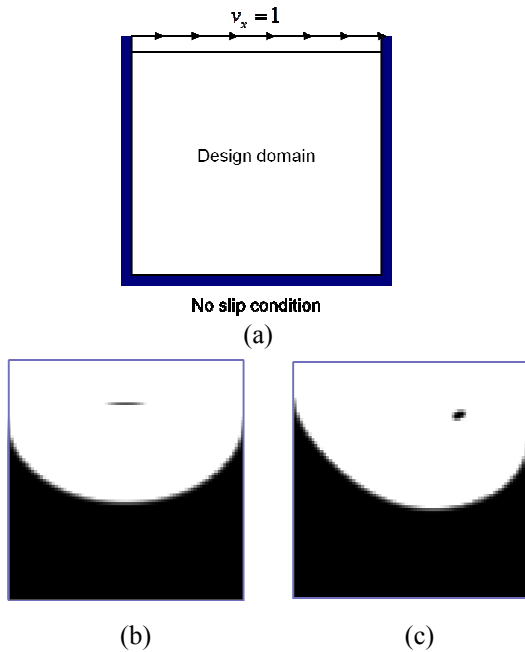


Fig. 5 A driven flow problem: (a) the design domain, and the optimum designs for (b)  $Re=0$  and (c)  $Re=200$

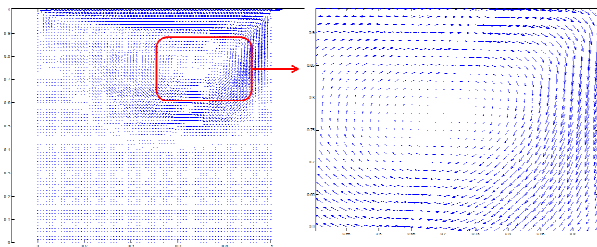


Fig. 6 Velocity distribution of the result in Fig. 5(c) around the center of rotation (the center of rotation is shifted to the flow direction due to the inertia effect)

의해서 잘 만족됨을 보여준다.

Fig. 3(b~d)는 레이놀즈수의 변화에 따른 최적화된 채널의 형상이다.  $Re=0$  일 때는 Stokes 유동으로서 유체의 관성 효과가 없으므로 거의 직선의 형태를 보이고 이는 기존의 결과와 동일하다.<sup>(1)</sup> 레이놀즈수가 증가할수록 유체의 관성 효과에 의해서 채널은 조금씩 굽은(위로 볼록) 형태를 보이게 된다.

Fig. 5(a)는 유체와 접한 벽면이 단위 속도로 수평방향으로 움직일 때 유체 시스템의 에너지 손실을 최소화하는 유체 영역을 설계하는 문제이다. 해석영역을  $60 \times 60$ 의 P1 비순응 요소로 이산화하였고 유체와 벽면이 접한 1 개의 요소층은 유체 영역으로 고정된 비설계 영역이다. 유체의 부피

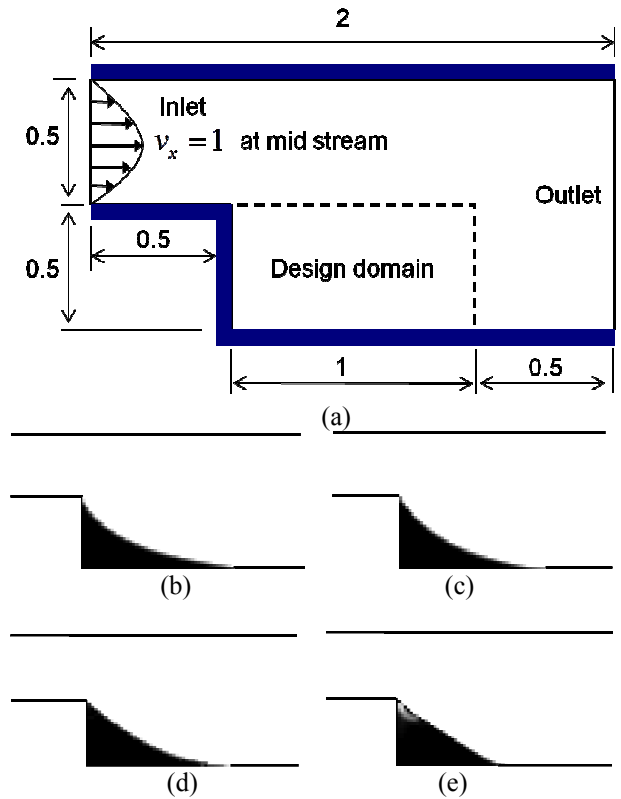
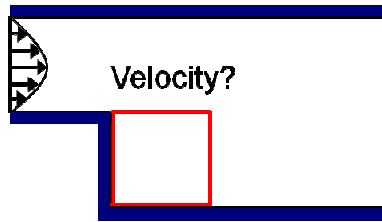


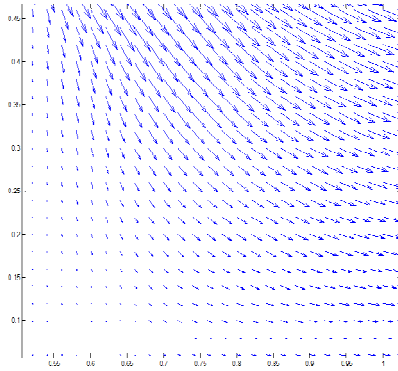
Fig. 7 A straight channel design problem with an abrupt change: (a) the design domain, and the optimum designs for (b)  $Re=0$ , (c)  $Re=20$ , (d)  $Re=50$ , and (e)  $Re=80$

제한조건은 50%이다. 최적화에 필요한 각종 파라미터 값은 앞의 문제와 동일하다.  $Re=0$  일 때의 유체영역과  $Re=200$  일 때의 유체영역을 Fig. 5(b)와 (c)에 각각 나타내었다. 유체 영역은 설계 영역의 상부에 위치하여 시계방향으로 회전하는 양상을 보이며 부드러운 회전을 위하여 하부의 고체영역과의 접합면이 곡선형태를 띤다. 두 결과 모두 유체 영역 가운데에 작은 고체 영역이 보이는데 이는 유체의 회전 중심이다.  $Re=0$  일 경우에는 최적해가 대칭인데 비하여  $Re=200$  일 경우에는 관성 효과에 의해서 윗면의 이동 방향인 우측으로 회전 중심이 치우치는 결과를 보인다. Fig. 6는 Fig. 5(c)의 회전 중심 영역에서의 속도 분포를 보여준다. 연속 조건을 만족시키기 위하여 회전 중심 우측에는 유체가 빠른 속도로 이동하고 회전 중심 좌측에는 유체가 느린 속도로 이동하는 양상을 관찰할 수 있다.

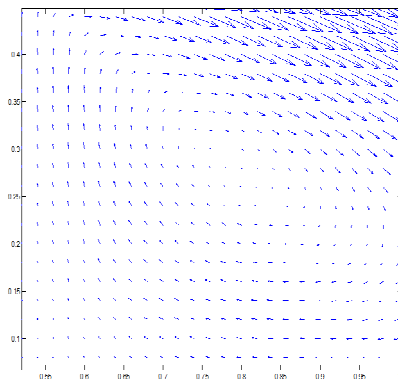
채널의 폭이 급격히 변할 때 에너지 손실을 최소화 하기 위하여 변하는 지점의 벽면을 설계하는 문제를 Fig. 7(a)에 나타내었다. 전체 해석 영역은



(a)



(b)



(c)

**Fig. 8** Velocity distributions within the box region in (a): (b)  $Re=0$ , and (c)  $Re=80$

100×50의 P1 비순응 요소로 이산화하였고 채널 폭이 변하는 부위만을 설계영역으로 설정하였다. 유체의 부피 제한조건은 70%이다. 최적화에 필요한 각종 파라미터 값은 앞의 문제들과 동일하고 출구 쪽의 압력은 0으로 일정하다(대기압에 노출).

다양한 레이놀즈수에 따른 최적해를 Fig. 7(b~d)에 표시하였다. 레이놀즈수가 낮을 수록 벽면은 아래로 볼록한 곡선 형태(로켓노즐 형상)를 보이며 높은 레이놀즈수의 유동에서는 벽면은 직선에 가까운 형상을 보인다. Fig. 8에 벽면에서의 속도 분포를 도시하였는데,  $Re=80$ 일 때의 유동은 벽면에서 유동 박리(flow separation)에 의한 와류 형상을 보이므로 이 와류에 의한 에너지 손실을 최소화시키는 방향으로 최적화가 진행된다.

## 5. 결론

P1 비순응 요소를 이용하여 정상 비압축성 Navier-Stokes 유동 문제를 속도장만의 단일 변수로 해석하고 이를 위상최적설계문제에 적용하였다. P1 비순응 요소는 비압축성 물질을 다룰 때 잠김 현상이 발생하지 않는다. 따라서 벌칙법을 이용하여 압력변수를 사용하지 않음으로써 수치비용을 줄일 수 있다. 또한 사각 비순응 요소들이 일반적으로 고차인데 비하여 본 논문의 P1 비순응 요소는 선형 형상함수를 지님으로써 Navier-Stokes 문제와 같이 수치비용이 높은 해석 및 최적화 문제에서 효과적이다. 제안한 P1 비순응 요소를 이용하여 다양한 2차원 채널 설계 문제를 풀어봄으로써 그 효용성을 검증하였다. 본 요소를 3차원으로 확장하여 3차원 유동 설계 문제에도 적용할 수 있으며 이 경우에 큰 수치 비용의 절감 효과를 예상할 수 있다.

## 후 기

이 논문은 2011년도 세종대학교 교내연구비 지원에 의한 논문임.

## 참고문헌

- (1) Jang, G. W., Henry, P. and Chung, T., 2010, "P1-Nonconforming Quadrilateral Finite Element for Topology Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 84, pp. 685~707.
- (2) Borrvall, T. and Petersson, J., 2003, "Topology Optimization of Fluids in Stokes Flow," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 41, pp. 77~107.
- (3) Guest, J. K. and Prévost J. H., 2006, "Topology Optimization of Creeping Fluid Flows Using a Darcy-Stokes Finite Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, pp. 461~484.
- (4) Wiker, N., Klarbring, A. and Borrvall, T., 2007, "Topology Optimization of Regions of Darcy and Stokes Flow," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 69, pp. 1374~1404.
- (5) Gersborg-Hansen, A., Sigmund, O. and Haber, R. B., 2005, "Topology Optimization of Channel Flow Problems," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 30, pp. 181~192.
- (6) Brenner, S. and Sung, L., 1992, "Linear Finite Element Methods for Planar Elasticity," *Mathematics of Computation*, Vol. 59, pp. 321~338.
- (7) Douglas, Jr. J., Santos, J., E. and Sheen D., 2000, "A

- Nonconforming Mixed Finite Element Methods for Maxwell's Equations," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 10, No. 4, pp. 596~613.
- (8) Douglas, Jr. J., Santos, J. E. and Sheen D., 2001, "Nonconforming Galerkin Methods for the Helmholtz Problem," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 17, pp. 475~494.
- (9) Douglas, Jr. J., Santos, J. E., Sheen, D. and Ye, X., 1999, "Nonconforming Galerkin Methods Based on Quadrilateral Elements for Second Order Elliptic Problems," *RAIRO Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, Vol. 33, No. 4, pp. 747~770.
- (10) Lee, C.-O., Lee, J. and Sheen, D., 2003, "A Locking-Free Nonconforming Finite Element Methods for Planar Linear Elasticity," *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 19, pp. 277~291.
- (11) Rannacher, R. and Turek, S., 1972, "Simple Nonconforming Quadrilateral Stokes Element," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 8, pp. 97~111.
- (12) Park, C. and Sheen, D., 2003, "P1-Nonconforming Quadrilateral Finite Element Method for Second-Order Elliptic Problems," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 41, No. 2, pp. 624~640.
- (13) Hughes, T. J. R., Liu, W. K. and Brooks, A., 1979, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation," *Journal of Computational Physics*, Vol. 30, pp. 1~60.
- (14) Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., 2004, *Topology Optimization - Theory, Methods, and Applications*, Springer, Berlin Heidelberg New York.
- (15) Svanberg, K., 1987, "The Method of Moving Asymptotes - a New Method for Structural Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359~373.