

## 곱분해 기법 기반의 통계 모멘트를 이용한 효율적인 강건 최적설계

조수길\* · 이민욱\* · 이태희\*†

\* 한양대학교 공과대학 미래자동차공학과

### Efficient Robust Design Optimization Using Statistical Moments Based on Multiplicative Decomposition Method

Su-gil Cho\*, Minuk Lee\* and Tae Hee Lee\*†

\* Dept. of Automotive Engineering, College of Engineering, Hanyang Univ.

(Received September 23, 2011 ; Revised June 28, 2012 ; Accepted July 26, 2012)

**Key Words:** Robust Design Optimization(강건 최적설계), Multiplicative Decomposition Method(곱분해 기법), Kriging Metamodel(크리깅 메타모델)

**초록:** 제품 생산 시 발생하는 제작 공차, 항복강도와 탄성계수 등 재료 물성치의 불확실성, 온도와 습도 같이 시스템에 작용하는 환경인자 등은 시스템의 성능에 영향을 미친다. 강건 최적설계는 이러한 인자들이 시스템에 미치는 영향을 최소화하면서 성능을 개선하는 설계기법으로 최근 많은 연구가 이루어지고 있다. 하지만 기존의 강건 최적설계 기법은 여러 인자들의 분포를 고려해야 하기 때문에 막대한 계산비용이 드는 문제가 있다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 개선하기 위하여 곱분해 기법을 이용한 강건 최적설계를 제안한다. 제안된 기법을 이용하여 설계영역을 크리깅 메타모델로 근사하고 곱분해 기법을 적용하여 평균과 분산을 효율적이고 정확하게 계산하여 강건 최적설계를 수행한다. 제안된 방법을 수학예제와 공학예제에 적용하여 유용성을 검증한다.

**Abstract:** The performance of a system can be affected by various variables such as manufacturing tolerances, uncertainties of material properties, and environmental factors acting on the system. Robust design optimization has attracted much attention in the design of products because it can find the best design solution that minimizes the variance of the response while considering the distribution of the variables. However, the computational cost and accuracy of optimization have thus far been a challenging problem. In this study, robust design optimization using the multiplicative decomposition method is proposed in order to solve these problems. Because the proposed method calculates the mean and variance of the system directly from the kriging metamodel using the multiplicative decomposition method, it can be used to search for a robust optimum design accurately and efficiently. Several mathematical and engineering examples are used to demonstrate the feasibility of the proposed method.

### 1. 서론

일반적인 최적설계 방법은 설계변수와 시스템 파라미터를 확정적인 변수라고 가정한다. 즉, 제품 생산 시 발생하는 제작 공차, 항복강도와 탄성계수와 같은 재료 물성치의 불확실성, 온도나 습도와 같이 시스템에 작용하는 환경인자 등의 변동을 고려하지 않고 설계하기 때문에 실제 시스템의 응답과 일치하지 않을 수 있으며 이로 인해 전체 시스템의 강건성과 안전성에 큰 영향을 미칠 수 있

다. 따라서 이런 변동을 고려하고 더 나아가 이러한 변동들이 시스템의 응답에 작용하는 영향을 줄일 수 있도록 설계하는 강건 최적설계 분야에 많은 연구가 진행되고 있다.

지금까지의 강건설계 방법은 크게 실험계획적 방법, 평균-분산 이용 방법으로 분류할 수 있다. 실험계획적 방법은 실제 물리적인 실험에서 많은 실험을 할 수 없을 때 응답의 분포를 통계적으로 가정하여 통계적 특성을 이용하는 방법이다. 이 분야의 대표적인 방법은 다구치 방법(Taguchi method)이 있다. 다구치 방법은 직교배열에 의한 실험계획과 SN 비(signal to noise ratio)를 바탕으로 파라미터 설계 개념을 통해서 제품의 강건성을 향상시키는 방법으로 현장에서 제품 및 공정의 설계

† Corresponding Author, [thlee@hanyang.ac.kr](mailto:thlee@hanyang.ac.kr)  
© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

와 개선을 위해 많이 이용되고 있다.<sup>(1)</sup> 이 방법은 계획된 실험 수행이 필요하고 이산화 된 변수를 이용하기 때문에 제한조건을 가진 문제나 연속적인 변수를 가진 문제, 변수의 변동이 정규분포가 아닌 문제, 비선형성이 강한 문제에는 적용이 어렵다는 단점이 있다.

평균-분산 이용 방법은 성능 함수의 평균값과 분산 값을 이용해 민감도 기반 최적설계 문제를 구성하는 방법이다. 함수를 테일러 급수의 1 차 식으로 표현하고 그 민감도를 이용하여 평균과 분산을 구하는 FOSM(First Order Second-moment Method) 방법이 널리 사용되고 있다.<sup>(2)</sup> 이 기법은 제한조건의 적용이 가능하고 유용영역 내부의 최적설계 값을 탐색할 수 있지만 민감도를 이용하기 때문에 비선형적인 모델일 경우 부정확하며 수치적 잡음이 존재할 경우 해를 구할 수 없다. 이러한 단점을 개선하기 위하여 최근에 평균과 분산을 적분을 통하여 계산하는 모멘트 법이 연구되고 있다. DR(Dimension Reduction) 기법이 대표적이며 기존의 민감도를 이용한 기법에 비해 정확하고 효과적으로 해를 구할 수 있다.<sup>(3)</sup> 하지만 DR 기법 역시 가정을 통해 다중적분을 일 차원 적분의 합으로 표현하기 때문에 가정에서 발생하는 수치적 오차와 비선형적인 문제에 대해 정확도가 떨어진다는 단점이 존재한다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 크리깅 메타모델과 곱분해 기법을 이용한 강건 최적설계 기법을 제안한다. 곱분해 기법이란 비선형성이 강한 시스템의 통계적 모멘트를 가정 없이 정확하게 구하는 방법으로 통계적 모멘트를 구할 때 다중적분이 필요한데 이를 일 차원 적분의 곱으로 변환하여 계산하는 기법이다. 다중적분은 수치적 적분을 해야 하는데 이러한 수치적 적분과정 없이 비선형성이 강한 응답의 통계적 모멘트를 정확히 구할 수 있다.<sup>(4)</sup> 또한 확률분포에 대한 난수를 직접 생성하지 않고 크리깅 메타모델과 확률분포의 곱을 적분함으로써 통계적 모멘트를 구할 수 있기 때문에 적은 실험 횟수로 최적설계를 수행할 수 있다. 수학예제와 공학예제를 통하여 본 논문에서 제안된 강건설계 방법의 정확성을 검증한다.

## 2. 강건 최적설계 정식화

변수에 외란이나 잡음이 있을 때 응답함수  $f(\mathbf{b})$

및 제한조건  $g_i(\mathbf{b})$ 는 식 (1)과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) &\rightarrow f(\mathbf{b} + \mathbf{z}^b, \mathbf{p} + \mathbf{z}^p) \\ g_j(\mathbf{b}) &\rightarrow g_j(\mathbf{b} + \mathbf{z}^b, \mathbf{p} + \mathbf{z}^p) \\ \mathbf{p} &\in \mathbf{R}^m, \mathbf{z}^b \in \mathbf{R}^n, \mathbf{z}^p \in \mathbf{R}^m \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{b}$ 는 설계변수이고,  $\mathbf{p}$ 는 설계 파라미터로서 환경 변수라고도 하며 일반적으로 설계 과정에서는 상수로 가정한다.  $\mathbf{z}^b$ 과  $\mathbf{z}^p$ 는 각각 설계변수와 설계 파라미터에 발생하는 공차, 잡음, 외란 등을 의미하고  $n, m$ 은 각각 설계변수의 수와 설계 파라미터의 수이다. 강건 최적설계에서는 강건성을 증진시키기 위해 식 (2)와 같이 설계 정식화를 수식적으로 나타낼 수 있다.<sup>(5)</sup>

$$\begin{aligned} \text{Find } \mathbf{b} &\in \mathbf{R}^n \\ \text{To minimize } &F(\mathbf{b} + \mathbf{z}^b, \mathbf{p} + \mathbf{z}^p) \\ \text{Subject to } &G_j(\mathbf{b} + \mathbf{z}^b, \mathbf{p} + \mathbf{z}^p) \leq 0, j = 1, \dots, m \\ &\mathbf{b}_L \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{b}_U \end{aligned} \quad (2)$$

$F, G_j$ 는 식 (1)의  $f, g_j$ 를 변형한 식이다. 일반적으로  $F, G_j$ 는  $f, g_j$ 의 평균과 변동의 관계식으로 정의한다. 변동에 관한 인자로는 주로 분산을 사용하며 평균과 분산은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mu_f &= E[f(\mathbf{b})] = \int \int \dots \int f(\mathbf{b} + \mathbf{z}^b, \mathbf{p} + \mathbf{z}^p) u_1(z_1^b) \dots u_n(z_n^b) \\ &\quad v_1(z_1^p) \dots v_m(z_m^p) dz_1^b \dots dz_n^b dz_1^p \dots dz_m^p \\ \sigma_f^2 &= E[(f(\mathbf{b}) - \mu_f)^2] = \int \int \dots \int [f(\mathbf{b} + \mathbf{z}^b, \mathbf{p} + \mathbf{z}^p) - \mu_f]^2 \\ &\quad u_1(z_1^b) \dots u_n(z_n^b) v_1(z_1^p) \dots v_m(z_m^p) dz_1^b \dots dz_n^b dz_1^p \dots dz_m^p \end{aligned} \quad (3)$$

$E[\bullet]$ 는 함수의 기대값을 나타내며  $u_i(z_i^b), v_i(z_i^p)$ 는 각각 잡음인자  $\mathbf{z}^b, \mathbf{z}^p$  벡터의  $i$  번째 요소의 확률 밀도 함수이다. 이들은 서로 독립으로 가정한다. 이러한 확률밀도함수가 정규분포라면 다음과 같다.

$$u_i(z_i^b) = \frac{1}{\sigma_{b_i} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(b_i - \mu_{b_i})^2}{2\sigma_{b_i}^2}\right] \quad (4)$$

여기서  $\mu_{b_i}, \sigma_{b_i}$ 는 각각  $i$  번째 설계변수의 평균과 표준편차이다. 강건 최적설계는 기본적으로 식 (2)를 평균과 표준편차의 함수로 정의하며 본 논문에서는 식 (5)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{Find } \mathbf{b} &\in \mathbf{R}^n \\ \text{To minimize } &F(\mathbf{b}, \mathbf{P}) = w_1 \frac{\mu_Y(\mathbf{b}, \mathbf{P})}{\mu_Y^*} + w_2 \frac{\sigma_Y(\mathbf{b}, \mathbf{P})}{\sigma_Y^*} \\ \text{Subject to } &G_i(\mathbf{b}, \mathbf{P}) = \mu_{G_i}(\mathbf{b}, \mathbf{P}) - k\sigma_{G_i}(\mathbf{b}, \mathbf{P}) \leq 0 \\ &\mathbf{b}_L \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{b}_U, i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $w_1, w_2$  는 평균과 분산의 가중치이고  $\mu_Y^*$  와  $\sigma_Y^*$  는 평균, 분산의 정규화 계수이며 본 논문에서 전체 설계영역의 평균, 분산을 사용하였다.  $k$  는 응답이 조건에 만족하는 확률을 나타내는 값으로 본 논문에서  $k$  는 3 으로 설정하였다.

### 3. 모멘트 추출법

#### 3.1 크리깅 메타모델

크리깅 메타모델은 채광학자인 Krige 의 연구를 바탕으로 공간분석 및 공간자료의 연관관계를 규명하기 위해 지질통계학에서 처음으로 이용되었다.<sup>(6)</sup> 그 후 Sacks 에 의해 전산실험모델로서 공학분야에 적용되었다.<sup>(7)</sup> 설계변수가 많고 비선형성이 강한 모델에 대해서 크리깅모델의 우수한 예측성능이 다양하게 확인되었다.<sup>(8)</sup>

크리깅모델은 실제 함수를 평균(mean)에 해당하는 전역모델(global model,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}$ )과 편차(deviation,  $z(\mathbf{x})$ )에 해당하는 국부모델의 합으로 가정한다.<sup>(8)</sup>

$$Y(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + Z(\mathbf{x}) \quad (6)$$

편차와 무작위오차가 독립적이라는 가정하에서 두 응답간의 공분산은 식 (7)로 표현할 수 있다.

$$\text{Cov}[Y(\mathbf{x}^i), Y(\mathbf{x}^j)] = \text{Cov}[Z(\mathbf{x}^i), Z(\mathbf{x}^j)] + \text{Cov}[\varepsilon_r(\mathbf{x}^i), \varepsilon_r(\mathbf{x}^j)] \quad (7)$$

$Z(\mathbf{x})$  의 공분산은 식(8)과 같이 분산  $\sigma_z^2$  와 상관행렬(correlation matrix)  $\mathbf{R}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j)$  의 곱으로 표현한다.

$$\text{Cov}[Z(\mathbf{x}^i), Z(\mathbf{x}^j)] = \sigma_z^2 \mathbf{R}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) \quad (8)$$

상관행렬은 데이터들의 공간적인 상관관계(spatial correlation)를 표현하는 상관함수  $\mathbf{R}$  로 정의하고 일반적으로 가우스(gauss) 상관함수를 사용한다.

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) = \exp\left[-\sum_{k=1}^{n_d} \theta_k (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)^2\right] \quad (9)$$

여기서  $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \in R^{n_d}$  이고, 상관계수  $\theta_k$  는  $x_k$  에 대한 응답값들의 상관관계를 나타내는 값으로  $x_k$  방향 곡률을 결정한다. 식 (9)의 미지수  $\theta_k$  는, 최우량추정법(maximum likelihood estimation)에 의해서 구할 수 있다.<sup>(9)</sup> 우량함수를 최대라는 것은 확률적으로 가능성이 높은  $\theta_k$  값을 추정한다는 의미이다.

크리깅 메타모델은 선형 예측량 중에서 비편향성(unbiasedness)을 만족하면서 평균제곱오차(mean squared error)가 최소인 최대 비편 추정량(best linear unbiased predictor)의 특성을 지닌다. 따라서 식 (10)과 같은 최적화 문제로 정식할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{find} & : \mathbf{c}(\mathbf{x}) \\ \text{min} & : \text{MSE}[\hat{y}(\mathbf{x}) - y(\mathbf{x})] \\ \text{s.t.} & : E[\mathbf{c}^T(\mathbf{x})\mathbf{y} - y(\mathbf{x})] = 0 \\ & \hat{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x})\mathbf{y} \end{aligned} \quad (10)$$

이를 최적화 기법을 이용하여 구하면 식 (11)과 같이 선형 예측자를 유도할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{F}(\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1}] \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

이를 실제 함수 형태로 나타내면 식 (12)와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{y}(\mathbf{x}) & = \hat{\mathbf{c}}^T(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ \text{where } \hat{\boldsymbol{\beta}} & = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (12)$$

이 때  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  은 일반 최소 제곱 추정량(generalized least square estimator)으로 나타낼 수 있으며  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  는 표본점과 예측점의 관계를 나타내는 상관벡터이다.

#### 3.2 곱분해 기법

시스템의 통계적 모멘트는 다음과 같다.

$$m_l = \int_{\Omega} Y(\mathbf{x})^l f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (l=1,2) \quad (13)$$

여기서  $f_x(\mathbf{x})$  는 확률밀도함수를 의미한다. 이렇게 구한 모멘트를 이용하여 식 (14)을 통해 제한 조건의 평균과 분산을 구한다.

$$\begin{aligned} \mu & = m_1 \\ \sigma^2 & = m_2 - m_1^2 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $\mu, \sigma$  는 평균과 표준편차를 의미하고 이를 계산할 때 식 (13)에서  $Y(\mathbf{x})$  를 실제모델을 이용하여 구하면 많은 수치적 비용과 계산이 필요하기 때문에 효율성이 떨어지고 또 설계변수가 증가하면 비용이 급격히 상승하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 실제 모델을 크리깅 모델로 근사화하여 모멘트를 구한다.

$$\begin{aligned} m_1 & = \int_{\Omega} Y(\mathbf{x}) f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \int_{\Omega} \hat{Y}(\mathbf{x}) f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ m_2 & = \int_{\Omega} Y(\mathbf{x})^2 f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \int_{\Omega} \hat{Y}(\mathbf{x}) \hat{Y}(\mathbf{x}) f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (15)$$

크리깅 모델의 전역모델을 상수로 가정하면 1, 2 차 모멘트는 식 (16), (17)처럼 유도된다.

$$\begin{aligned} m_1 & \cong \int_{\Omega} \hat{Y}(\mathbf{x}) f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \{\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}})\} \prod_{k=1}^D \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2} dx_1 \dots dx_D \\ & = \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{where } \mathbf{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^D \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2} dx_1 \dots dx_D$$

$$m_2 = \int_{\Omega} \hat{Y}(\mathbf{x})^2 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \int_{\Omega} \hat{Y}(\mathbf{x}) \hat{Y}(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$= \hat{\beta} \hat{\beta}^T + 2 \hat{\beta} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\alpha} \quad (17)$$

where  $\mathbf{Q} = \int_{I_D} \dots \int_{I_1} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \prod_{k=1}^D \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{dk}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{dk}-\mu_{dk}}{\sigma_{dk}}\right)^2} dx_1 \dots dx_D$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\hat{\beta})$$

이렇게 실제응답을 크리깅 모델로 근사화하여 식 (18), (19)와 같이 다중적분을 일차원 적분의 곱의 형태로 1, 2 차 모멘트를 구할 수 있다.

$$J_i = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^D e^{-\theta_k(x_k - \hat{x}_k)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2} dx_1 \dots dx_D \quad (18)$$

$$= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\theta_1(x_1 - \hat{x}_1)^2 - \theta_1(x_1 - \mu_1)^2} dx_1 \right) \dots \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D} e^{-\theta_D(x_D - \hat{x}_D)^2 - \theta_D(x_D - \mu_D)^2} dx_D \right)$$

$$Q_{ij} = \int_{I_D} \dots \int_{I_1} \prod_{k=1}^D e^{-\theta_k(x_k - \hat{x}_k)^2} e^{-\theta'_k(x_k - \hat{x}'_k)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2} dx_1 \dots dx_D \quad (19)$$

$$\theta'_k = 1/2\sigma_k^2$$

여기서  $i$  는 크리깅 모델을 만들 때 사용된 샘플링점,  $j$  는 응답을 제공한 크리깅 모델을 생성할 때의 샘플링점,  $D$  는 설계변수의 개수,  $\theta_k$  는 응답을 제공한 크리깅 모델을 생성할 때 사용되는 상관계수를 의미한다.

Fig. 1 은 곱분해 기법을 이용한 통계적 모멘트 기반 강건최적설계 기법의 흐름도이다.

### 4. 예 제

제안한 강건 최적설계 방법의 효율성을 보이기 위해 수학적 예제와 공학 예제에 적용하였다.

#### 4.1 수학 예제

Find  $\mathbf{x}$

$$\text{To minimize } f(\mathbf{x}) = 12 + x_1^2 + \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 x_2^2 + 100}{(x_1 x_2)^4} \quad (20)$$

$$\text{Subject to } G(\mathbf{x}) = \frac{5}{3}x_1 + x_2 - 5 \geq 0$$

$$\text{where } \mathbf{X}_i \sim N\left(\mathbf{x}_i, \left(\frac{1}{3}\right)^2\right), i=1,2$$

본 수학예제의 목적함수 형태는 볼록한 형상이고 선형 제한조건을 갖는 문제이다.<sup>(2)</sup> Table 1 은 곱분해 기법을 이용한 강건설계의 해와 결정론적 최적설계의 해를 나타냈다. 결정론적 최적설계의 해는 몬테카를로 모의실험을 통해 설계변수의 변동량에 대한 위반확률이 50%이지만 제안된 강건설계기법의 해는 제한조건을 99.99% 만족함을 알 수 있다. 또한 제안된 기법은 FOSM(First Order

Second-moment Method) 기법과 비교하여 비슷한 결과를 보여주는 것을 확인하였다.

#### 4.2 1/4 차량 현가장치 강건설계

1/4 차량 현가장치 문제<sup>(11)</sup>로서 강성계수와 도로 조건의 변화에 의해 가속도의 변동이 발생한다. 이때 가속도의 크기와 변동폭을 최소화 해야 한다.

Table 1 Robust optimal design results of a mathematical problem

	Determin. method	Proposed method	FOSM <sup>(2)</sup>
Objective	17.45	20.27	20.33
$x_1$	1.762	2.395	2.234
$x_2$	2.061	3.655	3.942
Constraint Mean	-0.0023	2.8267	2.8614
Constraint Variance	12.96	0.940	0.954
Satisfaction(%)	49.97	99.987	99.98

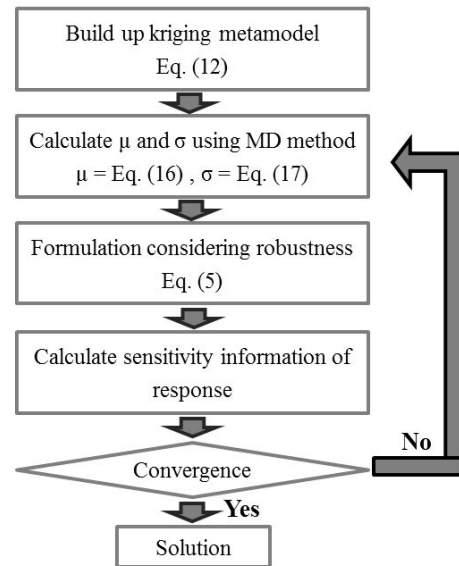


Fig. 1 Flowchart of robust design based on MD method

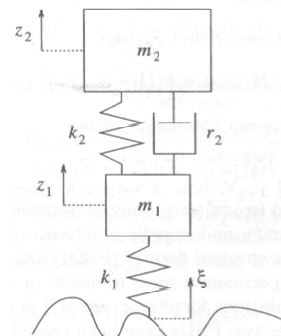


Fig. 2 Quarter car vehicle model

Fig. 2 는 1/4 차량 모델의 그림이고 설계변수는  $k_1, k_2, r_2$  이며 밀면의 도로조건인  $A_b$  가 환경변수로 작용하는 4 변수 예제이다. 특히  $A_b$  는 변화시킬 수 없지만 가속도의 변동에 큰 영향을 주므로 설계에 적용 해야 하는 환경변수이다. 정식화된 수식은 식 (21)과 같고, Table 2 는 초기 설계와 최적 설계 값에서의 변수, 목적함수, 목적함수의 평균과 분산을 나타냈다.

Table 2 는 초기 설계와 강건설계의 설계 변수 및 응답 그리고 통계적 특성 변화를 나타낸 표이다. 강건 최적설계 후 목적함수는 59.4% 의 개선되었고 통계적 모멘트는 평균이 63.6%, 분산이 51.6% 개선되었다. Fig. 3 은 몬테카를로 모의실험을 통해 초기 설계 값과 강건 최적설계 값을 비교한 그림이다. 초기 설계 값은 평균과 분산이 큰 응답이고 강건 최적설계 후 평균과 분산이 모두 개선되는 효과가 나타나는 것을 확인할 수 있다. 몬테카를로 모의실험은 10 만회 실시하였다.

Find  $\mathbf{b}=[k_1, k_2, r_2]$

$$\begin{aligned} \text{To minimize } F(\mathbf{b}, \mathbf{P}) &= w_1 \frac{\mu_Y(\mathbf{b}, \mathbf{P})}{\mu_Y^*} + w_2 \frac{\sigma_Y(\mathbf{b}, \mathbf{P})}{\sigma_Y^*} \\ Y &= \frac{1}{2m_2^2} A_b v \left( \frac{(m_2 + m_1)k_2^2}{r_2} + k_1 r_2 \right) \\ 60000 \leq k_1 \leq 240000, & 10000 \leq k_2 \leq 40000, \\ 600 \leq r_2 \leq 2400 & \\ \text{where } \mathbf{P}=[A_b] \quad A_b &\sim N(2e-5, 1.6e-11) \\ k_1 \sim N(120000, 100^2) \quad k_2 &\sim N(20000, 50^2) \\ r_2 \sim N(1200, 10^2) & \\ m_1 = 31kg, v = 60km/s, w_1 = 1, w_2 = 3 & \end{aligned} \quad (21)$$

4.3 축 진동판 강건설계

전자석과 스프링요소로 구성되어 있는 버저의 축 진동 문제이며 모델은 Fig. 4 와 같이 구성되었고 스프링의 구조에 모델의 주파수가 크게 가변하는 예제이다. 설계변수는  $\theta$  와  $\omega$  이며 버저는 1 차

Table 2 Robust optimal design results of quarter car vehicle

		Initial design	Optimum design
$\mathbf{b}$	$k_1$	120,000	60,000
	$k_2$	20,000	10,000
	$r_2$	1,200	903.48
$F(\mathbf{b}, \mathbf{P})$		4.069	1.651
$\mu_Y$		2.656	0.967
$\sigma_Y$		0.471	0.228

모드의 주파수가 240Hz 에서 가장 좋은 효율을 나타내기 때문에 강건설계가 필요한 예제이다. 목적함수를 식 (22)와 같이 설정함으로써 1 차 모드의 주파수가 240Hz 에 근접하도록 하였으며, 변수의 평균값에 해당하는 초기 부피보다 작도록 하였다.

Find  $\mathbf{b}=[\theta, \varpi]$

$$\begin{aligned} \text{To minimize } F(\mathbf{b}) &= w_1 \frac{\mu_Y(\mathbf{b})}{\mu_Y^*} + w_2 \frac{\sigma_Y(\mathbf{b})}{\sigma_Y^*} \\ Y &= (F - 240)^2 \text{ (Hz)} \\ \text{subject to } G(\mathbf{b}) &= V - V_{initial} \leq 0 \text{ (mm}^3\text{)} \\ 74 \leq \theta \leq 75, & 0.8165 \leq \varpi \leq 0.82 \\ \text{where } \theta &\sim N(74.5, 0.0833^2) \\ \varpi &\sim N(0.82, 0.00104^2) \\ w_1 = 1, w_2 = 3 & \\ V : \text{volume, } F : 1^{\text{st}} \text{ frequency} & \end{aligned} \quad (22)$$

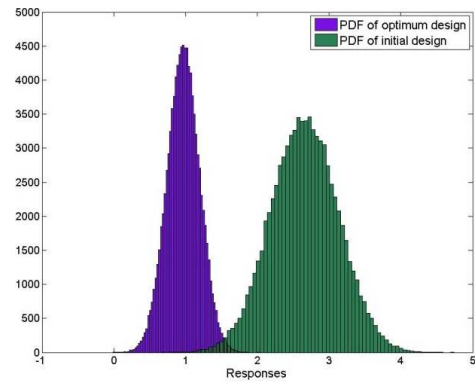


Fig. 3 Comparison of the PDF at initial design and optimum design using Monte Carlo simulation

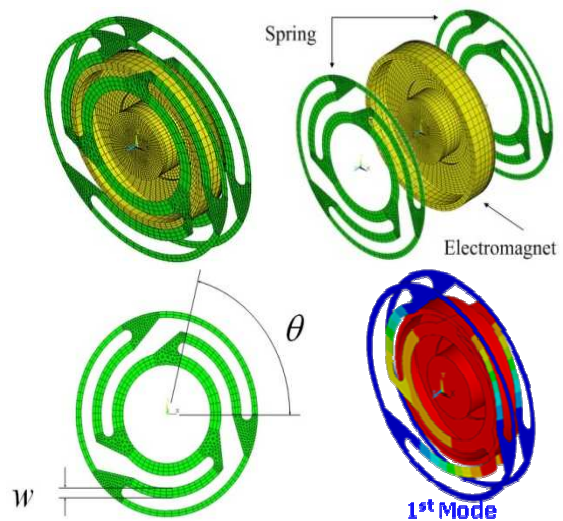


Fig. 4 Finite element model, design variables and 1st mode of laterally vibrating plate

**Table 3** Robust optimal design results of laterally vibrating plate

		Initial design	Optimum design
<b>b</b>	$\theta$	74.5	74.1008
	$\omega$	0.81825	0.82
$F(\mathbf{b})$		60.8191	4.09982
$\mu_Y$		7.4657	1.6635
$\sigma_Y$		17.7545	0.1821
Constraint		0	-0.7217

Fig. 4 는 유한요소 모델과 설계변수, 그리고 1 차 모드를 나타낸 그림이다. 이 모델을 1 회 해석하는데 약 1 분의 시간이 소요되어 기존의 강건 최적설계기법을 적용하려면 오랜 계산 시간이 필요한 문제이다. 제안된 방법에서 총 64 번의 해석으로 메타모델을 만들고, 강건 최적설계를 수행한 결과 목적함수는 초기설계 값에 비해 93.27% 개선되었고, 응답의 평균은 77.72%, 분산은 98.97% 개선되었다.

## 5. 결 론

강건 최적설계의 연구에 대한 필요성은 크지만 많은 계산비용과 정확성 때문에 다양한 공학예제에 적용하는데 한계가 있다. 본 논문에서는 기존 강건 최적설계의 단점을 개선하기 위하여 곱분해 기법과 크리깅 메타모델을 사용한 강건 최적설계 기법을 제안하였다. 제안된 기법은 설계영역을 크리깅 메타모델로 근사하여 곱분해 기법에 적용함으로써 평균과 분산을 구하고 이를 최소화하는 기법이다. 본 논문에서 모멘트를 구하기 위해 사용된 곱분해 기법은 다중적분을 일차원 적분의 곱으로 변형하여 수치적 적분을 하지 않고 비선형성이 강한 시스템의 통계적 모멘트를 정확히 구할 수 있다.

기존의 강건설계 연구에서 많이 이용되었던 2 변수 수학 문제와, 설계문제와 환경변수가 포함된 4 변수의 차량 현가장치 예제를 통해 강건 최적설계 기법을 적용함으로써 제안된 기법의 정확성을 확인하였다. 또한 공학예제인 축 진동판 강건설계는 총 64 번의 해석을 통해 강건 최적해를 얻어 매우 효율적인 기법임을 확인하였다.

본 논문에서는 변수의 확률분포를 정규분포로 가정하고 강건 최적설계를 수행하였다. 비정규분포의 경우 확률분포가 가우스 지수함수 형태로 표현할 수 없는 경우 다중적분의 적분형태가 1 차원 적분의 곱으로 변환되지 않아 곱분해 기법의 적용

이 힘들다. 따라서 변수의 확률분포가 비정규분포인 문제의 경우에 대해서는 향후 연구를 통해 고려하겠다.

## 후 기

본 논문은 국토해양부 특정연구과제인 “과일렛집 광시스템의 신뢰성 기반 최적설계 연구” 과제의 지원으로 수행되었습니다. 본 연구를 지원해주신 국토해양부 관계자들에게 감사 드립니다.

## 참고문헌

- (1) Phadke, M.S., 1989, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (2) Lee, K.H. and Park, G.J., 1997, “Robust Structural Optimization Considering the Tolerances of Design Variables,” *Trans. of the KSME (A)*, Vol. 21, No. 1, pp. 112~123.
- (3) Ramakrishnan, B. and Rao, S.S., 1996, “A General Loss Function Based Optimization Procedure for Robust Design,” *Engineering Optimization*, Vol. 25, pp. 255~276.
- (4) Jung, J.J., 2007, *Multiplicative Decomposition Method for Accurate Moment-based Reliability Method*, Ph. D. thesis, Hanyang University.
- (5) Park, G.J., Lee, T.H., Lee, K.H. and Hwang, K.H., 2006, “Robust Design : An Overview,” *AIAA*, Vol. 44, No. 1, pp. 181~191.
- (6) Matheron, G., 1963, “Principles of Geostatistics,” *Economic Geology*, Vol. 58, pp. 1246~1266.
- (7) Sacks, J., Welch, W.J., Mitchell, T.J. and Wynn, H.P., 1989, “Design and Analysis of Computer Experiments,” *Statistical Science*, Vol. 4, No.4, pp. 409~435.
- (8) Simpson, T.W., Mauery, T.M., Korte, J.J. and Mistree, F., 2001, “Kriging Models for Global Approximation in Simulation-Based Multidisciplinary Design Optimization,” *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 12, pp. 2234~2241.
- (9) Cho, S.K., Byun, H.S. and Lee, T.H., 2009, “Selection Method of Global Model and Correlation Coefficients for Kriging Metamodel,” *Trans. of the KSME (A)*, Vol. 33, No. 8, pp. 813~818.
- (10) Jung, D.H. and Lee, B.C., 2000, “Development of an Efficient Optimization Technique for Robust Design by Approximating Probability Constraints,” *Trans. of the KSME (A)*, Vol. 24, No. 12, pp. 3053~3060.
- (11) Mastinu, G., Gobbi, M. and Miano, C., 2005, *Optimal Design of Complex Mechanical Systems with Applications to Vehicle Engineering*, Springer.