East Asian Mathematical Journal
Vol. 28 (2012), No. 4, pp. 419-433
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2012.032

피타고라스 세 수를 구하는 다양한 문제해결 방법 탐구

김 동 근 · 윤 대 원[1)]

ABSTRACT. In this paper, by using the inductive method, recurrence relation, the unit circle, circle to inscribe a right-angled triangle, formula of multiple angles, solution of quadratic equation and Fibonacci numbers, we study various problem solving methods to find pythagorean triple.

Ⅰ. 서론

BC 2300년경 이집트인은 3, 4, 5의 길이를 이용하여 직각삼각형을 만들었다는 사실이 린드 파피루스에 기록되어 있으며, BC 400~500년경 인도에서는 15, 36, 39를 세 변으로 하는 직각삼각형을 만들었다. 그리고 오른쪽 그림과 같이, 우리나라의 신라시대 천문관 교육의 교재로 사용한 '주비산경'에는 '구(勾)를 3, 고(股)를 4라고 할 때 현(弦)은 5가 된다.'는 내용이 기록되어 있다. 그리고 '원론'에 제시된 내용을 기호를 사용해서 나타내면 직각삼각형에서 빗변을 c, 나머지 두 변을 각각 a, b라 할 때 그 관계식은 $c^2=a^2+b^2$으로 나타낼 수 있다. 이 관계식은 현재 중학교 3학년 단원에서 중요하게 다루고 있는 피타고라스 정리이다. 이 정리는 학교수학에서 직각삼각형의 두 변의 길이가 주어지면 나머지 한 변의 길이를 구하는 문제 - 예를 들어, $1:\sqrt{3}:2$, $1:1:\sqrt{2}$, $3:4:5$, $5:12:13$ 등을 단순히 암기함으로써 문제를 해결하는 것 - 에만 편중해 있다고 할 수 있다.

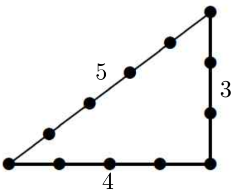

그림 3. 직각삼각형

하지만 제7차 수학과 교육과정(교육부, 1998)에서는 수학 교과를 '학생들의 유

2012년 7월 18일 투고, 2012년 8월 24일 심사완료
1) 교신저자
2000 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key words: 피타고라스 정리, 피타고라스 세 수, 다양한 문제해결 방법

연하고 다양한 사고 활동을 통하여 수학적 사고력과 창의력을 배양하는 교과'로, 2007 개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007) 및 2009 개정 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2009)에서는 수학 교과를 '수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과'로 성격을 규정하고 있다.

한 가지 문제에 대한 다양한 문제 해결 방법이나 여러 가지 현상이나 수학적 성질들에 대한 다양한 접근 방법은 수학교육의 목표를 달성하는데 있어서 중요하다고 할 수 있다. 그리고 Gotman & Skopets(한인기 외 4명, 2005, 재인용)는 다양한 방법으로 문제를 해결하는 것은 도형의 성질을 깊이 있게 탐구할 수 있음을 강조하였다.

피타고라스 세 수에 대한 선행연구로 이종우(2004)는 직각삼각형의 변의 길이가 될 수 있는 세 개의 양의 정수의 집합이라고 간단히 소개하고 있으며, 김응태 · 박승안(1989), 한인기(2005)는 이 세 수를 만족시키는 자연수 a, b, c를 찾는 디오판토스 방정식 즉, 2차 부정방정식에 대한 증명과 문제해결에 대해 고찰하였다. 또한, 박웅배 · 박혜숙(2002)에 따르면 3 이상인 임의의 자연수는 세 변의 길이가 모두 자연수인 직각삼각형의 한 변의 길이가 될 수 있음을 제시하였고, Little(2005)[2)]는 직각삼각형의 빗변(z)과 밑변(x 또는 y)의 길이의 차가 일정하면 즉 $z-x=k$ 혹은 $z-y=k$이면 피타고라스 세 수를 생성할 수 있음을 제시하고 있다. 이러한 연구의 대부분은 피타고라스 세 수에 대한 증명이나 이 세 수를 간단히 소개하는 것에 그치고 있으며, 피타고라스 세 수에 관한 다양한 접근 방법에 대한 연구가 부족한 실정이다.

따라서 본 연구에서는 자연수인 세 변의 길이들 중 피타고라스 정리를 만족하는 직각삼각형의 세 변의 길이를 구하는 방법들에 대해 먼저 완전제곱식, 점화식(recurrence relation), 배각의 공식, 이차방정식의 해를 이용한 Hatch와 Mills의 방법, 피보나치 수를 이용한 방법들을 소개한 후 학교수학에서 활용 가능한 귀납적 방법, 단위원을 이용한 방법, 원에 내접하는 직각삼각형을 이용한 방법에 대해 고찰해 보고자 한다.

II. 본론

피타고라스 세 수(pythagorean triple numbers)라는 것은 $a^2+b^2=c^2$을 만족시키는 자연수 3개를 한 쌍으로 하는 수를 의미한다. 고대 바빌로니아 시대의

2) http://fds.duke.edu/db/attachment/465

Plimpton 322에는 15쌍의 피타고라스 세 수가 기록되어 있다(이종우, 2004).

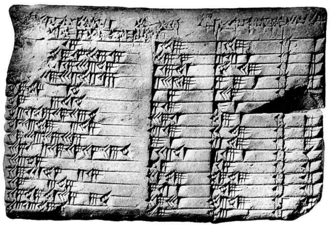

그림 4. Plimpton 322

본 연구에서는 첫째, Martin(Loomis, 1968, 재인용)이 제시한 피타고라스 세 수를 구하는 방법, 둘째, 점화식을 이용한 Richardson의 방법, 셋째, 배각의 공식을 이용한 Walker와 Ellis의 방법, 넷째, 이차방정식의 해를 이용한 Hatch와 Mills의 방법, 다섯째, 피보나치 수열을 이용한 Horadam의 방법들에 대해 살펴본 후 학교수학에서 활용 가능한 귀납적 방법, 단위원을 이용한 방법, 원에 내접하는 직각삼각형을 이용하여 피타고라스 세 수를 구하는 다양한 문제해결 방법에 대해 고찰해 본다.

1) 완전제곱식을 이용

Martin(Loomis, 1968, 재인용)은 완전제곱식을 이용하여 $(2pq)^2+(p^2-q^2)^2=(p^2+q^2)^2$이 성립함을 보임으로써 피타고라스 세 수 $p^2-q^2, 2pq, p^2+q^2$을 구하였다. 그 내용을 살펴보면

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=(x-y)^2+4xy \cdots (1)$$

이므로 여기서 $4xy$가 어떤 제곱수의 모양으로 나타난다면 피타고라스 정리가 성립함을 알 수 있다. 이 정리가 성립되도록 하는 $x=mp^2, y=mq^2$라고 가정하면 $4xy=4m^2p^2q^2=(2mpq)^2$와 같이 m, p, q에 대해서 모두 제곱의 수로 나타낼 수 있다. 이 값을 주어진 식(1)에 대입하여 정리하면

$$(mp^2+mq^2)^2=(mp^2-mq^2)^2+(2mpq)^2$$

이 된다. 양변에 공통 제곱 인수 m^2을 약분시켜 주면

$$(p^2+q^2)^2=(p^2-q^2)^2+(2pq)^2 \cdots (2)$$

(2)식에서 만족하는 세 수 $p^2-q^2, 2pq, p^2+q^2$는 피타고라스 세 수가 된다. 여기서 $p>q>0$인 자연수를 선택하면 피타고라스 세 수가 자연수가 되는 수들을 구할 수 있다.

예를 들어, $p=2, q=1$이면 $p^2-q^2=3, 2pq=4, p^2+q^2=5$ 즉 3, 4, 5를 얻을 수 있다. 또한,$p=3, q=2$이면 5, 12, 13이 되고, $p=3, q=1$이면 8, 15, 17이 되고,

$p=4$, $q=3$이면 7, 24, 25이 된다. 이처럼 (2)식의 p, q에 자연수를 대입하면 피타고라스 세 수를 찾을 수 있다.

2) 점화식 이용

피타고라스 세 수의 관계를 점화식으로 나타낼 수 있다면 제일 좋은 방법 중에 하나가 될 수 있을 것이다. <표 1>을 관찰해 보면 알 수 있듯이 피타고라스 세 수 사이에 여러 가지 패턴을 발견할 수 있다. 이에 Richardson[3]은 피타고라스 세 수 a, b, c에서 연속하는 두 수들 사이의 관계 즉 'a와 b', 'b와 c' 사이의 관계를 이용하여 피타고라스 세 수를 생성하는 행렬로 나타내었고, 이를 바탕으로 피타고라스 세 수 사이의 관계를 점화식으로 나타내었다.

먼저, a와 b가 연속된 자연수 즉 $b=a+1$인 경우에 대해 살펴보자. a와 b가 연속된 자연수의 경우일 때, 피타고라스 세 수들은 (3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169), (696, 697, 985)가 있다. 이렇게 나열되어 있는 세 수들 사이의 관계를 3×3행렬(matrix) A로 나타낼 수 있으며, 그 행렬 A가 다음과 같다고 하자.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

그렇다면

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 21 & 20 & 29 \\ 119 & 120 & 169 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21 & 20 & 29 \\ 119 & 120 & 169 \\ 696 & 697 & 985 \end{bmatrix}$$

이고, 이와 같은 해를 만족하는 행렬 A는

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

이다. 예를 들어, 처음 나오는 피타고라스 세 수 (3, 4, 5)의 다음에 나오는 세 수는

$$[\ 3 \quad 4 \quad 5\ ]\,A=[\ 20 \quad 21 \ \ 29\ ]$$

와 같다. 이러한 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있고

$$[\ a_{n+1} \quad b_{n+1} \quad c_{n+1}\ ]=[\ a_n \quad b_n \quad c_n\ ]\,A$$

라고 할 수 있다. 이런 관계식으로부터 각각의 수를 점화식으로 나타낼 수 있으며, 그것은 다음과 같다.

$$a_{n+1}=3a_n+2c_n+1$$
$$b_{n+1}=3a_n+2c_n+2=a_{n+1}+1$$
$$c_{n+1}=4a_n+3c_n+2$$

3) http://www.math.twsu.edu/~richardson/pythagoreantriples.html

여기서 $a_1 = 3,\ b_1 = 4,\ c_1 = 5$이고 $b_n = a_n + 1$이다.

다음으로 b와 c가 연속된 자연수 즉 $c = b+1$인 경우에 대해 살펴보자. b와 c가 연속된 자연수의 경우일 때, 피타고라스 세 수들은 (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41)가 있다. 이렇게 나열되어 있는 세 수들 사이의 관계를 3×3 행렬(matrix) B로 나타낼 수 있으며, 이 행렬 B가 다음과 같다고 하자.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

그렇다면

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 12 & 13 \\ 7 & 24 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 13 \\ 7 & 24 & 25 \\ 9 & 40 & 41 \end{bmatrix}$$

이고, 이와 같은 해를 만족하는 행렬 B는

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

와 같다. 앞의 방법과 마찬가지로, 이러한 관계를 점화식으로 나타내어 보면

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \end{bmatrix} B$$

라고 할 수 있다. 이런 관계식으로부터 각각의 수를 점화식으로 나타낼 수 있으며, 그것은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2 \\ b_{n+1} &= 2a_n + b_n + 2 \\ c_{n+1} &= 2a_n + b_n + 3 = b_{n+1} + 1 \end{aligned}$$

여기서 $a_1 = 3,\ b_1 = 4,\ c_1 = 5$이고 $c_n = b_n + 1$이다.

3) 배각의 공식을 이용

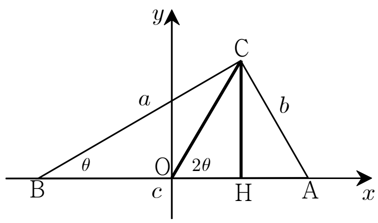

그림 5. $\sin 2\theta$과 $\cos 2\theta$ 이용

위의 <그림 3>에서 $\sin\theta = \dfrac{b}{c}$이고 $\cos\theta = \dfrac{c}{a}$이다. 배각의 공식 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$,

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$을 이용하면 $\sin 2\theta = \frac{2ab}{c^2}$, $\cos 2\theta = \frac{a^2-b^2}{c^2}$이 된다. 따라서 $\tan 2\theta = \frac{2ab}{a^2-b^2}$이므로 $\overline{\mathrm{OH}} = a^2-b^2$, $\overline{\mathrm{CH}} = 2ab$가 되고 빗변 $\overline{\mathrm{OC}} = a^2+b^2$이 된다. 그러므로 $\triangle\mathrm{COH}$의 세 변의 길이는 피타고라스 세 수가 된다.

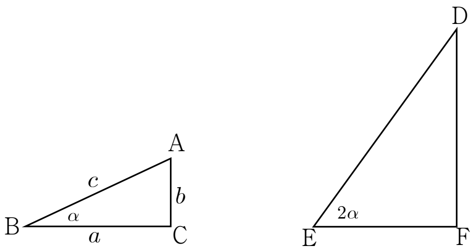

그림 6. $\tan 2\theta$를 이용

Walker(1945) & Ellis(1975)은 각각 위의 <그림 3>와 <그림 4>에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 때 쓰이는 공식 즉, 배각의 공식을 이용하여 피타고라스 세 수를 구하였다. 그 내용을 살펴보면 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\tan\alpha = \frac{b}{a}$이므로 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\frac{2b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2-b^2} \cdots\cdots (\ast)$$

$\triangle\mathrm{DEF}$에서 $\angle\mathrm{DEF} = 2\alpha$라고 하자. 그러면 $(\ast)$식에 의해 $\overline{\mathrm{EF}} = a^2+b^2$, $\overline{\mathrm{DF}} = 2ab$라고 할 수 있다. 따라서 $\overline{\mathrm{DE}} = a^2+b^2$이므로 a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2은 피타고라스 세 수가 된다.

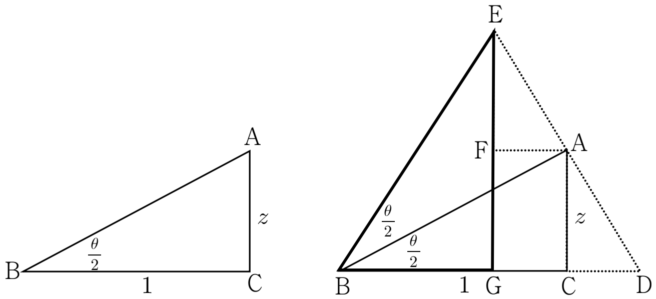

그림 7. 사인 함수와 코사인 함수를 유리함수로 이용

위의 <그림 5>의 왼쪽처럼, Nelsen(1997)은 $\angle\mathrm{ABC} = \frac{\theta}{2}$이고 $\overline{\mathrm{BC}} = 1$, $\overline{\mathrm{AC}} = z$인

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\tan\frac{\theta}{2}=z$이면 사인 함수와 코사인 함수를 유리함수 즉, $\sin\theta=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos\theta=\frac{1-z^2}{1+z^2}$가 되도록 만들기 위해 <그림 5>의 오른쪽과 같이 제시하였다. 여기서 $0<z<1$인 유리수를 $z=\frac{q}{p}$(단, p와 q는 서로소이고 $p>q>0$)라고 하면 앞에서 살펴보았듯이, 피타고라스 세 수가 되다고 할 수 있다. <그림 5>과 같이 $\triangle\mathrm{ABC}$의 $\angle\mathrm{A}$가 직각이 되도록 변 BC를 연장하여 만나는 점을 D라고 하자. 삼각형의 닮음의 성질을 이용하면 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=z^2$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD}}=1+z^2$이다. 그리고 <그림 5>에서와 같이 $\triangle\mathrm{ABC}$와 합동인 삼각형을 변 AD의 연장선에 변 AE가 놓이도록 $\triangle\mathrm{EFA}$를 잡자. 그러면 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{GC}}=z^2$이 되고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{FG}}=z$이므로 $\overline{\mathrm{EG}}=2z$이다. 그리고 $\overline{\mathrm{BG}}=1-z^2$이다.

4) 이차방정식의 해를 활용

피타고라스 세 수 x, y, z를 관찰하여 보면 x와 y가 연속인 정수 즉, $y=x+1$인 경우가 있다. 이를 좀더 일반화하여 Hatch(1995)와 Mills(1996)는 피타고라스 세 수를 구하는 알고리즘을 제시하였다(Dye & Nickalls, 1998, 재인용). 그 내용을 살펴보면 다음과 같다.

먼저 $z=y+b$라고 하자. 그러면 $x^2+y^2=(y+b)^2$이 되고, $y=\frac{(x^2-b^2)}{2b}$이 된다. 그렇다면 세 수는

$$x, \left(\frac{x^2-b^2}{2b}\right), \left(\frac{x^2+b^2}{2b}\right)$$

로 표현할 수 있다.

다음으로 $y=x+a$라고 하자. 그러면 $x+a=\frac{(x^2-b^2)}{2b}$이 된다. 그래서

$$x^2-2bx-(b^2+2ab)=0 \cdots\cdots (1)$$

이다. 여기서 $a=1$이면 (1)식은 다음과 같이 된다.

$$x^2-2bx-(b^2+2b)=0 \cdots\cdots (2)$$

또한 만약 $b=1$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$이 되고, 주어진 이차방정식의 근 $x=3, x=-1$이 된다. $x=3$이면 $y=4$, $z=5$이 되고, $x=-1$이면 $y=0$, $z=1$이 된다. $a=1$일 때 다음 b의 값을 알 필요가 있다. $a=1$일 때 $y=x+1$을 만족하는 세 수는 $20, 21, 29$이고 이때 $b=8=3+5$이다. 이것으로부터 x_n, y_n, z_n을 n번째 피타고

라스 세 수의 수열이라고 한다면, 관계식 $b_{n+1}=x_n+z_n$으로 나타낼 수 있다. 이런 관계식을 사용하여 $b_2=3+5=8$이다. 방정식 (2)는 다음과 같이 된다.

$$x^2-16x-80=(x-20)(x+4)=0$$

여기서 $a=1$이고 $b=8$이면 두 번째 세 수 20, 21, 29를 구할 수 있다.

b_n	$x^2-2bx-(b^2+2b)=0$	피타고라스 세 수		
		x	y	z
$b_1=1$	$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$	3	4	5
$b_2=3+5$	$x^2-16x-80=(x-20)(x+4)=0$	20	21	29
$b_3=20+29$	$x^2-98x-2499=(x-119)(x+21)=0$	119	120	169
$b_4=119+169$	$x^2-576x-83520=(x-696)(x+120)=0$	696	697	985

5) 피보나치 수(fibonacci number)를 이용

다음과 같이 나열되어 있는 수열을 피보나치 수열이라고 한다.

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	$\cdots$
1	1	2	3	5	8	$\cdots$

피보나치 수열로부터 아래와 같은 관계식을 만족하는 세 수 $F_n \cdot F_{n+3}$, $2F_{n+1} \cdot F_{n+2}$, $(F_{n+1})^2+(F_{n+2})^2$는 역시 피타고라스 세 수가 됨을 제시하고 있다(Horadam, 1961).

$$\{F_n \cdot F_{n+3}\}^2+\{2F_{n+1} \cdot F_{n+2}\}^2=\{(F_{n+1})^2+(F_{n+2})^2\}^2$$

이것을 직각삼각형 ABC의 세 변 즉 $\overline{\mathrm{AB}}=F_n \cdot F_{n+3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2F_{n+1} \cdot F_{n+2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=(F_{n+1})^2+(F_{n+2})^2$라고 하자.

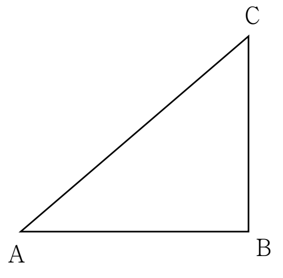

그림 8. 직각삼각형

피보나치 수열의 정의에 의해 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 즉 $F_n=F_{n+2}-F_{n+1}$이고

$F_{n+3}=F_{n+2}+F_{n+1}$와 같이 나타낼 수 있다.

그리고 $\overline{\mathrm{AB}}=(F_{n+2}-F_{n+1})\cdot(F_{n+2}\cdot F_{n+1})=(F_{n+2})^2-(F_{n+1})^2$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\{(F_{n+2})^2-(F_{n+1})^2\}^2$이다. 또한, $\overline{\mathrm{BC}}=2F_{n+1}\cdot F_{n+2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}}^2=4(F_{n+1})^2\cdot(F_{n+2})^2$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\{(F_{n+1})^2+(F_{n+2})^2\}^2$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$가 성립한다.

6) 귀납적 방법

아래의 <표 1>은 피타고라스 정리를 만족하는 세 수, 즉 자연수들 중 그 일부를 나타낸 것이다. 다음으로 피타고라스 세 수를 구하는 다양한 문제 해결 방법에 대해 살펴보자.

표 1. 피타고라스 세 수들

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	5	12	13	7	24	25	8	15	17	9	40	41
11	60	61	12	25	37	13	84	85	15	112	113	16	63	65
17	144	145	19	180	181	20	21	29	20	99	101	21	220	221
23	264	265	24	143	145	25	312	313	27	364	365	28	45	53
28	195	197	29	420	421	31	480	481	32	255	257	33	56	65
33	544	545	35	612	613	36	77	85	36	323	325	37	684	685
39	80	89	39	760	761	40	399	401	41	840	841	43	924	925
44	117	125	44	483	485	48	55	73	48	575	577	51	140	149
52	165	173	52	675	677	56	783	785	57	176	185	60	91	109
60	221	229	60	899	901	65	72	97	68	285	293	69	260	269
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
108	725	733	111	680	689	115	252	277	116	837	845	119	120	169
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
615	728	953	616	663	905	696	697	985						

위의 <표 1>을 관찰해 보면 우선 a가 홀수일 때 b와 c의 차가 1이 되는 규칙을 발견할 수 있고, 다음으로 a가 짝수일 때 b와 c의 차가 2가 되는 규칙을 발견할 수 있다.

우선 a가 홀수이면 b와 c의 차가 1이 되는 경우에 대해 살펴보자.

표 2. a가 홀수인 경우

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113

표 3. a가 짝수인 경우

a	b	c
8	15	17
16	63	65
20	99	101
24	143	145
28	195	197
32	255	257
36	323	325

위의 <표 2>에서 나타난 것처럼 귀납적으로 추측해 보면 a는 홀수이며

$$b+c=a^2 \cdots\cdots (1)$$

이 됨을 알 수 있다. 예를 들어, $4+5=3^2$, $12+13=5^2$이 된다. 또한

$$c-b=1 \cdots\cdots (2)$$

이 되는 규칙을 발견할 수 있다. (2)에서 $c=b+1$이므로 이 식을 (1)에 대입하여 보면 $b=\dfrac{a^2-1}{2}$이 되고, $c=\dfrac{a^2+1}{2}$이 된다. 따라서 $a^2+\left(\dfrac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a^2+1}{2}\right)^2$이 되므로 a, $\dfrac{a^2-1}{2}$, $\dfrac{a^2+1}{2}$은 피타고라스 세 수가 된다. 그리고 a는 1보다 큰 홀수이므로 $a=2k+1$(단, k는 자연수)라고 하면 $2k+1,\ 2k^2+2k,\ 2k^2+2k+1 \cdots\cdots (\ast)$
의 꼴도 피타고라스 세 수가 된다. 특히 Evans(1991)는 다음과 같은 패턴을 제시하고 있다.

$$1\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \{3,\ 4,\ 5(=4+1)\}$$
$$2\frac{2}{5}=\frac{12}{5} \quad \rightarrow \quad \{5,\ 12,\ 13(=12+1)\}$$
$$3\frac{3}{7}=\frac{24}{7} \quad \rightarrow \quad \{7,\ 24,\ 25(=24+1)\}$$

즉, Evans는 직각삼각형의 두 밑변은 분수꼴로 주어지고 빗변은 분자의 값에 1을 더해 얻을 수 있음을 보이고 있다. 이런 패턴을 $(\ast)$식으로 이끌어 낼 수 있다. 두 밑변 중 $2k^2+2k$를 $2k+1$로 나누어 분수꼴로 나타내면

$$\frac{2k^2+2k}{2k+1}=k+\frac{k}{2k+1}=k\frac{k}{2k+1}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

다음으로 a가 짝수이면 b와 c의 차가 2가 되는 경우에 대해 살펴보자. 앞의 <표 3>에서 나타난 것처럼 귀납적으로 추측해 보면 a는 4의 배수가 되며

$$b+c=\frac{1}{2}a^2 \cdots\cdots (3)$$

이 됨을 알 수 있다. 예를 들어, $15+17=32=\frac{64}{2}=\frac{8^2}{2}$, $63+65=128=\frac{256}{2}=\frac{16^2}{2}$ 이 된다. 또한,

$$c-b=2 \cdots\cdots (4)$$

가 되는 규칙을 발견할 수 있다. (4)식에서 $c=b+2$이므로 이 식을 (3)식에 대입하여 보면 $b=\frac{a^2-4}{4}$이 되고, $c=\frac{a^2+4}{4}$이 된다. 따라서 $a^2+\left(\frac{a^2-4}{4}\right)^2=\left(\frac{a^2+4}{4}\right)^2$이 되므로 a, $\frac{a^2-4}{4}$, $\frac{a^2+4}{4}$은 피타고라스 세 수가 된다. 하지만 이런 귀납적 방법으로 피타고라스 세 수를 모두 찾을 수는 없다. 그리고 a는 4의 배수이므로 $a=4k$ (단, k는 자연수)라고 하면 $4k$, $4k^2-1$, $4k^2+1$의 꼴도 피타고라스 세 수가 된다.

7) 단위원을 이용

단위원을 이용하여 피타고라스 세 수를 구하여 보자. 원 위의 한 점은 수직인 두 직선의 그 교점과 같다. $a^2+b^2=c^2$에서 양변에 c^2으로 나누면 반지름의 길이가 1인 원의 방정식 $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$을 얻을 수 있다. 이때, $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$라 하면 간단히 $x^2+y^2=1$로 나타낼 수 있으며, x, y는 유리수라고 할 수 있다.

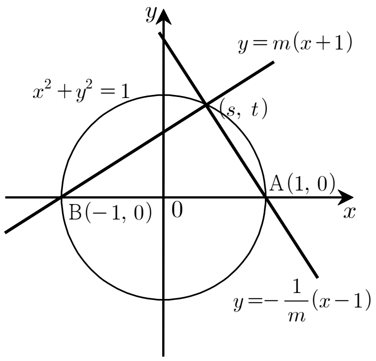

그림 9. 단위원

원 위의 점(s, t)는 수직인 두 직선의 교점이다. 다시 말하면, 기울기가 m이고 B$(-1, 0)$을 지나는 직선의 방정식 $y=m(x+1)$(단, $0<m<1$인 유리수)과 기울기가 $-\frac{1}{m}$이고 A$(1, 0)$을 지나는 직선 $y=-\frac{1}{m}(x-1)$의 교점이 곧 점(s, t)가 된다. 교점의 좌표를 구해보면

$$m(x+1)=-\frac{1}{m}(x-1)$$

이므로 $x=\frac{1-m^2}{1+m^2}$이 된다. 이 x의 값을 주어진 직선의 방정식에 대입하면 $y=\frac{2m}{1+m^2}$이 된다. 그렇다면 $1-m^2,\ 2m,\ 1+m^2$은 피타고라스 세 수가 된다고 할 수 있다. 왜냐하면 기울기 m은 유리수라고 했으므로 $m=\frac{q}{p}$(단, p와 q는 서로소이고 $p>q>0$)라고 하자. 이것을 교점에 대입하면 $s=x=\frac{a}{c}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, $t=y=\frac{b}{c}=\frac{2pq}{p^2+q^2}$이 되므로 $a=p^2-q^2,\ b=2pq,\ c=p^2+q^2$은 피타고라스 세 수가 된다고 할 수 있다.

다음으로 기울기가 m인 직선과 원과의 교점을 이차방정식에서 인수 정리를 이용하여 피타고라스 세 수를 구할 수 있다[4] 그 교점을 구하기 위해서는 $y=m(x+1)$를 원의 방정식 $x^2+y^2=1$에 대입하여 정리하면

$$(m^2+1)x^2+2m^2x+(m^2-1)=0 \cdots\cdots (\ast)$$

이 된다. 직선과 원은 서로 다른 두 점에서 만나는데 그 중 한 교점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이므로 $(\ast)$식은 $x+1$을 인수로 가진다. 따라서 $(m^2+1)x^2+2m^2x+(m^2-1)=(x+1)\{(m^2+1)x+(m^2-1)\}$과 같고 $(\ast)$식의 다른 한 근은 일차방정식 $(m^2+1)x+(m^2-1)=0$의 한 근과 같다. 그러므로 $x=\frac{1-m^2}{1+m^2}$이 된다. 또한 $y=\frac{2m}{1+m^2}$이 된다. 마지막으로 Lyons(2005)는 역함수를 이용하여 교점의 좌표를 구하였다. 기울기 $m=\frac{y}{1+x}$이 되고 역함수를 $s^{-1}(m)$라고 할 때, 그 교점의 좌표는 $\left(\frac{2m}{1+m^2},\ \frac{1-m^2}{1+m^2}\right)$이 된다.

8) 원에 내접하는 직각삼각형

삼각형 ABC가 일반삼각형이고 점 O가 빗변 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 되면 잘 알려져 있듯이 중선의 정리 즉 $\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{OC}}^2\right)$가 성립한다. 이 정리에서 삼각형 ABC가 직각삼각형이 되면 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$가 되어 피타고라스 정리가 성립한다. 즉 중선의 정리는 피타고라스 정리의 일반화라고 할 수 있다.

4) http://www.math.brown.edu/~jhs/frintch2ch3.pdf

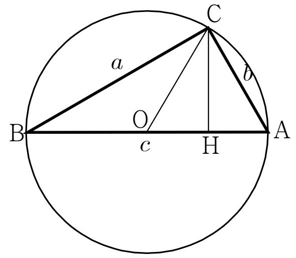

그림 8. 원에 내접하는 직각삼각형

그리고 삼각형 ABC가 직각삼각형이 되면 <그림 8>와 같이 원에 내접하는 직각삼각형이 된다. 이때 원의 중심은 삼각형의 외심이 된다. 여기서 빗변의 길이를 c라 하면, 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=\frac{c}{2}$이다. 그리고 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 구하기 위해서 삼각형의 넓이를 이용하면 $\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}c\cdot\overline{\mathrm{CH}}$이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=\frac{ab}{c}$이다. 그 다음 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{\mathrm{OH}}$를 구하면 $\frac{a^2-b^2}{2c}$이다. 그리고 $\triangle\mathrm{COH}$의 세 변의 길이의 비를 구해보면 $\frac{a^2-b^2}{2c}:\frac{ab}{c}:\frac{c}{2}=a^2-b^2:2ab:c^2$이고 $c^2=a^2+b^2$과 같으므로 $\triangle\mathrm{COH}$의 세 변의 길이 a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2는 피타고라스 세 수가 된다.

III. 결론

피타고라스 정리를 이용하여 문제를 해결할 때, 대부분의 중학교 3학년의 학생들은 피타고라스 세 수 예를 들어 $1:\sqrt{3}:2$, $1:1:\sqrt{2}$, $3:4:5$를 단순히 암기하여 이용하는 것으로만 그치고 있다.

본 연구에서는 피타고라스 세 수를 구하기 위해 먼저 완전제곱식, 점화식, 배각의 공식, 이차방정식의 해, 피보나치 수를 이용한 방법들에 대해 살펴보았으며, 수학적 사고 중의 하나인 귀납적 방법, 학교수학에서 활용 가능한 단위원에서 수직인 두 직선의 기울기 혹은 역함수, 그리고 원에 내접하는 직각삼각형을 이용하여 피타고라스 세 수를 구하는 다양한 문제 해결방법에 대해 고찰하였다.

피타고라스 세 수에 대한 탐구는 계산기나 컴퓨터를 이용하여 규칙성이나 패턴을 찾아봄으로써 학생들의 수학적 탐구 능력을 길러 줄 수 있을 뿐만 아니라, 자연수, 정수, 더 나아가 유리수의 성질을 이해하는데 도움이 될 것이다. 그리고 세 변이 유리수인 직각삼각형의 넓이가 자연수 즉 합동수(congruent number)를 구하는데 용이하다. 또한 학생들의 탐구심이나 호기심을 자극할 수 있다는 점에

서 의미가 있다. 그리고 학생들의 창의적인 탐구 활동 방법 및 방향에 대해 교수학적으로 의미 있는 시사점을 제시하였다고 본다.

그리고 본 연구는 피타고라스 세 수를 처음 학습하는 중학교나 삼각함수를 다루는 고등학교에서 심화 자료로 이용될 수 있을 뿐만 아니라, 하나의 정리로부터 다양하고 끊임없는 탐구 즉 확산적 사고가 수학을 바라보는 시각을 폭넓게 확장시킬 수 있다고 기대된다.

참고문헌

[1] 교육부(1998), 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

[2] 교육인적자원부(2007), 수학과 교육과정, 교육인적자원부 고시 제2007-79호 [별책 8].

[3] 교육과학기술부(2009), 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2009-41호 [별책 8].

[4] 김응태 · 박승안(1989), 정수론, 서울: 이우출판사.

[5] 박웅배 · 박혜숙(2002), 피타고라스의 세 수, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 제41권 제 2 호, 227-231.

[6] 이종우(2004), 기하학의 역사적 배경과 발달, 서울: 경문사.

[7] 한인기(2005), 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

[8] 한인기 외 4명(2005), 사인의 덧셈정리에 대한 다양한 증명방법 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 제19집 제2호, 485-5021.

[9] Dye & Nickalls(1998), A new algorithm for generating Pythagorean triples, *The Mathematical Gazette,* 82, 86-91.

[10] Horadam, A. F.(1961), Fibonacci number triples, *American Mathematical Monthly*, 68, 751-753.

[11] Ellis, L. E.(1975), More properties of Pythagorean triplets, *The Mathematical Gazette,* 59, 186-189.

[12] Evans, C.(1991), Pythagorean triples. *The Mathematical Gazette,* 75, 317.

[13] Eves, H.(1964), *An Intorduction to the History of Mathematics*, N Y: Holt, Rinehart and Winston (이우영 · 신항균 역(1995), 수학사, 서울: 경문사).

[14] __________(2004), *Great Moments in Mathematics,* The Mathematical Association of America (허민 · 오혜영 역(1997), 수학의 위대한 순간들, 서울: 경문사).

[15] Loomis, E. S.(1968), *The Pythagorean Proposition*, Classics in Mathematics Education Series. Reston, VA. : NCTM.

[16] Nelsen, R. B.(1993), *Proof Without Words - Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America.
[17] Rideout, D.(2006), Pythagorean Triples and Fermat's Last Theorem, CMC Seminar, Waterloo.
[18] Walker, A. G.(1945), On note 1719, *The Mathematical Gazett*e, 29, 26.

<웹사이트>
[1]http://www.math.brown.edu/~jhs/frintch2ch3.pdf(단위원)
[2]http://fds.duke.edu/db/attachment/465
[3]http://docs.google.com/gview?url=http://csunix1.lvc.edu/~lyons/courses/mathrasoning/sample_paper.pdf&chrome=true (Lyons, 2005)(단위원)
[4]http://docs.google.com/gview?url=http://www.pearsonsuccessnet.com/ebook/workbooks/0-13-037878-X/0-13-063380-1/GE0702TA.pdf&chrome=true
[5]http://people.wcsu.edu/sandifere/Academics/2007Spring/Mat342/PythagTrip01.pdf

Kim Dong-Keun
Chunggu High School
806-6, Shinchun 3-dong, Dong-gu, Daegu, Korea
E-mail address: x-file-9513@hanmail.net

Yoon Dae Won
Department of Mathematics Education and RINS,
Gyeongsang National University,
Jinju, 660-701, Korea
E-mail address: dwyoon@gnu.ac.kr