

비선형 경사 균열면에서의 고조파 발생 특성 해석

Analysis of Harmonic Wave Generation in Nonlinear Oblique Crack Surface

김노유*[†], 양승용**

Nohyu Kim*[†] and Seungyong Yang*

초 록 비선형 스프링 모델과 섭동법을 기초로 비선형 균열면에 경사 입사된 초음파에 의해 발생하는 2차 고조파 초음파의 크기를 계산하였다. 비선형 균열계면에서 만들어지는 반사파와 굴절파의 기본주파수 성분과 2차 고조파 성분의 크기를 입사각과 균열계면의 계면강성을 변화키면서 조사하였다. 계면강성에 관계없이 균열계면이 초음파 진행 방향과 비슷한 경우 반사와 굴절파 모두에서 2차 고조파의 발생은 거의 없었지만, 그렇지 않은 경우에는 계면 입사각은 물론 계면 강성에 따라 2차 고조파의 크기는 크게 변화하였다. 투과파는 물론 반사파에서도 2차 고조파 성분이 유의성 있게 발생됨을 수치 해석을 통해 확인하였다.

주요용어: 비선형 균열계면, 2차 고조파, 초음파, 경사 입사, 계면강성

Abstract Based on the nonlinear spring model coupled with perturbation method, 2nd harmonic waves generated by oblique incident ultrasound on nonlinear crack interface were calculated and investigated. Reflected and transmitted waves from the interface were determined and analyzed at various angle of incidence for the cracks with different interfacial stiffness in order to estimate the 2nd harmonic generation of incident ultrasound. It was shown in computer simulation that the 2nd harmonic components changed much with the increase of incidence angle in both reflected and transmitted wave, but became very small when the incident angle approached toward 90 degree. It can be concluded that the 2nd harmonic component of reflected wave has a meaningful amplitude as much as the transmitted 2nd harmonic wave from partly closed crack.

Keywords: Nonlinear Crack Interface, 2nd Harmonic Wave, Ultrasound, Oblique Incidence, Interfacial Stiffness

1. 서 론

비선형 초음파 기술은 단립 균열면에서 발생하는 고조파를 이용하여 종래의 선형 초음파 기술에 비해 상대적으로 높은 감도의 결함 검출 능력(probability of detection)을 가지는 것으로 알려져 있다. 균열계면의 비선형성은 국부적인 계면 접촉부의 미세 탄소성 변형에 의한 것으로서 이의 해석을 위하여 크게 두 가지 접근 방법이 시도되어 왔다. Pecorari 등은 접촉면의 조도와 재료의 항

복강도 등을 고려한 미시역학(micro-mechanics) 모델과 통계적 해석 방법으로 비선형 특성을 해석하였으며, Solodov와 Biwa, Kim 등은 거시적인 계면 특성으로서 접촉 계면 강성을 정의하고 이를 기초로 비선형 스프링 모델을 사용하였다. 전자는 실제의 계면 형상 특성과 재료물성으로부터 구체적인 비선형 거동을 해석할 수 있지만 복잡한 단점이 있는 반면 후자는 재료특성으로부터 계면 비선형성을 직접적으로 해석하기 어려우나 비교적 간단하게 비선형 거동을 모델링하고 이해하기에 적

[접수일: 2012. 6. 25, 수정일: 2012. 8. 8, 게재확정일: 2012. 8. 10] *한국기술교육대학교 메카트로닉스공학부, **한국기술교육대학교 기계공학부, [†]Corresponding Author: Department of Mechatronic Engineering, Korea University of Technology and Education, Byungchun-Myun, Chunan 330-860, Korea (E-mail: nykim@kut.ac.kr)

합하다[1-4]. 그러므로 비파괴 검사를 목적으로 하는 비선형 초음파 기술에서는 후자의 모델을 많이 활용하고 있다. 이러한 후자의 해석 방법에서는 단립 균열 계면을 선형 및 비선형 강성계수를 가지는 비선형 스프링으로 가정하여 단립 균열에서의 고조파 발생 특성을 규명하는 연구가 진행되어 왔다. 비선형 초음파 기술에서의 실험은 통상 두 개의 고체 블록을 접촉시키면서 만들어지는 간단한 형상의 균열 계면을 대상으로 하여 이루어졌는데 실제적인 비파괴 검사에서는 균열 계면들이 표면과 평행하지 않은 것이 일반적이다. 실제 균열을 사용하여 실험을 하는 경우에도 예를 들면 Kawashima나 Jhang의 연구에서 사용한 용접부나 피로균열 시편을 보면, 고조파 신호 수신과 측정을 효과적으로 하기 위해 균열을 표면과 평행하도록 제작하였다[5,6]. 그러나 실제 용접부내의 균열들은 표면과 평행하지 않을 뿐더러 주로 경사각 탐상기술을 이용하기 때문에 균열 면과 초음파의 진행이 수직하지 않다.

따라서 본 연구에서는 이러한 경사 균열 계면에 입사되는 초음파가 만들어내는 비선형 반사 및 투과 굴절파의 고조파 성분을 해석하였다. 균열 계면의 계면강성을 기초로 비선형 스프링 모델을 이용하여 계면강성의 변화와 입사각의 변화가 어떻게 투과/반사파의 2차 고조파 성분에 영향을 주는 지 조사하였다.

2. 비선형 균열 계면의 해석모델

단립 균열면을 확대하여 보면 Fig. 1과 2에서와 같이 무수한 미소 돌출부가 서로 접촉하고 있으며 잔류응력에 의해 부분적으로 압축되고 있다. 이 돌출부들의 국부적인 탄소성 변형은 매우 비선형적인 것으로 알려져 있는데 외부 하중(계면응력)과 변형의 상관관계를 계면 강성으로 표시할 수 있다. 계면 강성은 선형 성분과 비선형 성분으로 나누어지며 계면에 평행한 방향으로의 선형강성을 K_1 , 수직한 방향에 대한 선형강성을 K_2 라고 정의하면 상대적으로 크기는 작지만 각 방향에 대한 비선형 성분을 각각 K_{1n} 과 K_{2n} 으로 가정할 수 있다. 이러한 선형 및 비선형 계면강성으로 정의되는 균열계면의 변위(u)-응력(σ) 관계는 다음 식과 같이 주어진다(계면의 수직방향).

$$\sigma(u_0 + \Delta u) = \sigma(u_0) + (\Delta u) \frac{\partial \sigma(u_0)}{\partial u} + \frac{1}{2} (\Delta u)^2 \frac{\partial^2 \sigma(u_0)}{\partial u^2} + \dots$$

$$\approx \sigma(u_0) + K_2 \cdot (\Delta u) + K_{2n} \cdot (\Delta u)^2 \text{ at } u = u_0 \quad (1)$$

where, $K_2 = \frac{\partial \sigma(u_0)}{\partial u}$ and $K_{2n} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(u_0)}{\partial u^2}$

이 균열계면에 종파 초음파가 하부로부터 경사 입사하게 되면 모드 변환과 함께 반사와 굴절이 일어나는데 이를 Fig. 3에서 나타내고 있다.

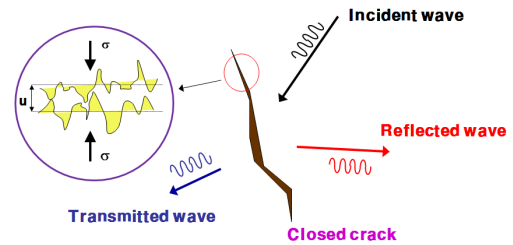


Fig. 1 Schematic diagram of acoustic scattering at crack interface

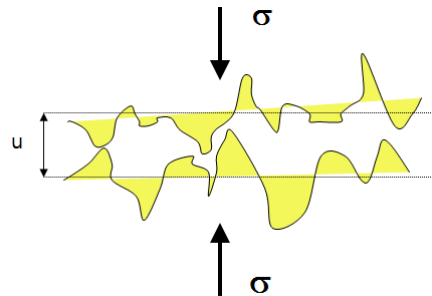


Fig. 2 Close-up cross-sectional view of crack interface under compression

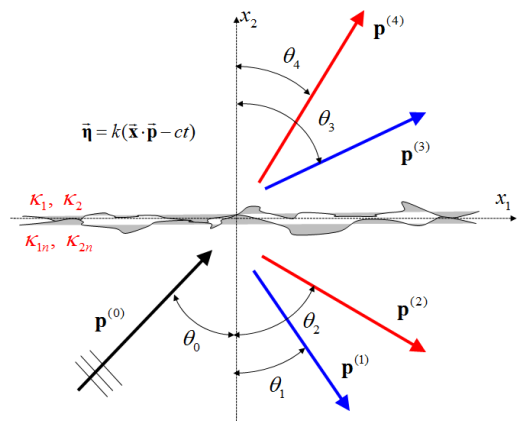


Fig. 3 Reflection and refraction of oblique incident wave at crack interface

Fig. 3에서 $p^{(0)}$ 는 입사파의 에너지 전파 벡터(propagation vector)를, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ 는 반사파의 종파와 횡파성분의 에너지 전파 벡터를, 그리고 $p^{(3)}$, $p^{(4)}$ 는 투과파의 종파와 횡파성분을 각각 나타낸다. 이때 에너지 전파 벡터 p 의 위첨자(superscript)는 파동의 모드를 표시하는데 홀수 1과 3은 종파, 짝수 2와 4는 횡파를 지시한다. 균열면의 평행 축과 수직 축 방향의 단위 기본 벡터를 (i_1, i_2) 라고 정의할 때 입사파, 굴절파, 반사파의 변위 벡터를 전파 벡터(propagation vector) p 와 위치 벡터 x 로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbb{U}^{(0)}(\mathbf{x}, t) &= A_0 e^{ik_0(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^{(0)} - ct)} [\sin\theta_0 i_1 + \cos\theta_0 i_2] \\ \mathbb{U}^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= A_1 e^{ik_1(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^{(1)} - ct)} [\sin\theta_1 i_1 - \cos\theta_1 i_2] \\ \mathbb{U}^{(2)}(\mathbf{x}, t) &= A_2 e^{ik_2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^{(2)} - ct)} [\cos\theta_2 i_1 + \sin\theta_2 i_2] \\ \mathbb{U}^{(3)}(\mathbf{x}, t) &= A_3 e^{ik_3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^{(3)} - ct)} [\sin\theta_3 i_1 + \cos\theta_3 i_2] \\ \mathbb{U}^{(4)}(\mathbf{x}, t) &= A_4 e^{ik_4(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^{(4)} - ct)} [-\cos\theta_4 i_1 + \sin\theta_4 i_2] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\mathbb{U}^{(0)}$ 는 입사 종파의 변위, $\mathbb{U}^{(1)}$ 과 $\mathbb{U}^{(2)}$ 는 반사 종파와 횡파, 그리고 $\mathbb{U}^{(3)}$ 과 $\mathbb{U}^{(4)}$ 는 투과 종파와 횡파의 변위를 표시하며, k_i, A_i 는 각 파동의 파수와 크기를, 그리고 c_i, c_t 는 종파와 횡파의 위상속도를 나타낸다.

3. 비선형 계면에서의 구성방정식

단힘 균열 계면에서 응력은 연속적이지만 변위가 불연속이므로 이 불연속성에 의해 만들어지는 특이성을 해소할 구속 조건이 필요하다. 이 조건은 계면강성의 도입을 통해 균열계면 상하의 응력과 변위의 관계식을 수립함으로써 얻어질 수 있다 [6,7]. 우선 Fig. 3의 단힘 균열 계면, 즉 $x_2 = 0$ 에서 계면의 윗 부분인 $x_2 = 0^+$ 에서의 응력과 $x_2 = 0^-$ 에서의 응력을 각각 τ_{ij}^u 와 τ_{ij}^l 라고 표시하면 그 두 응력들은 서로 연속이므로 x_1, x_2 각 방향에 대해 다음과 같은 연속식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \tau_{22}^{(0)} + \tau_{22}^{(1)} + \tau_{22}^{(2)} &= \tau_{22}^{(3)} + \tau_{22}^{(4)} & : x_2 \text{ direction} \\ \tau_{21}^{(0)} + \tau_{21}^{(1)} + \tau_{21}^{(2)} &= \tau_{21}^{(3)} + \tau_{21}^{(4)} & : x_1 \text{ direction} \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)에서 응력 $\tau_{ij}^{(m)}$ 의 위첨자 m 은 식(2)의 변위

$\mathbb{U}^{(m)}$ 에 의해 만들어지는 응력을 표시한다. 또한 $x_2 = 0^+$ 와 $x_2 = 0^-$ 에서의 변위를 각각 u_2^u 와 u_2^l 라고 표시하고, x_1 방향의 불연속 변위도 u_1^u 와 u_1^l 라고 표시하면 불연속 변위와 이들 응력간의 관계식은 계면에 수직인 방향과 평행인 두 방향에 대해 식(1)에서 정의된 계면강성을 이용해 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_{22}^{(3)} + \tau_{22}^{(4)} &= K_2(u_2^u - u_2^l) + K_{2n}(u_2^u - u_2^l)^2 \\ &: x_2 \text{ direction} \\ \tau_{21}^{(3)} + \tau_{21}^{(4)} &= K_1(u_1^u - u_1^l) + K_{1n}(u_1^u - u_1^l)^2 \\ &: x_1 \text{ direction} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$\begin{aligned} u_1^u &= u_1^{(3)} + u_1^{(4)}, \quad u_1^l = u_1^{(0)} + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \\ u_2^u &= u_2^{(3)} + u_2^{(4)}, \quad u_2^l = u_2^{(0)} + u_2^{(1)} + u_2^{(2)} \end{aligned}$$

식(4)에서 변위 $u_n^{(m)}$ 의 위첨자 숫자 m 은 변위벡터 $\mathbb{U}^{(m)}$ 의 m 을 지칭하며 아래 첨자(subscript) n 은 변위벡터 $\mathbb{U}^{(m)}$ 의 x_1, x_2 방향의 성분을 나타낸다. 또한 정상상태를 가정하여 시간에 대한 성분을 무시할 때 후크의 법칙으로부터 식(3)과 (4)의 각 응력 성분들은 다음과 같이 표시된다[8,9].

$$\begin{aligned} \tau_{22}^{(m)} &= iA_m k_m [(\lambda + 2\mu)d_2^{(m)} p_2^{(m)} + \lambda d_1^{(m)} p_1^{(m)}] e^{i\eta_m} \\ \tau_{21}^{(m)} &= iA_m k_m \mu [d_2^{(m)} p_1^{(m)} + \lambda d_1^{(m)} p_2^{(m)}] e^{i\eta_m} \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)에서 $\eta_m = k_m(x_1 p_1^{(m)} + x_2 p_2^{(m)})$ 인테 $p_1^{(m)}, p_2^{(m)}$ 은 Fig. 3에 나타난 각 파동의 전파 벡터 $p^{(m)}$ 의 x_1, x_2 방향의 성분이며, $d^{(m)}$ 은 변위벡터 $\mathbb{U}^{(m)}$ 의 입자운동의 방향 벡터로서 $d_1^{(m)}, d_2^{(m)}$ 은 방향 벡터 $d^{(m)}$ 의 x_1, x_2 방향의 성분을 나타낸다.

4. 경사 균열 계면에서의 고조파 발생

구성 방정식 (4)로부터 반사파와 굴절파의 고조파를 섭동법을 이용해서 계산하기 위해서는 우선 구성방정식에 대한 선형 해를 구해야 하는데 이를 위해서는 비선형 계면에서의 Snell's law를 먼저 구하고 이를 기반으로 선형 해를 결정하였다. Snell의 법칙은 앞 절에서 유도된 비선형 균열계면의

응력과 변위에 대한 경계 조건을 적용함으로써 구하였다. 즉, 모든 시간과 위치에서 경계조건 (3)이 성립하기 위한 조건으로부터 다음과 같은 Snell의 법칙이 얻어진다.

$$\frac{\sin \theta_0}{c_i} = \frac{\sin \theta_1}{c_i} = \frac{\sin \theta_2}{c_i} = \frac{\sin \theta_3}{c_i} = \frac{\sin \theta_4}{c_i} \quad (6)$$

식(6)과 $x_2 = 0$ 에서의 응력 연속조건으로부터 수직 응력 및 전단응력에 대한 연속조건인 식(4)를 정리하여 행렬식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = A_0 \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

식(7)에서 A_0 는 입사파의 크기(복소수)이며 A_1, A_2, A_3, A_4 는 반사 종파와 횡파, 투과 종파와 횡파의 크기를 각각 나타낸다. 식(7)의 계수행렬 a_{ij} 과 b_i 는 Lamé constant와 주파수, 계면강성, 입사각으로 구성된 상수이다(Appendix 참조). 식(7)에서 구한 선형 해는 선형 균열계면에 대해 얻어지는 투과 및 반사파의 크기를 결정하는 식이 되는데, 이것은 $K_{1n} = K_{2n} = 0$ 인 경우의 반사와 투과파의 크기를 의미한다.

이제 구해진 선형 해로부터 기본주파수 성분이 결정되면 섭동법을 이용하여 2차 고조파 성분을 유도할 수 있다. 구체적인 방법은 입사파를 제외하고 반사파와 투과파의 변위벡터가 기본 주파수 성분과 2차 고조파 성분으로 이루어졌다고 가정한 후 이것을 구성방정식에 대입하여 미지의 2차 고조파 성분의 크기를 결정하였다. 이러한 2차 고조파 성분의 크기를 반사 종파/횡파, 그리고 투과 종파와 횡파에 대해 각각 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$ 라고 정의하면 구성방정식은 다음과 같이 식(7)과 유사한 행렬식을 제공한다(자세한 절차와 행렬 계수는 Appendix 참조).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \\ A_{42} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

그러므로 식(7)과 (8)에서 구한 기본주파수 성분 (A_1, A_2, A_3, A_4)과 2차 고조파 성분($A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$)을 결합하여 비선형 경사 계면에서 얻어지는 반사파와 굴절파를 계산하였다.

5. 경사진 균열 계면에서의 고조파 발생

앞 절에서 유도한 행렬식 (8)이 일반적인 경사 균열계면에서 발생하는 2차 고조파 성분의 크기를 결정해 주지만 수직 입사 외에는 식(8)으로부터 모드 변환된 반사파와 투과파의 2차 고조파 성분을 명시적으로 나타내기는 불가능하다. 그러므로 Matlab을 이용하여 입사경사각의 변화에 따라 발생하는 2차 고조파의 성분 크기를 조사하였다. 이때 2차 고조파의 크기를 균열의 닫힘 정도(즉, 계면강성의 크기)에 따라 3가지 단계로 분류하여 비교하였다. 계면 강성의 절대적 크기는 고조파 발생의 측면에서 보면 그 자체로는 큰 의미가 없는데 그것은 고조파 발생특성이 주파수와 재료의 물성의 함수이기 때문이다(Appendix 참조). 그러므로 일반적으로 비 강성계수(specific interfacial stiffness)을 정의하는데 그것은 무차원수로서 계면 강성값을 임피던스와 주파수로 나눈 값, 즉 $\frac{K}{\rho c \omega}$ 으로 정의되며 이 값은 고조파 발생에 중요한 변수라고 하겠다. 따라서 본 논문에서는 이 비계면강성(선형) 값이 1일 때를 기준으로 그보다 작은 경우를 계면강성이 작은 경우로, 그리고 그 값이 1보다 클 경우를 계면강성이 큰 경우로 분류하여 고조파의 변화를 조사하였다.

5.1. 계면 강성이 작은 닫힘 균열($\frac{K}{\rho c \omega} \ll 1$)

계면 강성이 작은 경우에는 닫힘 균열면에 작용하는 압축 응력이 작아서 접촉면적의 변화가 심한 것이 특징이다. 그러므로 전체 계면의 응력-변형을 관계에 있어서 비선형성이 가장 크게 나타난다. 균열의 성장과정에서 본다면 어느 정도 균열이 성장한 경우라고 할 수 있어서 비파괴검사가 필수적인 결함의 단계라고 할 수 있겠다. 본 논문에서는 이러한 경우에 발생하는 고조파를 x_1, x_2 방향의 비계면강성 모두가 $\frac{K}{\rho c \omega} = 0.01$ 일 경우에 대하여 식(7)과 (8)을 이용하여 기본주파수 성분과

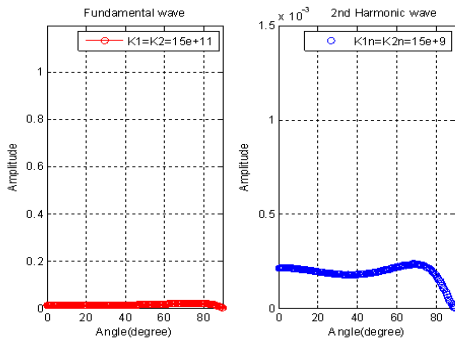


Fig. 4 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component(A_{31}, A_{32}) in transmitted longitudinal wave

2차 고조파의 크기를 계산하였다. 우선 투과파의 경우를 살펴보면 모드 변환에 의해 투과 종파와 횡파가 동시에 생성되므로 그 두 초음파에 대한 각각의 기본파와 고조파 성분을 계산하였다. Fig. 4는 이중에서 투과 종파의 결과를 나타낸 것으로서 좌측의 그림은 기본파 성분(A_3)의 크기변화를 나타내고, 우측은 2차 고조파(A_{32})의 크기 변화를 나타낸다.

이 그림에서 수직축은 입사 초음파에 대한 상대적 크기($A_3/A_0, A_{32}/A_0$)를 각각 표시하고 수평축은 입사각의 각도(degree)를 나타낸다. 이 계산에서 사용된 계면강성의 절대 값도 Fig. 4 안에 표시되어 있다. Fig. 4의 좌측 그림을 보면 접촉면이 비교적 느슨하게 연결되어 있는 상황이므로 투과 종파의 기본주파수 성분은 매우 작다. 이에 비해 투과 종파의 2차 고조파 성분은 그와 상관없이 80도 이상을 제외한 영역의 모든 입사각에서 상대적으로 큰 에너지를 가지는 것으로 나타났다(비강성이 다른 경우에 비해). 또한 그 크기의 변화도 입사각을 0°에서 80°까지 변화더라도 크지 않았다. 이는 중요한 결과로서 비선형 초음파에서 사용하는 2차 고조파를 이용할 경우 경사진 균열면의 경우라도 그 경사각에 관계없이 거의 수직인 균열을 제외하고는 그 검출이 가능함을 나타낸다. 하지만 균열면에 거의 평행하게 입사되는 초음파에 대해서는 2차 고조파가 크게 감소하여 입사파에 거의 평행인 균열면의 경우에는 고조파 성분이 거의 발생하지 않는다. 이것은 기본파의 경우도 마찬가지로 여서 균열면에 비슷한 방향으로 초음파가 진행하는 경우에는 투과 종파의 경우 기본파, 고조파 모

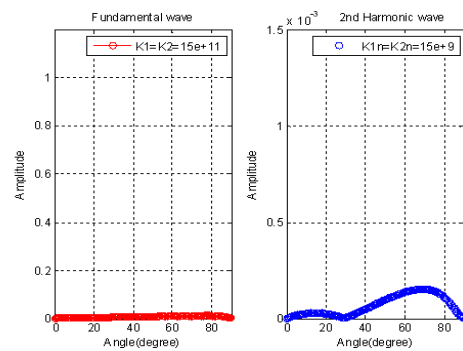


Fig. 5 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component(A_4, A_{42}) in transmitted transverse wave

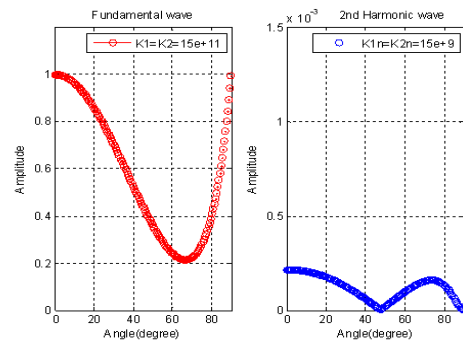


Fig. 6 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component(A_1, A_{12}) in reflected longitudinal wave

두 발생하지 않음을 알 수 있다.

다음으로 Fig. 5는 Fig. 4와는 달리 투과 횡파의 기본파 성분과 2차 고조파 성분을 나타내고 있다. Fig. 5에서 좌측의 기본파 성분의 경우에는 투과 종파와 마찬가지로 입사각을 0°에서 90°까지 변화시켰을 때 진폭이 상대적으로 작았다. 그러나 2차 고조파의 크기를 보면 비강성이 다른 경우에 비해 작지 않은데, 입사각이 0에서 소폭으로 증가한 후 30° 근처에서 감소하다가 다시 70°까지 증가한 후 90°에서 또 다시 감소하는 결과를 보여주고 있다. 그러므로 Fig. 5의 투과 횡파의 경우는 입사각이 작은 영역을 제외하고는 대체로 투과 종파의 결과인 Fig. 4와 비슷한 경향을 보이는 것을 알 수 있다.

Fig. 6은 균열부에서 반사된 종파의 기본파 성분과 2차 고조파 성분의 크기를 나타낸다. 기본파의 경우에는 그 크기가 일단 상대적으로 크고 그 변화도 심한데, 입사각이 작을 때에는 1에 가까운

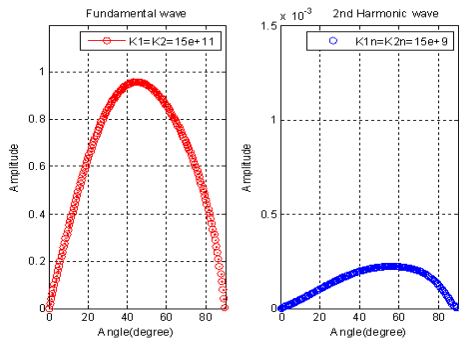


Fig. 7 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component(A_2, A_{22}) in reflected transverse wave

값을 나타내다가 각도가 증가하면서 감소한 후 90°에서 다시 진폭이 1에 가까워지는 결과를 보여 주고 있다. 2차 고조파의 경우에도 진폭이 큰 편이며 0°에서 50°까지 감소한 후, 70°까지 증가를 하다가 90°에서 다시 진폭의 값이 0이 되는 결과를 보여 준다. 입사각이 0°일 때 반사파의 기본주파수 성분과 2차 고조파 성분이 최대 값을 보여주며 입사각이 변함에 따라 기본파와 고조파의 크기가 큰 폭으로 변하는 것을 보여주고 있다.

다음으로 그림 Fig. 7은 경사 균열부에서 반사된 반사 횡파의 결과를 보여 주고 있다. 기본 주파수 성분의 경우 진폭도 크고 입사각에 대한 변화도 큰데, 입사각이 증가함에 따라 진폭이 증가하다가 45°를 지나면서 감소하여 90°에서 다시 진폭이 0이 되는 결과를 나타낸다. 2차 고조파의 경우에도 비슷한 패턴을 나타내는데 입사각이 60° 근방에서 최대 진폭을 가지다가 그 후에는 감소하여 90°에서 다시 진폭의 값이 0이 되었다.

Fig. 4에서 Fig. 7까지의 결과를 볼 때 비계면 강성이 1보다 작은 경우, 투과파의 기본 주파수 성분이 반사파의 기본주파수 성분에 비해 매우 작음에도 불구하고, 반사나 투과파에 관계없이 모두 2차 고조파 성분의 크기는 평균적으로 큰 차이가 없이 잘 발생됨을 알 수 있다. 이것은 비계면 강성이 1보다 작은 단힘 균열의 경우에는 비선형 초음파 검사에서 투과파를 사용하든 아니면 반사파를 이용하든, 그리고 종파와 횡파 중 어느 것을 이용하든, 2차 고조파의 발생 효율의 측면에서는 큰 차이가 없음을 의미한다. 다만 투과파를 이용하는 경우에는 종파가, 반사파를 이용하는 경우에는 횡파가 경사 균열의 불감한 영역이 적은 것으로 나타났다.

5.2. 중간 계면 강성의 단힘 균열($\frac{K}{\rho c \omega} = 1$)

크랙의 단힘 정도가 적당히 커서 균열면의 비계면 강성이 1인 경우에 대해서 경사 균열에 의해 발생하는 굴절 및 반사파의 고조파 성분을 조사하였다. Fig. 8은 비계면강성이 수직 및 수평방향으로 모두 $\frac{K}{\rho c \omega} = 1$ 인 경우에 대하여 투과(굴절) 종파의 고조파 성분의 크기를 입사각도의 변화에 따라 계산한 것이다. 기본 주파수 성분의 경우 입사각을 0°에서 80°까지 변화시켰을 때 나타나는 진폭은 거의 비슷한 약 0.6 정도의 값을 나타내다가 그 후에는 그 값이 급격히 감소하여 90°에서 소멸되는 특징을 나타내었다. 2차 고조파의 경우에는 0°에서 90°까지 입사각을 변화시켰을 때 0°에서 진폭이 최대값을 가지고 일정하게 감소하여 90°에서 zero에 가까워졌다. 균열부가 어느 정도 밀착되어 닫혀 있는 형태이기 때문에 입사각의 변화에 관계없이 기본파의 크기는 비교적 일정한 값을 가지며 (60도 이하에서) 2차 고조파는 상대적으로 크게 변화하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 9는 경사 균열부에서 발생하는 투과 횡파에 대한 계산 결과인데 기본파 성분의 경우 입사각에 따라 진폭이 증가하다 다시 감소하였다. 2차 고조파의 경우에도 비슷한 추이를 나타내지만 최대값이 약간 작은 것으로 계산되었다. 다음으로는 반사 종파의 기본파와 2차 고조파에 대한 크기 변화를 Fig. 10에 나타내었다. 기본파 성분은 입사각 0°에서 60°까지 감소한 후 90°까지 진폭이 증가하여 최종적으로는 1의 값을 가진다. 2차 고조파의

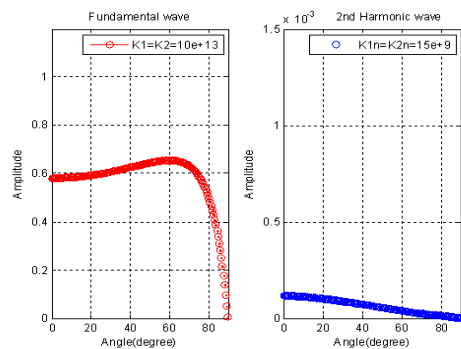


Fig. 8 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component(A_3, A_{32}) in transmitted longitudinal wave

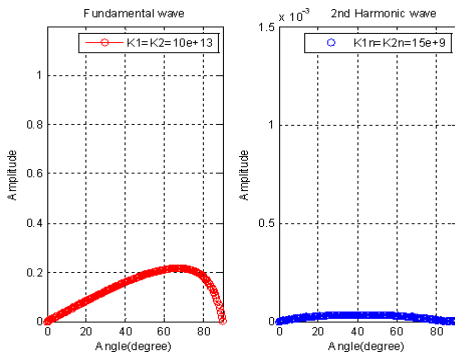


Fig. 9 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component(A_1, A_{12}) in transmitted transverse wave

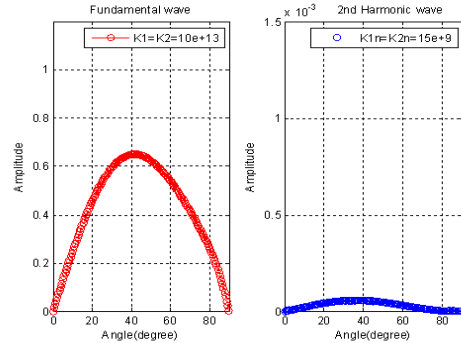


Fig. 11 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component(A_2, A_{22}) in reflected transverse wave

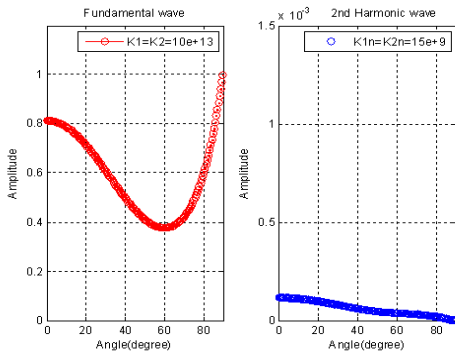


Fig. 10 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component(A_1, A_{12}) in reflected longitudinal wave

경우에는 입사각 0°에서 최대 진폭 값을 가진 후 진폭이 계속 감소하여 90°에서 0의 값을 가지는 것으로 나타났다.

Fig. 11에서는 반사 횡파의 변화 추이를 나타내는데, 기본파 성분은 입사각이 0°에서 45°까지 진폭이 증가한 후 감소하여 90°에서 0의 값을 가지는 것으로 나타났다. 2차 고조파의 경우에도 비슷한 경향을 보이지만 최대점의 위치는 약간 변화하였다.

Fig. 7부터 Fig. 11에 나타난 2차 고조파 발생 패턴을 분석해 보면 종파와 횡파의 모드에 따라 다른 특징을 보이고 있다. 투과파이든 반사파이든 종파의 경우에는 수직입사에서 가장 큰 고조파가 발생된 후 입사각의 증가에 따라 차츰 감소하여 90도에서 소멸하였다. 반면에 횡파의 경우에는 수직입사에서는 2차 고조파가 나타나지 않다가 입사각의 증가에 따라 40-60도 근방에서 최대값을 가

진 후 다시 감소하여 90도에서는 소멸하는 특징을 보이고 있다. 두 가지 모드의 2차 고조파는 모두 크기에 있어서 큰 차이를 나타내지 않고 있지만 종파의 경우가 전반적으로 약간 더 큰 것으로 조사되었다.

5.3. 계면 강성이 큰 닫힘 균열($\frac{K}{\rho c w} \gg 1$)

닫힘 균열 중에서 계면 강성이 매우 커서 거의 용접된 것과 같은 경우에 대해서 2차 고조파 성분을 조사하였다. 이러한 경우와 같은 균열계면은 재료 파손의 초기로서 생각될 수 있으며 균열로서의 성장이 아직 진행되기 전의 상태라고 추정할 수 있다. Fig. 12는 이 결과들 중에서 우선 투과 종파의 발생특성을 입사각도의 변화에 따라 계산한 것이다. 이 계산에서 사용된 비계면강성의 크기는 $\frac{K}{\rho c w} = 100$ 이다. Fig. 12의 왼편에 나타난 기본 주파수 성분은 입사각을 0°에서 90°까지 변화시켰을 때 진폭이 거의 1의 값을 일정하게 가지는 반면 2차 고조파의 경우는 진폭이 거의 0의 값을 일정하게 가진다. 이것은 균열부가 상당히 밀착되어 닫혀 있는 형태이기 때문에 입사각의 변화와 별로 관계하지 않고 기본파의 크기나 2차 고조파의 크기가 변화하지 않고 일정한 값을 가지는 것을 볼 수 있다.

이것은 균열계면이 용접된 것과 같은 거동을 하기 때문에 계면 상하면의 불연속성이 작아지고 이에 따라 계면에서의 접촉 비선형성이 작아지는 것을 뜻한다. 그러므로 고조파를 이용한 비선형 초

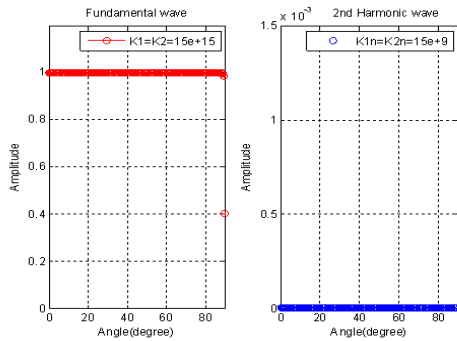


Fig. 12 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component (A_3, A_{32}) in transmitted longitudinal wave

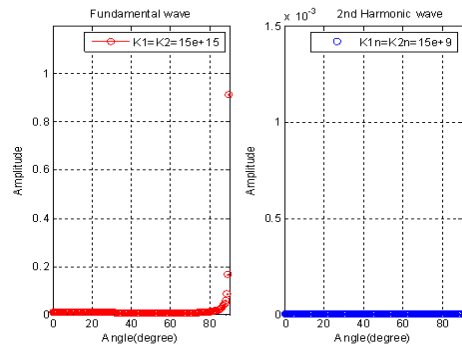


Fig. 14 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component (A_1, A_{12}) in reflected longitudinal wave

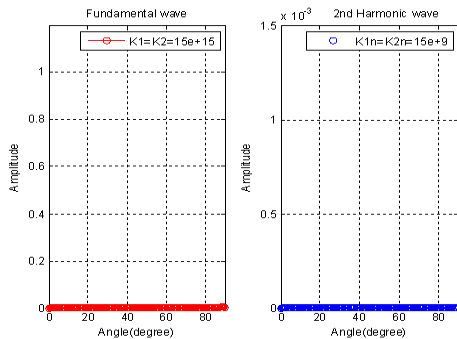


Fig. 13 Variation of the fundamental and 2nd harmonic component (A_4, A_{42}) in transmitted transverse wave

음파로서는 이 단계의 균열을 검사하기는 어렵다는 반증이기도 하다. 이와 비슷하게 경사 균열부에 초음파를 입사하였을 때의 투과 횡파의 계산 결과가 Fig. 13에 나타나 있다. 종파의 경우와 달리 기본 주파수 성분의 경우 입사각에 따라 진폭이 거의 0로서 변화가 없으며, 2차 고조파의 경우도 마찬가지로 진폭이 0으로 일정하다. 투과 횡파의 경우에는 투과 종파와는 달리 동일 재료의 균열 면이 서로 강하게 밀착된 관계로 모드 변환이 일어나지 않아서 모든 경사각에 대해 0의 진폭 값을 가지는 것을 보여주고 있다.

반사파의 경우에도 이러한 결과가 얻어지는데 Fig. 14는 경사 균열부에 초음파를 입사시켰을 때의 만들어지는 반사 종파의 계산 결과를 나타낸다. 기본파 성분의 경우나 2차 고조파 성분의 경우에도 모두 입사각이 변화하더라도 진폭은 거의 0의 값으로 일정하다. 계면이 매우 강하게 단혀 있는 경우이기 때문에 반사가 잘 일어나지 않는

것을 잘 보여주고 있다. 마찬가지로 반사 횡파의 경우에도 같은 결과를 나타내므로 본문에서는 게재하지 않았다.

6. 토론

<균열 경사각과 고조파의 상관관계>

입사각도의 변화로부터 얻어지는 2차 고조파의 변화 중 가장 특별히 두드러진 특징은 입사각이 90도에 가까울 때는, 즉 초음파의 진행 방향과 균열면의 방향이 비슷할 때에는 굴절과 반사파 모두를 막론하고 2차 고조파는 발생하지 않는다는 점이다. 또한 비강성 계수의 크기가 1보다 매우 클 경우에도 (균계 단힌 균열계면의 경우) 반사파와 투과파, 그리고 종파와 횡파와 관계없이 2차 고조파는 거의 생기지 않았다. 이와 함께 입사각에 따른 2차 고조파의 변화도 월등히 작아 그 변화가 미미하였다. 그러나 비강성계수가 1에 가깝거나 그보다 작은 경우, 즉 단힘 정도가 심하지 않을 경우에는, 2차 고조파가 상대적으로 훨씬 커서 투과파는 물론 반사파에서도 종파와 횡파에 관계없이 모두 잘 발생하였으며 경사각에 따른 변화도 매우 큰 것을 확인할 수 있었다.

그러므로 경사 입사한 조화 초음파가 균열 면에서 투과와 반사가 일어날 때 발생하는 고조파는 경사각과 균열의 단힘 정도에 따라 민감하게 달라짐을 알 수 있다. 이에 따라 비선형 초음파 기술에서 활용되는 비선형 계수 값도 균열의 방향에 따라 크게 달라질 수 있음을 확인하였다. 즉, 비선형 계수가 기본주파수 성분 크기의 제곱에 대한

2차 고조파 성분 크기의 비로서 정의되기 때문에 본 연구에서의 결과를 보면 동일한 단힘 균열이라 하더라도 균열의 경사각도에 따라 비선형 계수의 값도 크게 변화할 수 있음을 확인할 수 있었다.

〈계면강성의 이방성〉

본문에서 유도한 고조파 표현식으로부터 비선형 강성계수는 2차 고조파에만 영향을 미치는 반면 선형 강성계수는 기본파 성분과 2차 고조파 모두에 결정적 영향을 주는 것으로 나타난다. 그러므로 이들 계면강성의 선택은 해석결과에 지대한 영향을 줄 수 있으므로 주의가 필요하다.

본 연구에서 수행한 모의실험은 수직 계면강성(K_2)과 수평 계면강성계수(K_1)를 동일한 값으로 설정하고 경사 입사된 초음파의 굴절과와 반사파의 2차 고조파의 변화를 조사하였다. 또한 비강성의 크기를 변화시킬 때 수직 방향과 수평방향의 강성계수를 역시 같은 값을 유지하면서 비례적으로 증가하거나 감소하도록 하였다. 그러나 실제 접촉 계면에서 두 방향의 강성계수 K_1, K_2 는 일반적으로 다르며 이 경우 굴절과와 반사파의 모드 변환과 굴절각에 영향을 줄 수 있으므로 결과적으로는 본 연구의 결과와는 상이한 고조파 발생 결과를 초래할 수도 있다. 하지만 그 동안 수행된 다른 연구자들의 비선형 계면에 대한 실험 결과를 보면 수평방향과 수직방향의 강성계수(K_1, K_2)는 서로 매우 종속적인 관계를 가지는 것으로 알려져 있다[3]. K_1 와 K_2 가 균열 계면의 미세구조나 물성에 따라 차이는 나지만 대개 일정한 비율을 가지고 있는 것으로 보고되고 있다. 즉, K_1/K_2 값이 일정한 특징을 가진다. 그러므로 이러한 근거에서 본 논문에서는 수직과 수평방향의 비강성계수의 비를 일정하게 유지하면서 비선형계면의 굴절과 반사를 조사하였다.

마찬가지로 이러한 논리에서 수평방향과 수직방향의 비선형 강성계수 K_{1n}, K_{2n} 역시 일정한 비율(논문에서는 1)로 설정하고 고조파 계산을 수행하였다. 또한 비선형 계면 강성계수를 해석 과정에서 모두 일정한 값($K_{1n} = K_{2n} = 1GN/m$)으로 가정하고 2차 고조파의 특성을 분석하였다. 사실 비선형 강성 값들(K_{1n}, K_{2n})은 계면 응력의 함수이고 또 다시 선형강성 값과 연동되어 변화한다. 그러므로 본 연구에서도 선형강성을 3단계로 나누어 변화시

킬 때 당연히 비선형 강성 값들도 연동되어야 하지만 그 관계는 접촉계면의 미시적인 형상과 탄소성 성질에 의존하기 때문에 접촉계면의 통계적 자료가 정의되기 전에는 정의할 수 없고 복잡해서 일반적으로 알기 불가능하다. 다행스럽게도 비선형성이 작은 경우, 2차 고조파는 비선형 강성계수와 선형적인 근사 관계를 가지므로 2차 고조파는 비선형 강성계수에 선형적으로 비례하는 것으로 가정할 수 있다. 이 때문에 적당한 비선형 강성계수를 가정하더라도 2차 고조파는 그에 비례적으로 나타날 것을 예상할 수 있다. 그러므로 본 논문에서는 선행 연구의 결과로서 비선형 강성계수의 크기가 선형 강성계수의 수 %이내의 값을 가지는 것을 기초로 하여 컴퓨터 모의 계산에서는 선형 비강성 계수 값($\frac{K}{\rho c w} = 1$)의 1%로 비선형 계수값($K_{1n} = K_{2n} = 1GN/m$)을 설정하였다[10].

〈계면 반사파의 고조파 성분〉

본 논문에서 한 가지 부가적으로 주목하고 관찰한 점은 통상 비선형 기술에서는 투과파를 주로 사용하는데 배관과 같이 한 쪽 면에서만 접근이 가능한 경우에는 반사파를 사용하는 것이 유용한 경우가 많으므로 반사파에서의 2차 고조파 발생 특성을 조사하고자 하였다. 결론적으로 분석결과를 비교해 보면 부분적으로 닫힌 경사진 균열에서 만들어진 반사파의 2차 고조파가 투과파의 2차 고조파와 비슷한 오더의 크기를 가지는 것으로 나타났다. 따라서 반사되는 기본주파수 성분이 작음에도 불구하고 기본적으로 2차 고조파가 효과적으로 발생되고 있는 점은 향후 유용한 결과라 하겠다.

7. 결 론

경사진 단힘 균열에서 발생하는 고조파를 불연속 계면 모델과 섭동법을 기초로 해석하였다. 경사각과 계면 강성 변화의 변화에 따른 고조파 발생 특성을 분석하였으며 이 해석 결과에 따라 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 단힘 균열계면에서의 2차 고조파 크기는 균열의 단힘 정도(계면강성)뿐만 아니라 균열의 경사각에 크게 의존함을 확인하였다.
- 2) 균열 경사각에 따른 2차 고조파의 변화는 계

- 면 강성과도 밀접한 관계가 있다. 계면강성이 큰 균열의 경우(비강성 $\gg 1$)에는 입사각에 관계없이 2차 고조파는 거의 발생하지 않으며, 선형 계면강성이 비교적 작은 균열의 경우(비강성 ≤ 1)에는 입사각에 따라 2차 고조파의 변화가 매우 크다. 특히 균열면의 방향이 초음파 진행 방향과 평행할 경우에는 투과 및 반사파 모두에서 2차 고조파의 발생은 극히 작아진다.
- 3) 비계면강성이 1보다 작은 닫힘 균열의 경우에는 반사파의 2차 고조파도 투과파의 2차 고조파에 비해 비슷한 크기를 가진다. 이로부터 균열 경사각이 매우 크지 않다면 균열부 반사파의 비선형특성을 이용하여 균열을 검사하는 방법이 가능할 것으로 판단된다.
- 4) 반사와 굴절파의 2차 고조파는 계면강성에 관계없이 종파 모드는 수직 균열에 더 민감하며 횡파는 수직보다 경사 균열에서 상대적으로 더 민감한 것으로 조사되었다.

후 기

이 논문은 교육과학기술부(MEST)와 한국기술교육대학교의 연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] I. Y. Solodov, "Ultrasonics of non-linear contacts: propagation, reflection, and NDE applications," *Ultrasonics*, Vol. 36, pp. 383-390 (1998)
- [2] C. Pecorari and S. I. Rokhlin, "Elasto-plastic micromechanical model for determination of dynamic stiffness and real contact area from ultrasonic measurements," *Wear*, Vol. 262, pp. 905-913 (2007)
- [3] S. Biwa, S. Hiraiwa and E. Matsumoto, "Stiffness evaluation of contacting surfaces by bulk and interface waves," *Ultrasonics*, Vol. 47, pp. 123-129 (2007)
- [4] S. Biwa, S. Hiraiwa and E. Matsumoto, "Experimental and theoretical study of harmonic generation at contacting interface,"

Ultrasonics, Vol. 44, pp. 1319-1322 (2006)

- [5] K. Kawashima, et al., "Nonlinear ultrasonic imaging of imperfectly bonded interfaces," *Ultrasonics*, Vol. 44, pp. 1329-1333 (2006)
- [6] N. Kim, K. Jhang and T. Lee. "Reflection and transmission of acoustic waves across nonlinear contact interface," *Journal of the Korean Society for Nondestructive Testing*, Vol. 28, No. 3, pp. 292-301 (2008)
- [7] N. Kim and S. Yang, "Reflection and transmission of acoustic waves across contact interface," *Journal of the Korean Society for Nondestructive Testing*, Vol. 28, No. 3, pp. 292-300 (2008)
- [8] 양승용, 김노유, "균열의 고조파 발생에 대한 유한요소해석", *한국전산구조공학회 논문집*, 제22권, 6호, pp. 573-577 (2009)
- [9] J. D. Achenbach, "Wave Propagation in Elastic Solids," North-Holland Pub. Co. (1973)
- [10] Nohyu Kim and Y. J. Song, "Ultrasonic Estimation of Interfacial Stiffness for Contacting Surfaces", International Conference on Experimental Mechanics(ICEM), Kuala Lumpur, Malaysia, Nov. 29-Dec.1, pp. 157-158 (2010)

Appendix

비선형 균열 계면에 경사각 θ_0 로 입사된 단순 조화파 $u^{(0)}(t) = A_0 e^{-i\omega t}$ 에 의해 발생하는 굴절파나 반사파의 파동 변위 $U(t)$ 를 다음과 같은 섭동해의 형태로 가정할 수 있다.

$$U(t) = U_0(t) + \varepsilon U_1(t) + \varepsilon^2 U_2(t) + \dots, \quad \varepsilon = \frac{K_n}{\rho c \omega} \quad (A1)$$

여기에서 $\varepsilon = \frac{K_n}{\rho c \omega}$ 는 섭동변수($\varepsilon \ll 1$)로서 무차원 수인데 물리적으로는 비강성계수를 나타내며, K_n 은 비선형 강성계수를, ρc 는 음향 임피던스, ω 는 주파수를 표시한다. 식(A1)에서 우변 첫째 항 $U_0(t)$ 는 기본주파수 성분이며 둘째 항 $U_1(t)$ 는 1차 섭동해, $U_2(t)$ 는 2차 섭동해를 나타낸다. 상대적으로 크기가 작은 섭동변수의 이차항 이상을 무시하

고 근사하면 섭동해는 기본주파수 성분($U_0(t)$)과 2차 고조파 성분($U_1(t)$)으로 표시된다. 우선 기본 주파수 성분을 구하기 위해 $\varepsilon=0$ 로 놓고 식(3)과 (4)로 주어진 구성방정식을 식(5)의 표현식을 이용해 변위식으로 나타내면 다음의 네 식으로 표시된다.

<수직방향의 응력연속 조건>

$$\begin{aligned} & A_0 i k_0 [(\lambda + 2\mu) \cos^2 \theta_0 + \lambda \sin^2 \theta_0] \\ & + A_1 i k_1 [(\lambda + 2\mu) \cos^2 \theta_1 + \lambda \sin^2 \theta_1] \\ & + A_2 i k_2 [-(\lambda + 2\mu) \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \lambda \sin \theta_2 \cos \theta_2] \\ & - A_3 i k_3 [(\lambda + 2\mu) \cos^2 \theta_3 + \lambda \sin^2 \theta_3] \\ & - A_4 i k_4 [-(\lambda + 2\mu) \sin \theta_4 \cos \theta_4 + \lambda \sin \theta_4 \cos \theta_4] = 0 \end{aligned} \quad (A2)$$

<수평방향의 응력연속 조건>

$$\begin{aligned} & A_0 i k_0 \mu [2 \cos \theta_0 \sin \theta_0] + A_1 i k_1 \mu [-2 \cos \theta_1 \sin \theta_1] \\ & + A_2 i k_2 \mu [\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2] - A_3 i k_3 \mu [2 \cos \theta_3 \sin \theta_3] \\ & - A_4 i k_4 \mu [\sin^2 \theta_4 - \cos^2 \theta_4] = 0 \end{aligned} \quad (A3)$$

<수직방향의 변위-응력 관계>

$$\begin{aligned} & A_3 i k_3 [(\lambda + 2\mu) \cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_3] \\ & + A_4 i k_4 [(\lambda + 2\mu) \sin \theta_4 \cos \theta_4 - \lambda \sin \theta_4 \cos \theta_4] \\ & = K_2 \{ A_3 \cos \theta_3 + A_4 \sin \theta_4 - A_0 \cos \theta_0 + A_1 \cos \theta_1 - A_2 \sin \theta_2 \} \end{aligned} \quad (A4)$$

<수평방향의 변위-응력 관계>

$$\begin{aligned} & A_3 \mu i k_3 [2 \cos \theta_3 \sin \theta_3] + A_4 \mu i k_4 [\sin^2 \theta_4 - \cos^2 \theta_4] \\ & = K_1 \{ A_3 \sin \theta_3 - A_4 \cos \theta_4 - A_0 \sin \theta_0 - A_1 \sin \theta_1 - A_2 \cos \theta_2 \} \end{aligned} \quad (A5)$$

위의 식들에서 k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 는 입사종파, 반사종파, 반사횡파, 굴절종파, 굴절횡파의 파수를 각각 나타내며 λ, μ 는 Lamé 상수를 표시한다(Fig. 2 참고). 또한 A_1, A_2 는 반사파의 종파와 횡파에 대한 기본주파수 성분의 크기이고, A_3, A_4 는 굴절파의 종파와 횡파에 대한 기본주파수 성분의 크기를 나타낸다. 식 (A2)-(A5)의 네 식을 A_1, A_2, A_3, A_4 에 관해 정리해서 행렬식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = A_0 \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \quad (A6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} b_1 &= -i k_0 [(\lambda + 2\mu) \cos^2 \theta_0 + \lambda \sin^2 \theta_0] \\ b_2 &= -i k_0 \mu [2 \cos \theta_0 \sin \theta_0] \\ b_3 &= -K_2 \cos \theta_0 \\ b_4 &= -K_1 \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (A7)$$

그리고

$$\begin{aligned} a_{11} &= i k_1 [(\lambda + 2\mu) \cos^2 \theta_1 + \lambda \sin^2 \theta_1] \\ a_{12} &= i k_2 [-(\lambda + 2\mu) \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \lambda \sin \theta_2 \cos \theta_2] \\ a_{13} &= -i k_3 [(\lambda + 2\mu) \cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_3] \\ a_{14} &= -i k_4 [(\lambda + 2\mu) \sin \theta_4 \cos \theta_4 - \lambda \sin \theta_4 \cos \theta_4] \\ a_{21} &= i k_1 \mu [-2 \cos \theta_1 \sin \theta_1] \\ a_{22} &= i k_2 \mu [\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2] \\ a_{23} &= -i k_3 \mu [2 \cos \theta_3 \sin \theta_3] \\ a_{24} &= -i k_4 \mu [\sin^2 \theta_4 - \cos^2 \theta_4] \\ a_{31} &= -K_2 \cos \theta_1 \\ a_{32} &= K_2 \sin \theta_2 \\ a_{33} &= -K_2 \cos \theta_3 - a_{13} \\ a_{34} &= -K_2 \sin \theta_4 - a_{14} \\ a_{41} &= K_1 \sin \theta_1 \\ a_{42} &= K_1 \cos \theta_2 \\ a_{43} &= -K_1 \sin \theta_3 - a_{23} \\ a_{44} &= K_1 \cos \theta_4 - a_{24} \end{aligned} \quad (A8)$$

식(A6)-(A8)로부터 A_1, A_2, A_3, A_4 를 구하면 각 파동의 기본주파수 성분의 크기가 결정되고 이를 근간으로 식(A1)에서 주어진 각 파동의 1차 섭동해를 다음처럼 가정하여 구할 수 있다. 즉,

$$U(t) = U_0(t) + \varepsilon U_1(t) \quad (A9)$$

식(A9)에서 $U_1(t)$ 은 $U_0(t)$ 와 에너지 전파 방향과 입자 진동 방향이 같으므로 식(2)에서 주어진 파동 변위의 표현식을 그대로 사용할 수 있는데 그 크기(복소수)만이 $U_0(t)$ 와 다르다. 그러므로 이 크기를 각 파동에 대해 2차 고조파 성분임을 나타내기 위하여 아래 첨자 2를 덧붙여서 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$ 로 표시하자. 예를 들어 반사파의 종파성분을 식(2)에서처럼 위첨자 (1)로 구분하여 표시할 때 이 파동의 1차 섭동해는 다음처럼 나타낼 수 있다.

$$U_1^{(1)}(t) = A_{12} \frac{U_0^{(1)}(t)}{|U_0^{(1)}(t)|} \tag{A10}$$

따라서 차례로 반사파의 종파/횡파와 굴절파의 종파/횡파를 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$ 을 이용하여 식 (A10)처럼 표시할 수 있다. 식(A10)을 다시 식 (3) 과 (4)로 주어진 구성방정식에 대입하고 ε 항에 따라 정리한 후 ε 에 대한 고차 항을 소거하면 구성 방정식은 다음과 같은 행렬식으로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \\ A_{42} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \tag{A11}$$

식(A11)에서의 계수 행렬 a_{ij} 는 식(A8)에 이미 주어졌으며 우항의 계수 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ f_2 &= 0 \\ f_3 &= K_{2n} [A_3 \cos \theta_3 + A_4 \sin \theta_4 - A_0 \cos \theta_0 + A_1 \cos \theta_1 - A_2 \sin \theta_2]^2 \\ f_4 &= K_{1n} [A_3 \sin \theta_3 - A_4 \cos \theta_4 - A_0 \sin \theta_0 - A_1 \sin \theta_1 - A_2 \cos \theta_2]^2 \end{aligned} \tag{A12}$$

식(A11)로부터 2차 고조파의 크기, 즉 $|U_1(t)|$ 를 결정하며 식(A6)에서 결정된 기본주파수 성분의 크기 $|U_0(t)|$ 로부터 식(A9)의 섭동해가 계산된다.